

УДК 519.689:519.254

ББК 32.973.202

А 43

Описані задачі автоматизованої обробки даних, інформаційна технологія сучасних обчислювальних процедур більш адекватного відображення експериментальних даних у системах моніторингу. Досліджені обчислювальні процедури сплайн перетворень, які застосовані у системах ПС та прийняття рішень, прикладні задачі інформаційних технологій.

Для науковців, аспірантів та фахівців у галузі інформатики.

**А43 Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій** : зб. наук. пр. / наук. ред. О.П. Приставка. – Д. : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2009. – Т. 13. – 160 с.

Описаны задачи автоматизированной обработки данных, информационная технология современных вычислительных процедур более адекватного отображения экспериментальных данных в системах мониторинга. Исследованы вычислительные процедуры сплайн преобразований, примененных в системах ПИС и принятия решений, прикладные задачи информационных технологий.

Для научных сотрудников, аспирантов и специалистов в области информатики.

УДК 519.689:519.254

ББК 32.973.202

*Рекомендовано вченою радою*

*Дніпропетровського національного університету ім. Олеся Гончара*

**Науковий редактор:**

доктор технічних наук, професор О.П. Приставка

**Редакційна колегія:**

д-р фіз.-мат. наук, проф. О.А. Приходько (заст. наук. ред.); д-р техн. наук, проф. О.М. Петренко; д-р техн. наук, проф. О.М. Карпів; д-р техн. наук, проф. В.Н. Малайчук; д-р техн. наук, проф. О.Г. Якованко; д-р фіз.-мат. наук, проф. С.О. Смірнов; д-р техн. наук, проф. В.О. Доровський; д-р техн. наук, проф. Н.О. Приставка; д-р техн. наук, проф. О.Г. Байбуз (відп. секр.)

**Рецензенти:**

д-р техн. наук, проф. Б.І. Мороз

д-р техн. наук, проф. М.О. Жулюк

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, 2009

УДК 519.248:62-192

Ю.І. Швацька, О.П. Приставка

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара*

## ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ ВІДНОВЛЕННЯ РОЗПОДІЛУ ВЕЙБУЛЛА

Розроблена обчислювальна технологія апроксимації розподілу Вейбулла сплайн-експоненціальним з одним вузлом склейки та побудована згортка. Приведений аналіз згортки за наведеною технологією та імітаційним методом моделювання у задачах надійності при холодному резервуванні та експлуатації до вичерпання ресурсів.

**Ключові слова:** аналітичний розв'язок, апроксимація, гістограма, відтворення розподілу, вузол склейки, згортка, імперична функція, метод розпаданя в ряд, надійність, сплайн-експоненціальний розподіл, розподіл Вейбулла, параметри розподілу, похибка, ряд, ряд Тейлора

Разработана вычислительная технология аппроксимации распределения Вейбулла сплайн-экспоненциальным с одним узлом склейки и построена свертка. Приведен анализ свертки по представленной технологии и имитационному методу моделирования в задачах надежности при холодном резервировании и эксплуатации до исчерпания ресурсов.

**Ключевые слова:** аналитическое решение, аппроксимация, гистограмма, восстановление распределения, узел склейки, свертка, эмпирическая функция, метод разложения в ряд, надежность, сплайн-экспоненциальное распределение, распределение Вейбулла, параметры распределения, ряд, погрешность, ряд Тейлора

A computing technology for approximating of Weibull distribution by spline-exponential desribution with one gluing knot was designed and convolution built. The analysis of the convolution by the presented technology and simulation modeling method in problems of reliability under cold backup and exploitation up to resources exhaustion was represented.

**Keywords:** analytical solution, approximation, bar graph, distribution recovery, gluing knot, convolution, empiric function, row decomposition, reliability, spline-exponential distribution, Weibull distribution, distribution parameters. error, row, Taylor row

**Вступ.** У задачах надійності при холодному резервуванні та експлуатації систем до вичерпання ресурсів (наприклад, авіаційного обладнання) – розглядається згортка розподілів при  $n \leq 3$ . Постає задача відновлення згортки

© Ю.І. Швацька, О.П. Приставка, 2009

$$\tau = \tau_1 + \tau_2, \text{ або } \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$$

для випадку розподілу Вейбулла. Вирішення зведено до задачі знаходження згортки рядів, тим самим отримання точного аналітичного розв'язку неможливо. На відміну від [1-3], які описують знаходження згортки через ряди, запропоновано метод апроксимації згортки розподілів Вейбулла сплайн-експоненційним з одним вузлом склейки, тим самим вирішується задача аналітичного знаходження згортки розподілу Вейбулла.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Для знаходження згортки Вейбулла в [1-3] запропоновано апроксимацію розподілу Вейбулла в ряд Тейлора та знаходження згортки через ряди. Нестача цього в неможливості отримання точного розв'язку.

