УДК 519.816:519.237.8

Т.Г. Ємел'яненко, Л.В. Крюк

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ ТЕХНОГЕННО НАВАНТАЖЕНИХ ТЕРИТОРІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ БАЙЄСОВСЬКОГО ПІДХОДУ

Запропоновано використовувати байєсовський підхід для побудови прогнозу часового ряду за даними гідрохімічного моніторингу на територіях гірничо-збагачувальних комбінатів.

Ключові слова: *Байєсовський підхід, прогнозування, часовий ряд, гідрохімічний моніторинг.*

Предложено использовать байесовский подход для построения прогноза временного ряда по данным гидрохимического мониторинга на территориях горно-обогатительных комбинатов.

Ключевые слова: *байесовский подход, прогнозирование, временной ряд, гидрохимический мониторинг.*

Bayesian approach for forecasting time series data of hydrochemical monitoring in areas of mining and processing enterprises were proposed for usage.

Keywords: *Bayesian approach, forecasting, time series, hydrochemical monitoring.*

Вступ. Стан територій гірничо-збагачувальних комбінатів (ГЗК) вимагає ведення постійного моніторингу та прогнозування стану техногенних об'єктів. Використання адаптивного підходу під час побудови прогнозної моделі забезпечує досить якісні результати, а сама побудована модель є простою та гнучкою, оскільки вона постійно пристосовується та враховує ці зміни. Байєсовський підхід дозволяє відобразити в моделі зміни випадкового характеру.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Використанню байєсовського підходу присвячена значна кількість робіт. У [1] розглядається прогнозування з використанням байєсовського підходу на базі моделі Хольта-Уінтерса, результати роботи розглянутої процедури проілюстровано на даних завантаженості готелей трьох провінцій Іспанії. [2] присвячена використанню байєсовської моделі середнього під час прогнозування індексу інфляції у Швеції з використанням набору індикаторів. Докладний опис прогнозування за

допомогою байєсовської моделі середнього наводиться в [3; 4]. Проте більшість робіт присвячена використанню байєсовського підходу для прогнозування економічних процесів, інтерес представляє можливість його застосування до прогнозування гідрогеохімічних процесів.

Постановка задачі. Задано часовий ряд u_t, $t=\overline{1,N}$, що містить інформацію про концентрацію хімічної речовини у пробах грунтових вод на техногенно навантажених територіях гірничо-збагачувальних комбінатів (ГЗК). Необхідно побудувати прогноз, тобто побудувати продовження часового ряду у вигляді

$$u_t, \quad t=\overline{1,N+l},$$

де l – довжина прогнозу.

Основний матеріал. В основі байєсовського підходу до прогнозування лежить гіпотеза, що досліджуваний часовий ряд генерується не однією, а декількома простими імовірнісними моделями почергово. Тобто потрібно побудувати модель з множиною станів. Будемо розрізняти чотири стани процесу, а саме:

– відсутність змін;
– східчасті зміни;
– зміни в коефіцієнті лінійного росту;
– випадкове імпульсне відхилення.

Позначимо P_j – ймовірність знаходження в j-му стані, $j=\overline{1,4}$. Прогноз будемо будувати з використанням адаптивної моделі [4]:

$$u_t = a_{1,t} f_t + \varepsilon_t,$$

$$a_{1,t} = a_{1,t-1} + a_{2,t} + \xi_t,$$

$$a_{2,t} = a_{2,t-1} + \nu_t,$$

де ε_t – шум; u_t – зміна рівня; v_t – зміна коефіцієнта лінійного росту.

Тоді, якщо в момент t система знаходиться в j-му стані, випадкові компоненти ε_t, u_t, v_t генеруються процесами:

$$\varepsilon_t \sim N(0, D_\varepsilon^{(j)}),$$

$$\xi_t \sim N(0, D_\xi^{(j)}),$$

$$v_t \sim N(0, D_v^{(j)}).$$

Характеристики дисперсій цих процесів наведені в табл. 1 [4].

