**УДК 004.052**

Ю.І. Швацька, О.П. Приставка

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

# АПРОКСИМАЦІЯ РОЗПОДІЛУ ВЕЙБУЛЛА СПЛАЙН-ЕКСПОНЕНЦІЙНИМ РОЗПОДІЛОМ ТА СУМІШШЮ ДВОХ ЕКСПОНЕНЦІЙНИХ

**Розроблена обчислювальна технологія апроксимації розподілу Вейбулла сплайн-експоненціальним розподілом. Проведено порівняльний аналіз апроксимації згортки на базі сплайн-експоненційниго та суміші двох експоненційних розподілів.**

***Ключові слова:*** аналітичний розв'язок, апроксимація, відтворення розподілу, згортка, імперична функція, надійність, сплайн-експоненційний розподіл, розподіл Вейбулла, суміш експоненційних розподілів, параметри розподілу.

**Розработана вычислительная технология апроксимации распределения Вейбулла сплайн-экспоненциальным распределением. Проведен сравнительный анализ апроксимации свертки на базе сплайн-экспоненциального и смеси двух экспоненциальных распределениий.**

***Ключевые слова:*** аналитическое решение, аппроксимация, восстановление распределения, свертка, эмпирическая функция, надежность, сплайн-экспоненциальное распределение, распределение Вейбулла, смесь экспоненциальных распределений, параметры распределения.

**A computing technology for approximating of Weibull distribution by spline-exponential distribution was designed. The comparative analysis of approximation of convolution on the bases of spline-exponential and the mixture of two exponential distributions has been made.**

***Keywords:*** analytical solution, approximation, distribution recovery, convolution, empiric function, reliability, spline-exponential distribution, Weibull distribution, mixed exponential distribution, distribution parameters.

**Вступ.** У задачах системного аналізу, в особливості систем обслуговування, накладаються вимоги на функцію інтенсивності простих потоків, де $\lambda(t)$ = const. В дійсності мають місце розподіли, відмінні від експоненційного, такі як розподіл Вейбулла та інші. Застосування розподілу Вейбулла для багатьох видів практичних задач надійності потребує побудови згортки Вейбулла. Побудова такої згортки є складною процедурою, тому на сучасному етапі досліджень є актуальним процесс побудови різноманітних апроксимацій

© Ю.І. Швацька, О.П. Приставка, 2010





розподілу Вейбулла. Найбільш прості за структурою та адекватні відносно похибки є апроксимації розподілу Вейбулла в класі сумішей та сплайн-експоненційних розподілів.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Існуючі дослідження в галузі апроксимацій розподілу Вейбулла можна розділити на дві категорії: обчислювальні процедури та аналітичні наближення. Обчислювальні процедури засновані на операційному перетворенні Лапласа-Стілтьеса (Ayhan та ін., 1999; Xie, 1989) та імітаційному моделюванні (Brown та ін., 1981), та мають недолік: велику апроксимаційну похибку, якщо крок на сітці вибрано невдало. Аналітичні наближення включають сплайн-перетворення (McConalogue, 1981), введення особливих функцій (Cui and Xie, 2003; Jiang, 2008; Smeitink and Dekker, 1990), та степеневі функціональні ряди (Chaudhry, 1995; Constantine and Robinson, 1997; From, 2001; Garg and Kalagnanam, 1998), суміші експоненційних функцій та загальні експоненційні функції (Jin, Tongdan and Gonigunta, Lakshmana, 2009) . Так, McConalogue (1981) запропонував дуже точну кусково-поліноміальну апроксимацію. Але цей метод складно реалізувати через велику кількість коефіцієнтів, які необхідно отбчислити. Cheng та ін. (2004) згенерували вид функцій близьких до розподілу Вейбулла, але їх структура дуже складна. Нещодавно, Hu (2006) запропонував метод наближення частковими розподілами, який досягає вражаючої точності при k-з-n елементах системи, що мають експоненційний розподіл.

Основні два критерії, які часто використовуються для оцінки переваг аналітичних методів апроксимації: складність апроксимаційної моделі і точності апроксимації. Незважаючи на різні аналітичні моделі, що були запропоновані, дуже мало які з них можуть задовільнити одразу обидві вимоги в один і той самий час.