У [2-3] отримані представлення  $n$ -кратних згорток функцій розподілу у вигляді  $n$ -кратних узагальнених степенних рядів для різних законів розподілу, таких як експоненційний, Гамма-розподіл, розподіл Релея, Максвелла, Вейбулла-Гнеденко, а також представлення функції розподілу в вигляді  $k^2$ -кратного узагальненого степенного ряду для експоненційного розподілу, розподілів Вейбулла-Гнеденко і Максвелла. Явний вигляд функції відновлення мають лише деякі функції розподілу, для експоненційного, Ерланга, рівномірного приклади наведені в [2].

Більш ефективною є апроксимація розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом. Знаходження згортки суми  $n$  випадкових величин  $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ , кожна з яких має експоненціальний закон розподілу з однаковими параметрами описується в [4]. У роботі наведені деякі обчислювальні процедури для сплайн-експоненційного розподілу та загальна схема апроксимації функції інтенсивності та апроксимації розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом.

**Постановка задачі.** Провести апроксимацію розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом, який має наступну функцію щільності ймовірності

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot t), & 0 < t \leq t_1; \\ \mu \cdot \exp[-(\lambda - \mu) \cdot t_1 - \mu \cdot t], & t_1 < t < \infty \end{cases} \quad (1)$$

і побудувати функцію розподілу згортки сплайн-експоненційних розподілів з одним вузлом.

Порівняти отримані результати з результатами побудови розкладання згортки розподілу Вейбулла в ряди

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t^\beta}{\alpha}\right). \quad (2)$$

Зробити висновки щодо ефективності отриманих розв'язків, користуючись критерієм близькості побудованих функцій розподілу до функції розподілу, отриманої в наслідок імітаційного моделювання.

**Основний матеріал.** Для знаходження функції розподілу згортки Вейбулла розкладемо (1) в ряд Тейлора

$$F(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^{\beta k}}{\alpha^k k!}. \quad (3)$$

Тоді функція розподілу згортки суми розподілів з однаковими параметрами приймає наступний вигляд

$$G(t) = \sum_{p=a+b}^{\infty} \frac{(-1)^{p+a+b} \beta^p}{\alpha^p p} \sum_{n=a}^{p-b} \frac{p! \Gamma(\beta n + 1) \Gamma(\beta(p-n) + 1)}{n! (p-n)! \Gamma(\beta p + 1)}. \quad (4)$$

Відповідна їй функція щільності має вигляд

$$f(t) \frac{dG(t)}{dt} = \sum_{p=a+b}^{\infty} \frac{(-1)^{p+a+b} \beta^{p-1}}{\alpha^p p!} \sum_{n=a}^{p-b} \frac{p! \Gamma(\beta n + 1) \Gamma(\beta(p-n) + 1)}{n! (p-n)! \Gamma(\beta p + 1)}. \quad (5)$$

Для згортки двох (рис.1 а) та трьох (рис.1 б) випадкових величин, розподілених за законом Вейбулла з параметрами  $\beta = 1.8$  та  $\alpha = 500$  при кількості коефіцієнтів ряду - 100 та шляхом імітаційного моделювання при  $n=2000$  отримуємо відповідні результати:

- побудована гістограма та імперична функція розподілу,
- обчислені функції (4), (5).

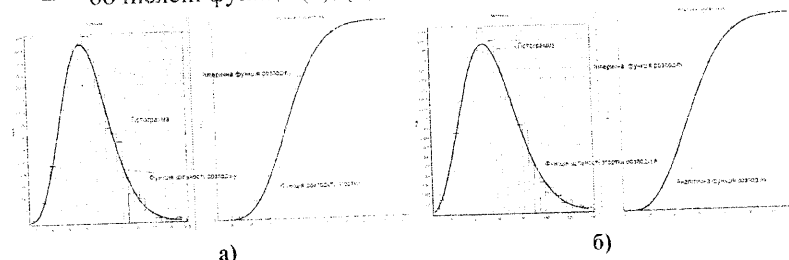


Рис. 1. Гістограма та імперична функція розподілу Вейбула та відновлення функції розподілу згортки Вейбулла

Відтворена функція розподілу згортки співпадає з емпіричною функцією розподілу, з максимальною різницею  $D_n = \max_{1 \leq i \leq n} |F_c(t_i) - F_a(t_i)| = 0.00298$ . Для прийняття рішення про число членів ряду в розкладанні згортки реалізовано критерій.