Значення параметрів $a_{1,t}$, $a_{2,t}$ для генеруючого процесу невідомі і на них впливають неперервні збурення. Тому вивчаються закони розподілу значень $a_{1,t}$, $a_{2,t}$ і їх зміна під час надходження кожного нового значення часового ряду. При такому підході подія, що має випадковий характер, відображується в моделі. А нові дані використовуються для підрахунку апостеріорних ймовірностей та аналізу ситуацій.

Таблиця 1

Характеристики дисперсій процесів

Стан	D_ε	D_ξ	D_ν
Зміни відсутні	нормальна	ноль	ноль
Східчасті зміни	нормальна	велика	ноль
Зміни коефіцієнта лінійного росту	нормальна	ноль	велика
Випадкове імпульсне відхилення	велика	ноль	ноль

Таблиця 2

Рекомендовані значення параметрів ($k = 4$ – кількість станів) [5]

Стан	Ймовірність P_j	R_ε	R_u	R_ν
Зміни відсутні	0,900	1	0	0
Східчасті зміни	0,003	1	100	0
Зміни коефіцієнта лінійного росту	0,003	1	0	1
Випадкове імпульсне відхилення	0,094	101	0	0

Розглянемо двовимірні нормальні розподіли $p(a_1, a_2)$ і введемо такі позначення першого і другого моментів:

$$\bar{a}_1 = M\{a_1\};$$

$$\bar{a}_2 = M\{a_2\};$$

$$m(a_1, a_1) = M\left\{(a_1 - \bar{a}_1)^2\right\};$$

$$m(a_1, a_2) = M\{(a_1 - \bar{a}_1)(a_2 - \bar{a}_2)\};$$

$$\bar{\theta} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, m(a_1, a_1), m(a_1, a_2), m(a_2, a_2)\}.$$

Індекси при $\bar{\theta}$ відносяться до всіх його компонент:

$$\bar{\theta}_t^{(i,j)} = \{\bar{a}_{1,t}^{(i,j)}, \bar{a}_{2,t}^{(i,j)}, m_t^{(i,j)}(a_1, a_1), m_t^{(i,j)}(a_1, a_2), m_t^{(i,j)}(a_2, a_2)\}.$$

Запис $(a_1, a_2) \sim N(\bar{\theta})$ означає, що пара величин (a_1, a_2) має сумісний двовимірний нормальний розподіл з параметрами $\bar{\theta}$.

Для позначення суміші k двовимірних нормально розподілених сукупностей з параметрами $\bar{\theta}^{(i)}, i = 1, ..., k$, будемо використовувати запис $(a_1, a_2) \sim \sum_{i=1}^{k} \alpha^{(i)} N(\bar{\theta}^{(i)})$.

Розподіл $(a_{1,t}, a_{2,t})$ – це байєсовський апостеріорний (за відношенням до поточного спостереження u_t) розподіл, будемо позначати $(a_{1,t}, a_{2,t} \mid u_t)$.

Прогноз в байєсовському підході будується по моделі

$$\hat{u}_\tau(t) = \bar{a}_{1,t} f_t + \bar{a}_{2,t} \tau.$$

На основі описаного методу запропоновано алгоритм прогнозування з використанням байєсовського підходу.

Алгоритм 1.

1. Визначають початкові значення параметрів $\bar{\theta}_0$ та основну дисперсію D_0 шляхом оцінювання лінійної регресії за першими N_1 точок часового ряду. Визначають $\alpha_0^{(i)} = P_j$.
2. Отримують спостереження u_{t-1}. Апостеріорний розподіл $(a_{1,t}, a_{2,t} \mid u_t)$ визначається як суміш двовимірних нормальних розподілів

$$(a_{1,t-1}, a_{2,t-1} \mid u_{t-1}) \sim \sum_{i=1}^{k} \alpha_{t-1}^{(i)} N(\bar{\theta}_{t-1}^{(i)}),$$

де $\alpha_{t-1}^{(i)} = P(s_{t-1} = i \mid u_{t-1})$ – ймовірність (апостеріорна за відношенням до u_{t-1}) того, що процес у момент $t-1$ знаходився у стані i;

$\bar{\theta}_{t-1}^{(i)}$ – вектор моментів i-го розподілу, що описує стан i в момент $t-1$.