У роботі запропонована досить ефективна, відносно похибки наближення, апроксимація розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом склейки [2], методами середнього та середньоквадратичного наближення функції інтенсивності, та проведенно порівняння даної технології з апроксимацією сумішшю експоненційних розподілів, методом серднькоквадратичного наближення функцій розподілів та методом моментів. Наведені деякі обчислювальні процедури знаходження параметрів сплайн-експоненційного розподілу та загальна схема апроксимації функції інтенсивності та апроксимації розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом.

**Постановка задачі.** Провести апроксимацію розподілу Вейбулла сумішшю двох експоненційних розподілів та сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом. Подати порівняльний аналіз якості апроксимаційних методів та надати висновки про адекватність застосованих апроксимацій залежно від параметрів розподілу Вейбулла.

**Основний матеріал.** ***Апроксимація розподілу Вейбулла сумішшю експоненційних розподілів.*** Тонгдан Жин та Лакшман Гонигунта запропонували апроксимацію функції розподілу Вейбулла, яка базується на суміші двох експоненційних функцій розподілів.

Для двопараметричного розподілу Вейбулла функція розподілу має вигляд:

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t^{\beta}}{\alpha}\right), \qquad (1)$$

використовується фукнція R(t)=1-F(t), для випадків коли параметр форми β≤1 та 1<β.

Представлення функції *R(t)* при 0 <$\beta$ <1 є комбінацією двох експоненційних функції та має наступний вигляд:

$$R_a(t) = c\exp(-\frac{t}{\lambda_1}) + (1-c)\exp(-\frac{t}{\lambda_2}). \qquad (2)$$

Для мінімізації похибки наближення між моделлю сумішей $R_a(t)$ та *R(t)* застосовано два методи знаходження параметрів *c*, $\lambda_1$ і $\lambda_2$: метод середньоквадратичного наближення та метод моментів.

Середньоквадратичне наближення полягає в формулюванні оптимізіційної задачі наступного вигляду:

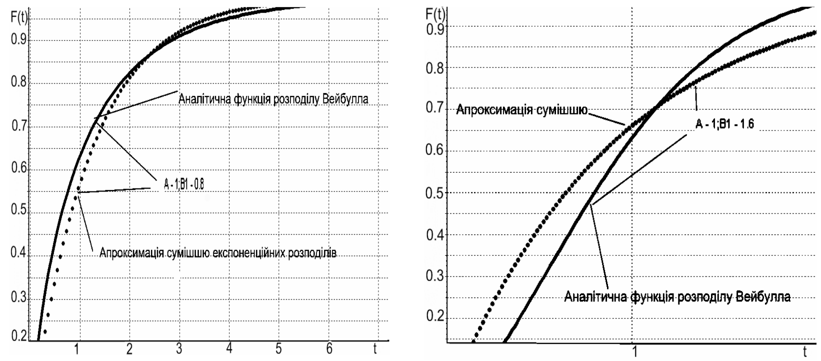
$$\min_{c,\lambda_1,\lambda_2} g(c,\lambda_1,\lambda_2) = \\ = \min_{c,\lambda_1,\lambda_2}\left[\int_0^{\infty}(\exp\left(-\frac{t^{\beta}}{\alpha}\right) - c\exp(-\frac{t}{\lambda_1}) - (1-c)\exp(-\frac{t}{\lambda_2})^2 dt\right]. \qquad (3)$$

Оскільки функція надійності Вейбулла не має скінченної форми при інтегруванні, тому задачу можна переформулювати у дискретному вигляді ($t \in [0,\infty] \to t \in [0,T]$):

$$\min_{c,\lambda_1,\lambda_2} g_m\{c,\lambda_1,\lambda_2\} = \\ = \min_{c,\lambda_1,\lambda_2}\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\exp\left(-\frac{t_i^{\beta}}{\alpha}\right) - c\exp(-\frac{t_i}{\lambda_1}) - (1-c)\exp(-\frac{t_i}{\lambda_2}))^2\right]. \qquad (4)$$








а) б)

**Рис. 1. Апроксимація функції розподілу Вейбулла сумішшю експоненційних розподілів за методом середньоквадратичного наближення при $\beta < 1$ (а) та $\beta > 1$ (б)**

Для знаходження параметрів апроксимації c, $\lambda_1$, $\lambda_2$ використовуються градієнтні методи, так на рис. 1. зображені результати проведення апроксимації функції розподілу Вейбулла сумішшю експоненційних розподілів за методом середньоквадратичного наближення при $\beta < 1$ (рис. 1, а) та $\beta > 1$ (рис. 1, б).