Зроблено висновок, що достатньо прийняти 50 членів ряду для достовірного відновлення згортки Вейбулла.

Недостатком цього методу є необхідність оцінки числа членів ряду в розкладанні залежно від параметрів розподілу (особливо параметра  $\beta$ ). Для того, щоб позбутися цього, запропонований підхід, заснований на апроксимації згортки розподілів Вейбулла згорткою сплайн-експоненційних розподілів і розглядається аналітична форма згортки сплайн-експоненційних розподілів.

Для знаходження параметрів сплайн-експоненційного розподілу з одним вузлом застосований метод апроксимації неперервної функції розподілу інтенсивності переходів у середньому. Задача апроксимації представляє собою задачу найкращого наближення функції  $f(x)$  з вагою  $p(x)$  ступінчатої функції  $c(x)$ . На заданному розбитті  $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} = b$   $c(x) = c_i(x) = c_i$ , при  $x_{i-1} \leq x < x_i$ . Міра близькості  $f(x)$  і  $c(x)$  на  $(a, b)$  визначається як

$$\delta_a^b = \delta_a^b(f - c) = \int_a^b p(x) |f(x) - c(x)| dx. \quad (6)$$

Задача наближення складається в найкращому виборі вузлів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , які знаходять за результатом вирішення задачі мінімізації

$$\min_{a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b} \delta_a^b(f - c). \quad (7)$$

при цьому функція  $c_i(x)$  залежить від  $x_{i-1}$ . Якщо  $x_{i-1}$  і  $x_i$  фіксовані, то  $c_i(x)$  визначається з рішення локальної задачі

$$\min_{c_i(x) \in R_i} \delta_{x_{i-1}}^{x_i}(f - c). \quad (8)$$

Таким чином, рішення загальної задачі мінімізації (7) зведено до багатократного рішення локальних задач (8) на інтервалі з кінцями, які варіюються.

Нехай функція  $\lambda(t)$  з вагою  $p(t) = 1$  наближується на інтервалі  $(0, t)$  кусочною функцією, складеною з  $(k+1)$  куска  $c_1(t), \dots, c_k(t), c_{k+1}(t)$  з вузлами  $t_1, \dots, t_k$ . Погрішність наближення в середньому визначається

$$R_k(t_1, t_2, \dots, t_k) = \sum_{i=1}^k \delta_{t_{i-1}}^{t_i} \quad (9)$$

Обозначимо через  $t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, \dots, t_k^{(k)}$  гої набір  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , при якому функція (9) досягає мінімуму. Тоді рішення загальної задачі мінімізації (7) визначається набором  $t_1^{(1)}, t_1^{(2)}, \dots, t_k^{(k)}$ .

Нехай

$$R_{k+1}(t) = R(t_1^{(k)}(t), t_2^{(k)}(t), \dots, t_k^{(k)}(t), t) = \min_{t_1, t_2, \dots, t_k} R(t_1, t_2, \dots, t_k, t) \quad (10)$$

Додавання нового куска функції призводить до необхідності вибору найкращим чином вузла склеювання цього куска з попереднім. Для рішення цієї задачі запишемо рекуррентні співвідношення, які витікають з принципу динамічного програмування

$$R_{k+1}(t) = \min_{0 \leq y \leq t} \left\{ R_k(y) + \int_y^t [\lambda(u) - c_{k+1}(u)] du \right\}, k = \overline{1, n}, \quad (11)$$

де

$$R_1(y) = \int_0^y [\lambda(u) - c_1(u)] du. \quad (12)$$

Значення  $t_k^{(k)}(t)$  дорівнює тому значенню змінної  $y$ , при якому досягається мінімум виразу у правій частині  $k$ -го співвідношення (11) або (12).

Реалізуючи функції  $t_k^{(k)}(t)$ ,  $1 \leq k < n$  та рівність  $t_k^* = t_k^{(k)}(t_{k+1}^*)$ ,  $1 \leq k < n$  -- отримуємо рішення задачі наближення у середньому.

Апроксимація функції інтенсивності кусочно-сталою функцією з одним вузлом зклеюки описується наступним чином.