3. Розглядаються всі можливі переходи процесу з одного стану з іншого при русі від моменту $t-1$ до моменту t та враховуючи ймовірності цих переходів, обчислюють значення апостеріорного розподілу через суміш k^2 двовимірних розподілів

$$(a_{1,t}, a_{2,t} \mid u_t) \sim \sum_{i,j=1}^{k} P_t^{(i,j)} N(\bar{\theta}_t^{(i,j)}),$$

де $\overline{\theta}_t^{(i,j)} = B(\overline{\theta}_{t-1}^{(i)}; D_\varepsilon^{(j)}, D_\xi^{(j)}, D_\nu^{(j)})$, – виражає обчислення байєсовського апостеріорного розподілу в момент часу через моменти апостеріорного розподілу в момент t і дисперсії генеруючого процесу, $P_t^{(i,j)}$ – ймовірність (апостеріорна за відношенням до u_t) того, що процес у момент $t-1$ знаходився у стані i і тепер переходить до стану j.

4. Визначають компоненти вектора $\overline{\theta}_t^{(i,j)}$ наступним чином.

Обчислюють $e_t^i = u_t - (\overline{a}_{1,t-1}^i + \overline{a}_{2,t-1}^i) f_t$, $R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix}$,

де $r_{11} = m_{t-1}^{(i)}(a_1, a_1) + 2m_{t-1}^{(i)}(a_1, a_2) + m_{t-1}^{(i)}(a_2, a_2) + D_\xi^{(j)} + D_\nu^{(j)}$,

$r_{12} = m_{t-1}^{(i)}(a_1, a_2) + m_{t-1}^{(i)}(a_2, a_2) + D_\nu^{(j)}$, $r_{22} = m_{t-1}^{(i)}(a_2, a_2) + D_\nu^{(j)}$.

5. Визначають $D_e = f_t^2 r_{11} + D_\varepsilon^j$, $\alpha_1 = f_t r_{11} / D_e$, $\alpha_2 = f_t r_{12} / D_e$.

6. Параметри спільного апостеріорного розподілу $(a_{1,t}^{(i,j)}, a_{2,t}^{(i,j)})$ в момент t обчислюють за формулами:

$$\overline{a}_{1,t}^{(i,j)} = \overline{a}_{1,t-1}^{(i,j)} + \overline{a}_{2,t-1}^{(i,j)} + \alpha_1 e_t^i,$$

$$\overline{a}_{2,t}^{(i,j)} = \overline{a}_{2,t-1}^{(i,j)} + \alpha_2 e_t^i,$$

$$m_t^{(i,j)}(a_1, a_1) = r_{11} - \alpha_1^2 D_e,$$

$$m_t^{(i,j)}(a_1, a_2) = r_{12} - \alpha_1 \alpha_2 D_e;$$

$$m_t^{(i,j)}(a_2, a_2) = r_{22} - \alpha_2^2 D_e.$$

7. Визначають $P_t^{(i,j)} = P(s_t = j, s_{t-1} = i \mid u_t) =$

$$= Kp(u_t \mid s_t = j, s_{t-1} = i, u_{t-1}) P(s_t = j \mid s_{t-1} = i, u_{t-1}) \times$$

$$\times P(s_{t-1} = i \mid u_{t-1}) = Kp(u_t \mid s_t = j, s_{t-1} = i, u_{t-1}) P_j \alpha_{t-1}^{(i)} =$$