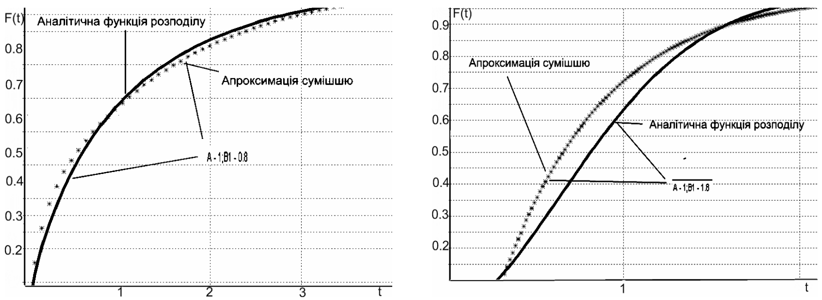
Використання методу моментів для отримання параметрів c, $\lambda_1$ і $\lambda_2$ полягає у прирівнюванні перших трьох моментів моделі суміші до перших трьох моментів розподілу Вейбулла.

У результаті отримуємо систему нелінійних рівнянь відносно трьох невідомих c, $\lambda_1$ і $\lambda_2$:

$$\begin{cases} c\lambda_1 + (1-c)\lambda_2 = m_1 \\ 2\left[c\lambda_1^2 + (1-c)\lambda_2^2\right] = m_2 \\ 6\left[c\lambda_1^3 + (1-c)\lambda_2^3\right] = m_3 \end{cases} \qquad (5)$$

Для розв’язку системи (5) використовуються чисельні методи. На рис. 2. зображені результати апроксимації функції розподілу Вейбулла сумішшю експоненційних розподілів за методом моментів при $\beta < 1$ (рис. 2, а) та $\beta > 1$ (рис. 2, б).

Похибки апроксимації побудованих функцій розподілів відносно аналітичної функції розподілу Вейбулла [3] для обох методів приведені у таблиці 1, коли $\beta$ змінюється від 0.4 до 0.8 та від 1.8 до 2.1. Без обмеження загальної спільності, параметр Вейбулла α масштабування можна вважати рівним 1. Значення точок $t_i$ обрані шляхом імітаційного моделювання. В [1] рекомендується вибирати максимальний час таким, щоб $R(t_m) \le 0{,}05$, або, іншими словами, функція повинна охоплювати щонайменше 95 % від реального діапазону надійності.




а) б)

**Рис. 2. Апроксимація функції розподілу Вейбулла сумішшю експоненційних розподілів за методом моментів при $\beta < 1$ (а) та $\beta > 1$ (б)**

*Таблиця 1*

**Похибки апроксимації розподілу Вейбулла сумішшю експоненційних розподілів**

| $\beta$ | Похибка g(c, $\lambda_1$ і $\lambda_2$), % (метод середньоквадратичного наближення) | Похибка $g_m$(c, $\lambda_1$ і $\lambda_2$), % (метод моментів) |
|---|---|---|
| 0.4 | 0.78 | 0.91 |
| 0.5 | 0.82 | 0.93 |
| 0.6 | 0.92 | 1.1 |
| 0.7 | 1.3 | 1.7 |
| 0.8 | 1.2 | 1.5 |
| 1.8 | 47 | 260 |
| 1.9 | 60 | 350 |
| 2.0 | 110 | 120 |
| 2.1 | 90 | 100 |

З результатів таблиці 2 можна зробити висновок про те, що похибка наближення для обох методів збільшується при збільшенні значення $\beta$. Отже при $\beta > 1$ використання апроксимації на основі сумішей є недоцільним.

У [1] було доведено, що з двох вище вказаних методів апроксимації сумішшю експоненційних розподілів є більш еффективним метод сереедньоквадратичного наближення.





***Апроксимації розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом.*** Технологія, яка пропонується, базується на апроксимації функції інтенсивності розподілу Вейбулла кусково-сталими функціями інтенсивності сплайн-експоненційного розподілу з одним вузлом [2]:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda_1 \exp(-\lambda_1 t), 0 < t \le t_0 \\ \lambda_2 \exp[-(\lambda_1 - \lambda_2)t_0 - \lambda_2 t], t_0 < t < \infty \end{cases}. \qquad (6)$$

Задача аппроксимації неперервної функції інтенсивності переходів у середньому представляє собою задачу найкращого наближення розподілу функції λ(x) з вагою p(x) ступінчатою функцією $c(x)$. На заданному розбитті $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \dots x_n \le x_{n+1} = b$ $c(x) = c_i(x) = c_i$, при $x_{i-1} \le x < x_i$.