Фіксуються дві точки  $x$  та  $y$ , які належать інтервалу  $(0, b)$ , і  $\tau \in (x, y)$ . З (11) і (12), загальний вигляд  $c_i$  знаходиться з рішення локальної задачі

$$R_1(y) = \min_c \int_x^y [\lambda(u) - c] du = \min_{\tau} \left[ - \int_x^{\tau} (\lambda(u) - \lambda(\tau)) du + \int_{\tau}^y (\lambda(u) - \lambda(\tau)) du \right] = \min_{\tau} \left[ - \int_x^{\tau} \lambda(u) du + \int_x^{\tau} \lambda(\tau) du + 2\lambda(\tau)(2\tau - x - y) \right]. \quad (13)$$

Мінімальне значення  $R_1(y)$  для  $\tau \in (x, y)$  досягається за умови  $\tau = \frac{x+y}{2}$ . Враховуючи, що  $\tau \in (x, y)$ , на першому кроці  $c$

визначається з формули  $c = \lambda(\tau) = \lambda\left(\frac{x+y}{2}\right)$ . Розширивши інтервал наближення  $(x, y)$  до інтервалу  $(0, b)$ , отримаємо

$$\lambda_1 = c_1 = \lambda\left(\frac{b}{2}\right).$$

Похибка першого наближення  $R_1^0(y)$  з врахуванням  $\lambda(t) = \lambda\left(\frac{y}{2}\right)$

$$R_1^0(y) = \int_0^y \left[ \lambda(u) - \lambda\left(\frac{y}{2}\right) \right] du = - \int_0^{y/2} \lambda(u) du + \int_{y/2}^y \lambda(u) du. \quad (14)$$

При  $y = b$  з формули (14)  $R_1^0 = R_1^0(b)$  на всьому інтервалі.

На другому кроці вузол склеювання визначається таким чином, щоби похибка наближення була мінімальною. Нехай  $y$  – вузол склеювання, а  $z$  – довільна змінна. При цьому  $0 < y < z$ , частково  $z = b$ . Згідно з (11) похибка другого наближення має вигляд

$$R_2(z) = \min_{0 \leq y \leq z} \left\{ R_1^0(y) + \int_y^z \left[ \lambda(u) - \lambda\left(\frac{y+z}{2}\right) \right] du \right\} = - \int_0^{y/2} \lambda(u) du + \int_{y/2}^y \lambda(u) du - \int_y^{(y+z)/2} \lambda(u) du + \int_{(y+z)/2}^z \lambda(u) du. \quad (15)$$

Похибка  $R_2(z)$  мінімальна за умови

$$2\lambda(y) - \lambda\left(\frac{y}{2}\right) - \lambda\left(\frac{y+z}{2}\right) = 0 \quad (16)$$

Нехай рішення рівняння (16) має вигляд  $y = r_2^0(z)$ , тоді вузол склеювання кусочно-постійної функції  $t_0$  і значення  $\lambda_1, \lambda_2$  визначаються як

$$t_0 = r_2^0(b), \quad (17)$$

$$\lambda_1 = c_1 = \lambda\left(\frac{t_0}{2}\right) = \lambda\left(\frac{r_2^0(b)}{2}\right), \text{ при } t \leq t_0; \quad (18)$$

$$\lambda_2 = c_2 = \lambda\left(\frac{t_0 + b}{2}\right) = \lambda\left(\frac{r_2^0(b) + b}{2}\right), \text{ при } t > t_0. \quad (19)$$

Похибка другого наближення  $R_2^0(y)$  має вигляд

$$R_2^0(y) = - \int_0^{\frac{r_2^0(y)}{2}} \lambda(u) du + \int_{\frac{r_2^0(y)}{2}}^{r_2^0(y)} \lambda(u) du - \int_{r_2^0(y)}^{\frac{r_2^0(y)+y}{2}} \lambda(u) du + \int_{\frac{r_2^0(y)+y}{2}}^y \lambda(u) du. \quad (20)$$

Апроксимація розподілу Вейбулла визначається формулами:

$$t_0 = \frac{b}{A}; \lambda_1 = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{b}{2}\right)^{\beta-1} A^{1-\beta} = A^{1-\beta} \lambda; \quad (21)$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{b}{2}\right)^{\beta-1} A^{1-\beta} (2^\beta - 1) = (2^\beta - 1) A^{1-\beta} \lambda.$$