$$= K\sqrt{\frac{1}{2\pi D_e^{(i,j)}}} \exp\left\{\frac{-[u_t - f_t(\overline{a}_{1,t-1}^{(i)} + \overline{a}_{2,t-1}^{(i)})]^2}{2D_e^{(i,j)}}\right\} P_j \alpha_{t-1}^{(i)},$$

$$K = 1/p(u_t \mid u_{t-1}),$$

$$D_e^{(i,j)} = f_t^2 r_{11}^{(i,j)} + D_e^{(j)},$$

де $r_{11}^{(i,j)} = m_{t-1}^{(i)}(a_1, a_1) + 2m_{t-1}^{(i)}(a_1, a_2) + m_{t-1}^{(i)}(a_2, a_2) + D_\xi^{(j)} +$

$+D_\nu^{(j)}$, $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi D_x}} \exp\left[\dfrac{-(x - \overline{x})^2}{2D_x}\right]$.

8. Суміш розподілів з k^2 компонентами стискається в наближено еквівалентний розподіл з k компонентами

$$(a_{1,t}, a_{2,t} \mid u_t) \sim \sum_{j=1}^{k} \alpha_t^{(j)} N(\overline{\theta}_t^{(j)}),$$

де $\alpha_t^{(j)} = \sum_i P_t^{(i,j)}$, а параметри $\overline{\theta}_t^{(j)}$ задаються рівняннями:

$$\overline{a}_{1,t}^{(j)} = \sum_j P_t^{(i,j)} \overline{a}_{1,t}^{(i,j)} / \alpha_t^{(j)},$$

$$\overline{a}_{2,t}^{(j)} = \sum_j P_t^{(i,j)} \overline{a}_{2,t}^{(i,j)} / \alpha_t^{(j)},$$

$$m_t^{(j)}(a_1, a_1) = \sum_j P_t^{(i,j)} [m_t^{(i,j)}(a_1, a_1) + (\overline{a}_{1,t}^{(i,j)} - \overline{a}_{1,t})^2] / \alpha_t^{(j)},$$

$$m_t^{(j)}(a_1, a_2) = \sum_j P_t^{(i,j)} [m_t^{(i,j)}(a_1, a_2) + (\overline{a}_{1,t}^{(i,j)} - \overline{a}_{1,t})(\overline{a}_{2,t}^{(i,j)} - \overline{a}_{2,t})] / \alpha_t^{(j)},$$

$$m_t^{(j)}(a_2, a_2) = \sum_j P_t^{(i,j)} [m_t^{(i,j)}(a_2, a_2) + (\overline{a}_{2,t}^{(i,j)} - \overline{a}_{2,t})^2] / \alpha_t^{(j)}.$$

9. Будують прогноз за формулою

$$\hat{u}_\tau(t) = \overline{a}_{1,t} f_t + \overline{a}_{2,t} \tau,$$

де

$$\overline{a}_{1,t} = \sum_j \alpha_t^{(j)} \overline{a}_{1,t}^{(j)},$$

$$\overline{a}_{2,t} = \sum_j Q_t^{(j)} \overline{a}_{2,t}^{(j)},$$

$$m_t(a_1, a_1) = \sum_j \alpha_t^{(j)} [m_t^{(j)}(a_1, a_1) + (\overline{a}_{1,t}^{(j)} - \overline{a}_{1,t})^2],$$

$$m_t(a_1, a_2) = \sum_j \alpha_t^{(j)} [m_t^{(j)}(a_1, a_2) + (\overline{a}_{1,t}^{(j)} - \overline{a}_{1,t})(\overline{a}_{2,t}^{(j)} - \overline{a}_{2,t})],$$

$$m_t(a_2, a_2) = \sum_j \alpha_t^{(j)} [m_t^{(j)}(a_2, a_2) + (\overline{a}_{2,t}^{(j)} - \overline{a}_{2,t})^2].$$

Реалізація запропонованого алгоритму є складовою частиною розробленого авторами програмного забезпечення. Програмне забезпечення створено у системі візуальної розробки програм JAVA 2.0.