Міра близькості f(x) і c(x) на (a,b) визначається як

$$\delta_a^b = \delta_a^b\left(|\lambda - c|\right) = \int_a^b p(x)\left|\lambda(x) - c(x)\right| dx. \qquad (7)$$

Задача наближення складається в найкращому виборі вузлів $x_1$, $x_2$, ...$x_n$, які знаходять за результатом вирішення задачі мінімізації:

$$\min_{a \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le b} \delta_a^b\left(|\lambda - c|\right), \qquad (8)$$

при цьому функція $c_i(x)$ залежить від $x_{i-1}$ *и* $x_i$. Якщо $x_{i-1}$ *и* $x_i$ фіксовані, то $c_i(x)$ визначається з рішення локальної задачі

$$\min_{c_i(x) \in R_i} \delta_{x_{i-1}}^{x_i}\left(|\lambda - c|\right). \qquad (9)$$

Таким чином, рішення загальної задачі мінімізації (8) зведено до багатократного рішення локальних задач (9) на інтервалі з кінцями, які варіруються.

Нехай функція λ($t$) з вагою $p(t)$=1 наближується на інтервалі (0,t) кусковою функцією, складеною з (k+1) кусків $c_1(t)$,…, $c_k(t)$, $c_{k+1}(t)$ з вузлами $t_1$, …, $t_k$. Похибка наближення у средньому візначається

$$R_k(t_1, t_2, \dots, t_k) = \sum_{i=1}^{k} \delta_{t_{i-1}}^{t_i}. \qquad (10)$$

Обозначимо через $t_1^{(k)}$, $t_2^{(k)}$, …, $t_k^{(k)}$ той набір $t_1$, $t_2$, …$t_k$, при якому функція (10) досягає мінімуму. Тоді рішення загальної задачі мінімізації (8) визначається набором $t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, \dots, t_k^{(k)}$.

Нехай

$$R_{k+1}(t)=R\left(t_1^{(k)}(t),t_2^{(k)}(t),\ldots,t_k^{(k)}(t),t\right)=\min_{t_1,t_2,\ldots,t_k} R(t_1,t_2,\ldots,t_k,t). \qquad (11)$$

Додавання нового куска функції призводить до необхідності вибору найкращим чином вузла склеювання цього куска з попереднім. Для рішення цієї задачі запишемо рекуррентні співвідношення, які витікають з принципу динамічного програмування

$$R_{k+1}(t)=\min_{0\le y\le t}\left\{R_k(y)+\int_y^t\left|\lambda(u)-c_{k+1}(u)\right|du\right\}, k=\overline{1,n},\ k=\overline{1,n}, \qquad (12)$$

де $R_1(y)=\int_0^y|\,\lambda(u)-c_1(u)\,|\,du\cdot$ (13)

Значення $t_k^{(k)}(t)$ дорівнює тому значенню змінної $y$, при якому досягається мінімума виразу в правій частині k-го співвідношення (11) или (12).

Реалізуючи функції $t_k^{(k)}(t)$ , $1\le k<n$ і рівність

$$t_k^{*}=t_k^{(k)}(t_{k+1}^{*}),\quad 1\le k<n$$

отримуємо рішення задачі наближення у середньому.

На практиці число вузлів склеювання кусочно-постійної функції скінченно. У цьому випадку алгоритм наближення представляється аналітичними залежностями для відповідного скінченного числа вузлів.

Фіксуються дві точки x та y, які належать інтервалу (0,b), і $\tau\in(x,y)$. З (12) і (13), загальний вигляд $c_i$ знаходиться з рішення локальної задачі

$$\begin{aligned}R_1(y)&=\min_c\int_x^y\left|\lambda(u)-c\right|du=\min_\tau\left[-\int_x^\tau(\lambda(u)-\lambda(\tau))du+\int_\tau^y(\lambda(u)-\lambda(\tau))du\right]=\\&=\min_\tau\left[-\int_x^\tau\lambda(u)du+\int_x^\tau\lambda(\tau)du+2\lambda(\tau)(2\tau-x-y)\right].\end{aligned} \qquad (14)$$