Для апроксимації розподілу Вейбулла з параметрами  $\beta = 1.8$  та  $\alpha = 500$  сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом склейки був отриманий розподіл з параметрами:

$$t_0 = 11.2; \lambda_1 = 0.07; \lambda_2 = 0.17.$$

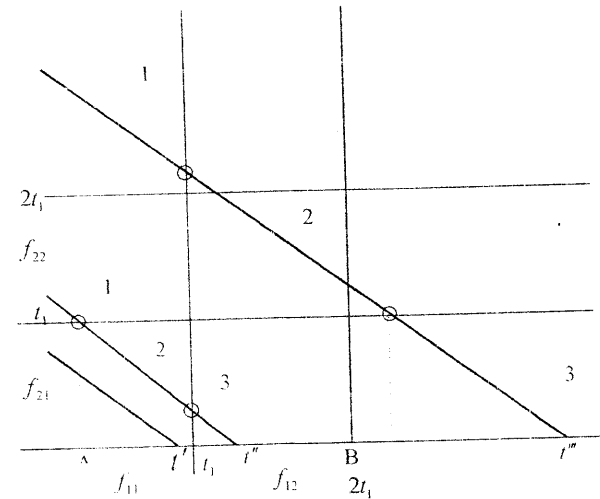


Рис. 2. Геометрична інтерпретація згортки

Для побудови згортки сплайн-експоненційного розподілу використаємо геометричну інтерпретацію згортки. Для визначення границь інтегрування при отриманні аналітичного виразу згортки використаємо рис. 2. Абсиси точок  $A$  і  $B$  дорівнюють відповідно  $t'' - t_1$  і  $t''' - t_1$ , де під  $t''$  розуміють  $t$ , що змінюється від  $t_1$  до  $2t_1$ , а під  $t''' - t_1$  в інтервалі  $(2t_1; \infty)$ .

$$g_2(t) = \begin{cases} g_{21}(t), & 0 < t \leq t_1; \\ g_{22}(t), & t_1 < t \leq 2t_1; \\ g_{23}(t), & 2t_1 < t < \infty, \end{cases} \quad (22)$$

де

$$g_{21}(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_1(\tau) d\tau;$$

$$g_{22}(t) = \int_0^{t-t_1} f_2(t-\tau) \cdot f_1(\tau) d\tau + \int_{t-t_1}^{t_1} f_1(t-\tau) \cdot f_1(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau;$$

$$g_{23}(t) = \int_0^{t_1} f_2(t-\tau) \cdot f_1(\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t-t_1} f_2(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau + \int_{t-t_1}^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau;$$

З урахування значення (2) має місце:

$$g_2(t) = \begin{cases} \lambda^2 t \exp(-\lambda t), & 0 < t \leq t_1; \\ \frac{2\lambda\mu}{\lambda-\mu} \{ \exp(-(\lambda-\mu)t_1 - \mu t) - \exp(-\lambda t) \} + \lambda^2 (2t_1 - t) \exp(-\lambda t), & t_1 < t < 2t_1; \\ \frac{2\lambda\mu}{\lambda-\mu} \{ \exp(-(\lambda-\mu)t_1 - \mu t) - \exp(-2(\lambda-\mu)t_1 - 2\mu t) \} + \mu^2 (t - 2t_1) \exp(-2(\lambda-\mu)t_1 - \mu t), & 2t_1 < t < \infty. \end{cases} \quad (23)$$

Функція розподілу згортки має вигляд:

$$G_2(t) = \begin{cases} 1 - (1 + \lambda t) \cdot \exp(-\lambda t), & 0 < t \leq t_1; \\ 1 - (1 + \lambda t_1) \cdot \exp(-\lambda t) + \frac{1}{\lambda - \mu} \exp(-\lambda(t + t_1) - \mu t) \times \\ \times \{ -2\lambda \exp(\lambda t + \mu t_1) + \exp((\lambda + \mu)t) \} \times \\ \times (\lambda - \mu)(1 + \lambda t_1) + \exp(\mu t + \lambda t_1) \times \\ \times (\mu + \lambda^2(t - 2t_1) + \lambda(1 - \mu t + 2\mu t_1)), & t_1 < t \leq 2t_1; \\ \frac{1}{\lambda - \mu} (-2\lambda t_1 - \mu t) \cdot \{ -2\lambda \exp((\lambda + \mu)t_1) + \exp(2\lambda t_1 + \mu t) (\lambda - \mu) + \exp(2\mu t_1) \} \times \\ \times (\lambda + \mu + \mu(-\lambda + \mu)t + 2\lambda\mu t_1 - 2\mu^2 t_1), & 2t_1 < t < \infty. \end{cases} \quad (24)$$

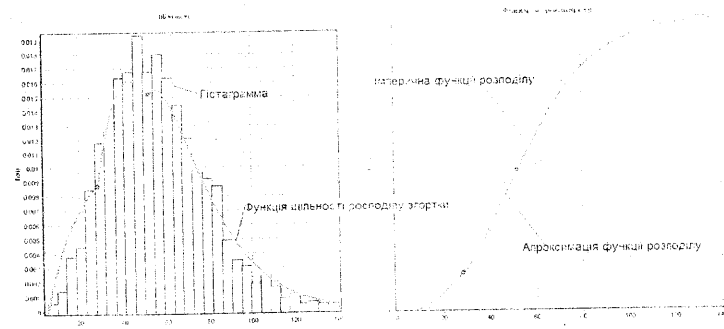


Рис. 3. Гістограма та імпірична функція згортки розподілів Вейбула та апроксимація функції розподілу сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом склеювання