Структурними елементами системи є:

– функціонуюча база даних, яка містить дані замірів концентрації хімічних речовин у пробах підземних вод;

– обчислювальне ядро;

– блок візуалізації даних.

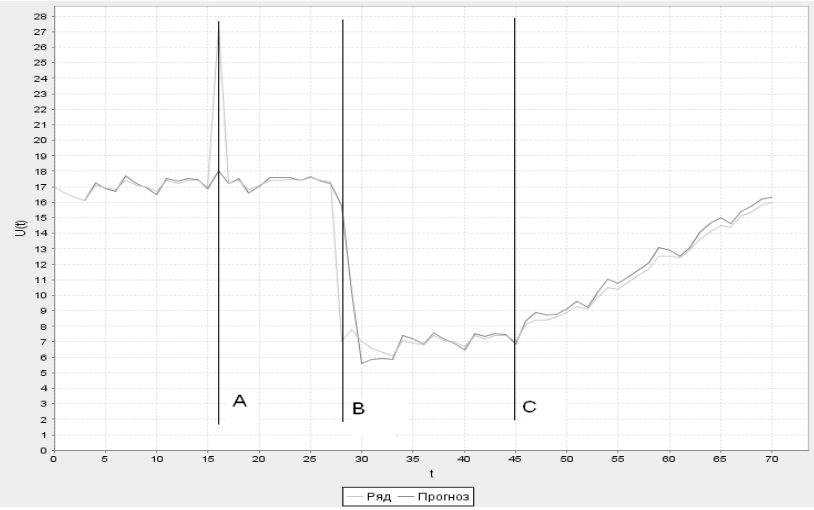

Рис. 1. Результати прогнозування з використанням байєсовського підходу

На рис.1. представлено приклад прогнозування часового ряду на основі байєсовського підходу. У точці А спостерігається випадковий імпульс. Як бачимо, йому система надає малого значення. У точці В відбувається східчаста зміна. Спочатку система обробляє її, як випадковий імпульс (як у точці А). Після отримання наступного спостереження система розуміє, що відбулися зміни. У точці С можна спостерігати зміни в коефіцієнті лінійного росту.

Середня похибка дорівнює 0.533, середньоквадратична – 0.195.

Висновки. Запропоновано використовувати байєсовський підхід під час адаптивного прогнозування гідрогеохімічних процесів. Апробація була виконана на даних гідрогеохімічного моніторингу території Північного ГЗК Криворізького залізорудного басейну. Розглянутий підхід може бути використаний з відповідним корегуванням під час прогнозування сезонних процесів.

Бібліографічні посилання

1. **Bermúdez J.D.** Multivariate exponential smoothing: A Bayesian forecast approach based on simulation / J.D. Bermúdez, A. Corberán-

Vallet, E. Vercher // Mathematics and Computers in Simulation. – 2009. – V. 79, Issue 5. – P. 1761 – 1769.

2. **Jacobson T.** Finding good predictors for inflation: a Bayesian model averaging approach / T. Jacobson, S. Karlsson // Sveriges Riksbank Working Paper Series. – 2002. – № 138 [WWW Document]. URL http://www.riksbank.com/upload/6907/wp_138.pdf.

3. **Hoeting J.A.** Bayesian model averaging: a tutorial / J.A. Hoeting, D. Madigan, C.T. Volinsky // Statistical Science. – 1999. – V. 14. – № 4. – P. 382 – 417.

4. **Лукашин Ю.П.** Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов: учеб. пособие. / Ю.П. Лукашин – М., 2003. – 416 с.

5. **Harisson P.J.** A Bayesian approach to short-term forecasting / P.J. Harisson, C.F. Stevens // Oper. Res. Quart. – 1971. – V. 22. – № 4.

Надійшла до редколегії 05.08.10