Мінімальне значення $R_1(y)$ для $\tau\in(x,y)$ досягається за умови $\tau=\dfrac{x+y}{2}$. Враховуючи, що $\tau\in(x,y)$, на першому кроці $c$ визначається з формули $c=\lambda(\tau)=\lambda\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$. Розширивши інтервал наближення *(x,y)* до інтервалу (0,b), отримаємо





$$\lambda_1=c_1=\lambda\left(\frac{b}{2}\right).$$

Похибка першого наближення $R_1^0(y)$ з врахуавнням $\lambda(\tau)=\lambda\left(\dfrac{y}{2}\right)$

$$R_1^0(y)=\int_0^y\left|\lambda(u)-\lambda\left(\frac{y}{2}\right)\right|du=-\int_0^{y/2}\lambda(u)du+\int_{y/2}^y\lambda(u)du. \qquad (15)$$

При $y=b$ з формули (12) $R_1^0=R_1^0(b)$ на всьому інтервалі.

На другому кроці вузол склеювання визначається таким чином, щоби похибка наближення була мінімальною. Нехай $y$ – вузол склеювання, а $z$ – довільна змінна. При цьому $0<y<z$, частково $z=b$. Згідно з (12) похибка другого наближення має вигляд

$$\begin{aligned}R_2(z)&=\min_{0\le y\le z}\left\{R_1^0(y)+\int_y^z\left|\lambda(u)-\lambda\left(\frac{y+z}{2}\right)\right|du\right\}=\\&=-\int_0^{y/2}\lambda(u)du+\int_{y/2}^y\lambda(u)du-\int_y^{(y+z)/2}\lambda(u)du+\int_{(y+z)/2}^z\lambda(u)du.\end{aligned} \qquad (16)$$

Похибка $R_2(z)$ мінімальна за умови

$$2\lambda(y)-\lambda\left(\frac{y}{2}\right)-\lambda\left(\frac{y+z}{2}\right)=0. \qquad (17)$$

Нехай рішення рівняння (17) має вигляд $y=r_2^0(z)$, тоді вузол склеювання кусочно-постійної функції $t_0$ і значення $\lambda_1,\lambda_2$ визначаються як

$$t_0=r_2^0(b), \qquad (18)$$

$$\lambda_1=c_1=\lambda\left(\frac{t_0}{2}\right)=\lambda\left(\frac{r_2^0(b)}{2}\right),\ при\ t\le t_0; \qquad (19)$$

$$\lambda_2=c_2=\lambda\left(\frac{t_0+b}{2}\right)=\lambda\left(\frac{r_2^0(b)+b}{2}\right),\ при\ t>t_0. \qquad (20)$$

Похибка другого наближення $R_2^0(y)$ має вигляд:

$$R_2^0(y)=-\int_0^{\frac{r_2^0(y)}{2}}\lambda(u)du+\int_{\frac{r_2^0(y)}{2}}^{r_2^0(y)}\lambda(u)du-\int_{r_2^0(y)}^{\frac{r_2^0(y)+y}{2}}\lambda(u)du+\int_{\frac{r_2^0(y)+y}{2}}^{y}\lambda(u)du. \qquad (21)$$

При y=b з формули (17) $R_2^0 = R_2^0(b)$ на всьому інтервалі.

Параметри сплайн-експоненційного розподілу з одним вузлом, який апроксимує розподіл Вейбулла, визначаються формулами:

$$t_0 = \frac{b}{A};\ \lambda_1 = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right)^{\beta-1} A^{1-\beta} = A^{1-\beta}\lambda;$$
$$\lambda_1 = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right)^{\beta-1} A^{1-\beta}\left(2^{\beta}-1\right) = \left(2^{\beta}-1\right)A^{1-\beta}\lambda. \qquad (22)$$

$$b =' [-\alpha \ln \lambda]^{1/\beta},$$

де $\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha} t^{\beta-1}$ функція інтенсивності двопараметричного розподілу Вейбулла.

Похибка апроксимації наближення в середньому визначається як:

$$R_2^0 \frac{b\beta}{\alpha}\left(1 + \frac{2^{\beta} - 1 - \left(2^{\beta}-1\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}}{2^{\beta-1}A^{\beta}}\right) \quad . \qquad (23)$$

Загальна постановка задачі наближення у средньоквадратичному формулюється наступним чином. Нехай на деякому інтервалі (a,b) з ваговою функцією *p(x)* визначена функція *λ(x)*, яка аппроксимується ступінчатою функцією *c(x)*. На заданому розбитті $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots x_n \le x_{n+1} = b$ $c(x) = c_i(x) = c_i$, при $x_{i-1} \le x < x_i$.