Для  $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$  функція щільності  $g_3(t)$  має вигляд:

$$g_3(t) = \begin{cases} g_{31}(t), & 0 < t \leq t_1; \\ g_{32}(t), & t_1 < t \leq 2t_1; \\ g_{33}(t), & 2t_1 < t < 3t_1; \\ g_{34}(t), & 3t_1 < t < \infty, \end{cases} \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned}
 g_{31}(t) &= \int_0^t f_1(t-\tau) \cdot g_{21}(\tau) d\tau; \\
 g_{32}(t) &= \int_0^{t-\eta_1} f_2(t-\tau) \cdot g_{21}(\tau) d\tau + \int_{t-\eta_1}^{\eta_1} f_1(t-\tau) \cdot g_{21}(\tau) d\tau + \\
 &+ \int_{\eta_1}^t f_1(t-\tau) \cdot g_{22}(\tau) d\tau; \\
 g_{33}(t) &= \int_0^{\eta_1} f_2(t-\tau) \cdot g_{21}(\tau) d\tau + \int_{\eta_1}^{t-\eta_1} f_2(t-\tau) \cdot g_{22}(\tau) d\tau + \\
 &+ \int_{t-\eta_1}^{2\eta_1} f_1(t-\tau) \cdot g_{22}(\tau) d\tau + \int_{2\eta_1}^t f_1(t-\tau) \cdot g_{21}(\tau) d\tau; \\
 g_{34}(t) &= \int_0^{\eta_1} f_2(t-\tau) \cdot g_{21}(\tau) d\tau + \int_{\eta_1}^{t-\eta_1} f_2(t-\tau) \cdot g_{22}(\tau) d\tau + \\
 &+ \int_{t-\eta_1}^{2\eta_1} f_2(t-\tau) \cdot g_{23}(\tau) d\tau + \int_{2\eta_1}^t f_1(t-\tau) \cdot g_{23}(\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

З урахуванням рис.2 отримаємо:

$$\begin{aligned}
 g_3(t) &= \begin{cases} \frac{\lambda^3}{2} t^2 \exp(-\lambda t), & 0 < t \leq t_1; \\ \frac{1}{2(\lambda - \mu)^2} (\lambda^2 \exp(-\mu - \lambda(t + t_1))) \cdot [6\mu \exp(\lambda t + \mu t_1) + \exp(\mu t + \lambda t_1) \cdot \{6\mu + 6\mu(\mu - \lambda)t - 2\lambda(\lambda - \mu)^2 t^2 + 6(\lambda - \mu)(\mu + \lambda^2 t - \lambda \mu t_1) - 3\lambda(\lambda - \mu)^2 t_1^2\}] & t_1 < t < 2t_1; \\ \frac{1}{2(\lambda - \mu)^2} (\lambda \exp(-(\lambda + \mu)t - 2\lambda t_1)) \cdot [6\lambda\mu \times \exp(\mu t_1 + \lambda(t + t_1)) - 6\mu \exp(\lambda t + 2\mu t_1) \times \{\mu - \mu^2(t - 2t_1) + \lambda(2 - \mu + 2\mu t_1)\} + \exp(\mu t + 2\lambda t_1) \times \{6\mu^2 + (\lambda^4 - 2\lambda^2\mu)t - 3t_1\} + \lambda^2 \mu(t - 3t_1)(6 + \mu - 3\mu t_1) + 6\lambda\mu(t - \mu + 3\mu t_1^2)] & 2t_1 < t < 3t_1; \\ \frac{1}{2(\lambda - \mu)^2} (\mu \exp(-\mu - 3\lambda t_1 + \mu t_1)) \cdot [6\lambda\mu \exp(2\lambda t_1) - 6\mu \exp((\lambda + \mu)t_1) \cdot \{\mu + \mu^2(t - 2t_1) + \lambda(2 - \mu + 2\mu t_1)\} + \exp(2\mu t_1) \times \{\mu^4(t - 3t_1)^2 + \lambda^2(6 + \mu(t - 3t_1)(-6 + \mu - 3\mu t_1)) - 2\lambda\mu(-3 + \mu(t - 3t_1)(-3 + \mu - 3\mu t_1))\}] & 3t_1 < t < \dots \end{cases} \quad (26)
 \end{aligned}$$