Міра близькості $\lambda(x)$ і $c(x)$ на (a,b) визначається як

$$\delta_a^b = \delta_a^b\left([\lambda - c]^2\right) = \int_a^b p(x)[\lambda(x) - c(x)]^2\,dx\,. \qquad (24)$$

Задача наближення визначається в найкращому виборі вузлів $x_1$, $x_2$, …$x_n$,, які знаходяться з рішення задачі мінімізації

$$\min_{a \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le b} \delta_a^b\left([\lambda - c]^2\right).$$

При цьому функція $c_i(x)$ залежить від $x_{i-1}$.та $x_i$. Якщо $x_{i-1}$.та $x_i$ фіксовані, то $c_i(x)$ визначається з рішення локальної задачі

$$\min_{c_i(x) \in R_i} \delta_{x_{i-1}}^{x_i}\left([\lambda - c]^2\right).$$

У випадку, коли $\lambda(x)$ з вагою $p(t)$=1, на інтервалі (0,*t*) задача наближення у средньоквадратичному представляє знаходження





похибки

$$R_k(t_1, t_2, \ldots, t_k) = \sum_{i=1}^{k} \delta_{t_{i-1}}^{t_i}\,, \qquad (25)$$

де $\delta_{t_{i-1}}^{t_i} = \delta_{t_{i-1}}^{t_i}\left([\lambda(t) - c_i]^2\right) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\lambda(t) - c_i(x)]^2\,dt$ , $t_1$, $t_2$, …$t_k$ – вузли, де k є заданим.

Нехай $t_1^{(k)}$, $t_2^{(k)}$, …, $t_k^{(k)}$ той набір $t_1$, $t_2$, …, $t_k$, при якому функція (25) досягає мінімуму. Тоді рішення задачі загальної мінімізації зводиться до реалізації обчислювальної схеми, яка забеспечує вибір вузлів $t_i^{(k)}$ з рекурентних співвідношень

$$R_{k+1}(t) = \min_{a \le y \le t}\left\{R_k(y) + \int_y^t [\lambda(u) - c_{k+1}(u)]^2\,du\right\}, k = \overline{1,n}\,,\ k = \overline{1,n}\,, \qquad (26)$$

де $R_1(y) = \int_0^y p(u)[\lambda(u) - c_1(u)]^2\,du\,.$ (27)

Загальний вигляд $c_i$ знаходиться з рішення локальної задачі мінімізації. Для цього фіксуються дві точки x та y (x<y), які належать інтервалу (0,b), та записується умова

$$\min_c \int_x^y [\lambda(u) - c]^2\,du\,,$$

яка еквівалентна рішенню рівнення $\left[\int_x^y [\lambda(u) - c]^2\,du\right]_c' = 0\,.$

З цього рівняння маємо:

$$c = \frac{\int_x^y \lambda(u)du}{y - x}\,. \qquad (28)$$

На першому кроці обчислювальної схеми отримаємо параметр аппроксимуючого экспоненційного розподілу

$$\lambda_1 = c_1 = \frac{1}{b}\int_0^b \lambda(u)du = -\frac{1}{b}\ln(1 - F(b))$$

і похибку першого наближення

$$R_1^0(y) = \int_0^y [\lambda(t) - c_1]^2\,dt = \int_0^y\left[\lambda(u) - \frac{1}{y}\int_0^y \lambda(t)dt\right]^2 du\,. \qquad (29)$$

При y=b з формули (29) визначається похибка першого наближення $R_1^0 = R_1^0(b)$ на всьому інтервалі.