Функція розподілу має вигляд:

$$\begin{aligned}
 G_3(t) = & \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} \exp(-\lambda t)(-2 - \lambda t(2 + \lambda t)), & 0 < t \leq t_1; \\ \frac{1}{2(\lambda - \mu)^2} (\exp(-\mu t - \lambda(t + t_1))) \left[ -6\lambda^2 \exp(\lambda t - \mu t_1) + \right. \\ & + 2(\lambda - \mu)^2 \exp(\mu t_1 + \lambda(t + t_1)) + \exp(\mu t + \lambda t_1) \times \\ & \times \{4\lambda^2 + 4\lambda\mu - 2\mu^2 - 6\lambda^3 t_1 + 6\lambda^2 \mu t_1 + 3\lambda^4 t_1^2 - \\ & - 6\lambda^3 \mu t_1^2 + 3\lambda^2 \mu^2 t_1^2 - 2\lambda(\mu - \lambda) \times \\ & \times (\mu + \lambda(2 - 3\lambda t_1 + 3\mu t_1))t + 2\lambda^2(\lambda - \mu)^2 t^3 \} \Big], & t_1 < t < 2t_1; \\ \frac{1}{2(\lambda - \mu)^2} (\exp(-(\lambda + \mu)t - 2\lambda t_1)) \left[ -\exp(\mu t + 2\lambda t_1) \times \right. \\ & \times \left\{ 2(-1 + \exp(\lambda t))\mu^2 + \lambda^4(t - 3t_1)^2 - 2\lambda^3(t - 3t_1) \times \right. \\ & \times (1 - \mu + 3\mu t_1) + 4\lambda\mu(2 + \exp(\lambda t) + 3\mu t_1 - \mu) + \\ & + \lambda^2(2 - 2\exp(\lambda t) + \mu(-t + 3t_1)(-2 - \mu + 3\mu t_1)) \Big\} + \\ & + 6\lambda \exp(\lambda t + 2\mu t_1) \cdot \{ \lambda \exp(-\lambda t_1) + \exp(2\mu t_1) \times \\ & \times (\lambda(1 + 2\mu t_1 - \mu) + \mu(2 - 2\mu t_1 + \mu)) \} \Big], & 2t_1 < t < 3t_1; \\ \frac{1}{2(\lambda - \mu)^2} (\exp(-\mu t - 3\lambda t_1)) \left[ -6\lambda^2 \exp((2\lambda + \mu)t_1) + \right. \\ & + 2(\lambda - \mu)^2 \exp(\mu t + 3\lambda t_1) + 6\lambda \exp((\lambda + 2\mu)t_1) \times \\ & \times \{ \lambda(1 + 2\mu t_1 - \mu) + \mu(2 + \mu - 2\mu t_1) \} - \exp(3\mu t_1) \times \\ & \times \{ 2\lambda\mu(4 + \mu(t - 3t_1) - \mu^2(t - 3t_1)^2) + \\ & + \mu^2(2 + \mu^2(t - 3t_1)^2 + 2\mu(t - 3t_1)) + \\ & + \lambda^2(2 + \mu(t - 3t_1)(4 + 3\mu t_1 - \mu)) \} \Big], & 3t_1 < t < \infty. \end{cases} \quad (27)
 \end{aligned}$$

Відтворена функція розподілу згортки співпадає з емпіричною функцією розподілу, з максимальною різницею  $D_n = \max_{1 \leq i \leq n} |F_c(t_i) - F_{exp}(t_i)| = 0.0765$ . За  $\chi^2$ -критерієм зроблено висновок про якісне відтворення функції розподілу.

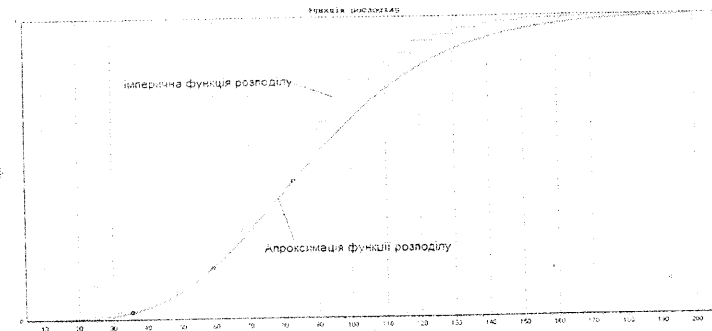


Рис. 4. Імперична функція згортки розподілів Вейбула та апроксимація функції розподілу сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом склеювання

Аналіз отриманих результатів показав, що побудова згортки розподілів методом розкладання в ряд апроксимує з необхідною точністю імперичну функцію розподілу (рис. 5), отриману шляхом імітаційного моделювання, лише за використання значної кількості коефіцієнтів з розкладання ряду, що потребує значних витрат комп'ютерної пам'яті та часу.