Реалізація другого кроку обчислювальної схеми (26), (27) еквівалентна знаходженню y – вузла склеювання і значень $c_1$ і $c_2$. При цьому 0<y<z , де z – довільна змінна, зокрема z=b. Похибка другого наближення, яка мінімізується, має вигляд

$$R_2(z) = \min_{0<y<z}\left\{ R_1(y) + \int_y^z \left[ \lambda(u) - \frac{1}{z-y}\int_y^z \lambda(t)dt \right]^2 du \right\}.$$

Мінімум $R_2(z)$ досягається при виконанні умов:

$$\left[\lambda(y) - \frac{1}{y}\int_0^y \lambda(t)\,dt\right]^2 - \left[\lambda(y) - \frac{1}{z-y}\int_y^z \lambda(t)\,dt\right]^2 -$$

$$-\frac{2}{y^2}\left(y\lambda(y) - \int_0^y \lambda(t)\,dt\right)\int_0^y \left[\lambda(u) - \frac{1}{y}\int_0^y \lambda(t)\,dt\right]^2 du - \qquad (30)$$

$$-\frac{2}{(z-y)^2}\left(-(z-y)\lambda(y) - \int_y^z \lambda(t)dt\right)\int_y^z \left(\lambda(u) - \frac{1}{z-y}\int_y^z \lambda(t)dt\right) du = 0.$$

Враховуючи, що

$$\int_0^y \left(\lambda(u) - \frac{1}{y}\int_0^y \lambda(t)dt\right) du = 0, \quad \int_y^z \left(\lambda(u) - \frac{1}{z-y}\int_y^z \lambda(t)dt\right) du = 0,$$

рівняння (30) буде мати вигляд

$$\left(-\frac{1}{y}\int_0^y \lambda(t)dt + \frac{1}{z-y}\int_y^z \lambda(t)dt\right)\left(2\lambda(y) - \frac{1}{y}\int_0^y \lambda(t)\,dt - \frac{1}{z-y}\int_y^z \lambda(t)dt\right) = 0,$$

що еквівалентно системі рівнянь

$$-\frac{1}{y}\int_0^y \lambda(t)dt + \frac{1}{z-y}\int_y^z \lambda(t)dt = 0,$$

$$2\lambda(y) - \frac{1}{y}\int_0^y \lambda(t)dt - \frac{1}{z-y}\int_y^z \lambda(t)dt = 0. \qquad (31)$$

Перша рівність цієї системи виключається, тому що вона виконується тільки при y=z=b, а за умовою 0<y<b. Для наступного аналізу використовується рівняння

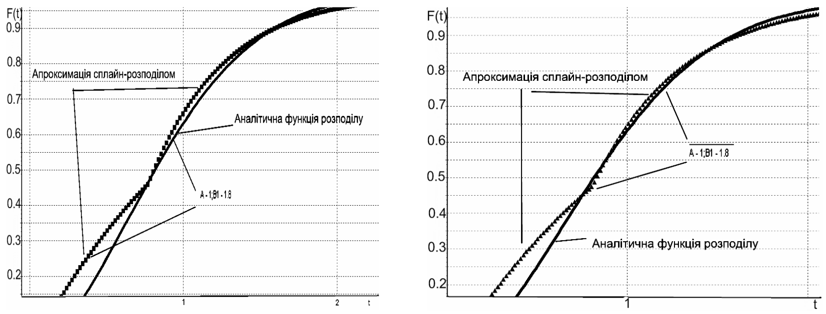
$$2\lambda(y) - \frac{1}{y}\int_0^y \lambda(t)dt - \frac{1}{z-y}\int_y^z \lambda(t)dt = 0,$$

або





$$2\lambda(y) + \frac{\ln(1-F(y))}{y} - \frac{\dfrac{\ln(1-F(y))}{\ln(1-F(z))}}{z-y} = 0. \qquad (32)$$




**а) б)**

**Рис. 3. Апроксимація функції розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом за методами середньоквадратичного (а) та середнього (б)**

Нехай рішення рівняння (33) представимо у вигляді $y = r_2^0(z)$, тоді вузол склеювання кусочно-постійної функції $t_0$ визначається як

$$t_0 = r_2^0(b),$$

а значення $\lambda_1$, $\lambda_2$ згідно (28)

$$\lambda_1 = c_1 = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} \lambda(t)dt = \frac{1}{r_2^0(b)}\int_0^{r_2^0(b)} \lambda(t)dt = -\frac{1}{r_2^0(b)}\ln\left(1 - F\left(r_2^0(b)\right)\right), \ при\ t \le t_0,$$

$$\lambda_1 = c_1 = \frac{1}{t_0}\int_{t_0}^b \lambda(t)dt = \frac{1}{b - r_2^0(b)}\int_{r_2^0(b)}^b \lambda(t)dt = -\frac{1}{b - r_2^0(b)}\ln\frac{1 - F\left(r_2^0(b)\right)}{1 - F(b)}, при\ t > t_0.$$

Похибка другого наближення $R_2^0(y)$, визначається у вигляді:

$$R_2^0(y) = \int_0^{r_2^0} \left(\lambda(u) - \frac{1}{r_2^0(y)}\int_0^{r_2^0(y)} \lambda(t)dt\right)^2 du + \int_{r_2^0(y)}^y \left(\lambda(u) - \frac{1}{y - r_2^0(y)}\int_{r_2^0(y)}^y \lambda(t)dt\right)^2 du.$$

При y=b за формулою (30) визначається похибка другого наближення $R_2^0 = R_2^0(b)$ на всьому інтервалі.