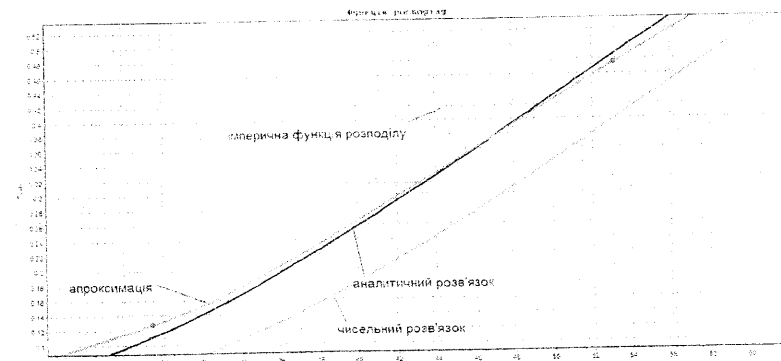


Рис. 5. Імперична, аналітична, відтворена та чисельно отримана функція згортки розподілів Вейбулла і апроксимація функції розподілу сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом склеювання

Апроксимація згортки за допомогою сплайн-експоненційного розподілу є менш точною (рис. 5), але її можна застосовувати для будь-яких розподілів Вейбулла з економним використанням машинних ресурсів.

Апроксимація сплайн-розподілом для більшості випадків дає більш точний результат (рис. 5), ніж побудова функції розподілу згортки за допомогою чисельних методів. Дослідження довели, що максимальна похибка апроксимованої функції розподілу згортки не перевищує 7% від побудованої аналітичної функції розподілу згортки як двох, так і трьох випадкових величин.

Оцінюючи обсяг необхідної для дослідження вибірки, можна сказати, що для отримання адекватних результатів достатньо вибірки з 2000 елементів.

Таблиця 1

Оцінки якості				
Згортка 2-х величин з розподілу Вейбулла, побудована розкладанням у ряд		$\alpha=0.05$	Згортка 2-х величин з розподілу Вейбулла, апроксимована сплайн-експоненціальним розподілом	
$X^2$	Dn	n	$X^2$	Dn
узгоджується (5.24<30)	0.001	2000	узгоджується (12.67<30)	0.06
узгоджується (4.31<30)	0.082	2500	узгоджується (14.73<30)	0.07
узгоджується (5.21<30)	0.08	5000	узгоджується (20.38<30)	0.07
узгоджується (6.09<30)	0.045	10000	узгоджується (27.19<30)	0.06

**Висновки.** Для процесу відновлення  $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k$  де кожна  $\tau_i$  розподілена за розподілом Вейбулла було отримано згортку:

1. Для випадку  $\tau = \tau_1 + \tau_2$  та  $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$  знайдений вигляд аналітичної функції щільності та розподілу за допомогою рядів.
2. Проведена апроксимація функції інтенсивності кусково-сталою функцією з подальшим отриманням сплайн-експоненційного розподілу з одним вузлом для застосування у процедурі знаходження згорток випадкових величин у випадку сплайн-експоненційних розподілів з одним вузлом.
3. Розроблені процедури чисельного знаходження згортки для будь-якого  $n$ .

4. Запропонована процедура знаходження згортки та розроблена інформаційна технологія, що у подальшому застосована для оцінки надійності авіаційних агрегатів.

#### Бібліографічні посилання

1. White Johns. Weibull renewal analysis. 3<sup>rd</sup> Annual Aerospace Reliable and Maintainatil Conf., Washington. D.C., 1964. – New York, P. 639–657
2. Байхельт Ф. Надёжность и техническое обслуживание. Математический подход. / Ф.Байхельт, П. Франкен. – М., 1988. – 392с.
3. Вайнштейн В.И. Представление N-кратных сверток функций распределения в виде рядов и нахождение функции восстановления для некоторых моделей процессов восстановления. / И.В. Вайнштейн // Электронный журнал «Исследовано в России». – 2005. – Т. 8. – С. 486–496.
4. Байбуз О.Г. Сплаины в надежности / О.Г. Байбуз, А.Ф. Приставка. – Д., 2003. – 256 с.
5. Белова Н.П. Апроксимація та дослідження функції інтенсивності згортки сплайн-експоненціального розподілу. / Н.П. Белова, О.П. Приставка // 36. наук. праць. – Д., 2007. – С. 1–15.

Надійшла до редколегії 25.05.09