Значення параметрів $\lambda_1$, $\lambda_2$ визначаються за формулами:

$$\lambda_1 = \frac{t_0^{\beta-1}}{\alpha}; \lambda_2 = \frac{1}{(b-t_0)\alpha}\left(b^\beta - t_0^\beta\right). \tag{33}$$

Похибка другоого наближення обчислюється за формулою:

$$R_2^0 = \int_0^{t_0}\left(\lambda(t)-\lambda_1\right)^2 dt + \int_{t_0}^{b}\left(\lambda(t)-\lambda_2\right)^2 =$$

$$= \frac{\beta^2 b^{2\beta-1}}{\alpha^2(2\beta-1)} + \frac{t_0^{2\beta-1}}{\alpha^2} - \frac{\left(b^\beta - t_0^\beta\right)^2}{\alpha^2} = \tag{34}$$

$$= \frac{\beta^2 b^{2\beta-1}}{\alpha^2(2\beta-1)} - \lambda_1^2 t_0 - \lambda_2^2 (b-t_0).$$

Обидва методи мінімізації дають адекватні апроксимації розподілу Вейбулла не тільки для розподілів із параметрами $0 \le \beta < 1$, але й для розподілів з $\beta > 1$ (на рис. 3 представлені результати апроксимації функції розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом за методами середньоквадратичного (рис. 3, а) та середнього (рис. 3, б)).

*Таблиця 2*

**Похибки апроксимації розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом**

| β | Похибка апроксимації, % (метод середньоквадратичного наближення) | Похибка апроксимації, % (метод наближення середнім) |
|---|---|---|
| 0.4 | 7 | 11 |
| 0.5 | 7.7 | 5.3 |
| 0.6 | 21 | 18 |
| 0.7 | 40 | 37 |
| 0.8 | 14 | 14 |
| 1.8 | 27 | 27 |
| 1.9 | 32 | 32 |
| 2.0 | 53 | 53 |
| 2.1 | 37 | 36 |

Результати таблиці 2 приводять похибки апроксимації сплайн-експоненційним розподілом у порівнянні з аналітичною функцією розподілу для $\beta$ від 0.4 до 0.8 та від 1.8 до 2.1 [3].

**Висновки.** Розглянута технологія та проведено порівняльний аналіз знаходження апроксимації функції розподілу Вейбулла





сумішшю двох експоненційних розподілів та сплайн-експоненційним розподілом з одним вузлом.

Проведений аналіз апроксимації розподілу Вейбулла двома вище зазначеними технологіями показав, що апроксимація сумішшю експоненційних розподілів є ефективною лише для розподілів Вейбулла з параметрами форми $\beta$ від 0.5 до 1.

Запропонований метод апроксимації розподілу Вейбулла сплайн-експоненційним розподілом є більш універсальним, оскільки дозволяє побудову процедур апроксимації для будь-яких значень параметрів $\beta$, незначною мірою поступаючись при цьому точністю апроксимації на базі сумішей експоненційних розподілів при $\beta$ від 0.5 до 1.

## Бібліографічні посилання

1. **Jin Tongdan,** Gonigunta Lakshmana S 'Exponential approximation to Weibull renewal with decreasing failure rate'. – Journal of Statistical Computation and Simulation, V. 00, №. 0, 2009. – P. 1–13

T

2. **Байбуз О.Г.** Сплайны в надежности / О.Г. Байбуз, А.Ф. Приставка. – Д., 2003. – 256 с.

3. **Вайнштейн В.И.** Представление N-кратных сверток функций распределения в виде рядов и нахождение функции восстановления для некоторых моделей процессов восстановления. / В.И. Вайнштейн // Исследовано в России.– 2005. – Т. 8. – С. 486-496.

*Надійшла до редколегії 25.05.10*