УДК 519.652:519.254

П.О.Приставка

Національний авіаційний університет

ПРОЦЕДУРИ НЕБІНАРНОГО *SUBDIVISION* НА ОСНОВІ ЛІНІЙНИХ КОМБІНАЦІЙ В-СПЛАЙНІВ, БЛИЗЬКИХ ДО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ У СЕРЕДНЬОМУ

Запропоновано загальну постановку задачі на проведення небінарного *subdivision* на основі локальних сплайнів, наведено відповідні лінійні оператори, визначено місцезнаходження відліків для проектування числових послідовностей.

Ключові слова: *небінарний subdivision, локальний сплайн, апроксимація, дискретна згортка.*

Предложена общая постановка задачи на проведение небинарного *subdivision* на основе локальных сплайнов, приведены соответствующие линейные операторы, определено метонахождение отсчетов для проектирования числовых последовательностей.

Ключевые слова: *небинарный subdivision, локальный сплайн, аппроксимация, дискретная свертка.*

A general statement of the problem of conducting non-binary *subdivision* from local splines is proposed. The relevant linear operators are given and the location of indications to design numerical sequences is defined.

Key words: *non-binary subdivision, local spline, approximation, discrete compression.*

Постановка проблеми. Стала тенденція до збільшення обсягів даних, що обробляються, на сьогодні є об'єктивною реальністю. Серед інформації, котра зберігається в електронному вигляді є певна категорія даних, які потребують при обробці математичних процедур, що побудовані на основі методів інтерполяції: цифрові зображення та відео, часові ряди та цифрові сигнали, комп'ютерні анімаційні та інші просторові моделі, тощо. Розробники відповідного програмного забезпечення, що працюють з такими даними, давно використовують швидкодіючі процедури, засновані на локальній інтерполяції (типово – *B*-сплайни), проте, є необхідність враховувати потребу у зменшенні кількості обчислювальних операцій при побудові апроксимацій.

Дані, про які мова, в електронному вигляді представлені у вигляді послідовностей відліків (сигналів, тощо), заданих у вузлових точках.

Зміна кількості відліків у послідовностях за довільну кількість раз (необов'язково у цілочисельну) можна забезпечити на основі неперервних інтерполяцій. Але, якщо зміна масштабу послідовності здійснюється на певний наперед відомий коефіцієнт, то в цьому разі для апроксимацій, що мають явний вигляд, можна отримати обчислювальні процедури з меншою обчислювальною складністю, як часткові випадки. Як приклад – *subdivision*-процедури, для котрих отримання нових та вдосконалення алгоритмізації існуючих є задачею актуальною.

Аналіз досліджень та постановка задачі. З точки зору постановки задачі, застосування апроксимацій гладких функцій є спрощенням при виборі методу неперервної апроксимації, придатного для зміни кількості членів цифрових послідовностей. Таке спрощення не є грубим на разі використання методів на основі фінітних функцій, зокрема *B*-сплайнів. Вагомий внесок до фундаментальної розробки апарату апроксимацій на основі *B*-сплайнів внесли І. Шоенберг, К. Де Бор, М. П. Корнійчук, А. О. Лигун [1 – 3] та ін. Теоретичні та практичні дослідження сплайнів на основі *B*-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, подано, наприклад, в [4; 5]. Стосовно останнього типу сплайнів можна відмітити, що вибір в якості апарату апроксимації операторів, що є близькими до інтерполяційних у середньому, обумовлений більш високою стійкістю оцінки наближення за даними, що є різного роду результатами вимірювань та можуть бути використані в якості моделі аналогового сигналу [6].

Нехай з кроком $h>0$ задано розбиття дійсної вісі $\Delta_h : t_i = ih$, $i \in \mathbb{Z}$, у кожній точці якого отримано значення деякої неперервної функції $p(t)$, визначеної на $\mathbb{R}_1(-\infty;\infty)$. Вважаємо, що інформацію про функцію $p(t)$ задано у вузлах розбиття Δ_h у вигляді інтеграла

$$\overline{p}_i = \frac{1}{h}\int_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t)\,dt\,, \qquad (1)$$

при цьому, істинне значення функції $p(t)$ у вузлах таке:

$$p_i = \overline{p}_i + \varepsilon_i\,,\ i \in \mathbb{Z}\,,$$

де ε_i – похибка.

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h, застосовують поліноміальні сплайни, що є близькими до інтерполяційних у середньому на основі *B*-сплайнів другого – п'ятого порядків [4; 5; 7]. Наприклад, сплайн

$$S_{2,1}(p,t) = \sum_{i\in Z}\left(p_i - \frac{1}{6}\Delta^2 p_i\right)B_{2,h}\left(t-(i+0,5)h\right), \qquad (2)$$

де

$$B_{2,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h/2;3h/2], \\ (3+2t/h)^2/8, & t\in[-3h/2;-h/2], \\ 3/4-(2t/h)^2/4, & t\in[-h/2;h/2], \\ (3-2t/h)^2/8, & t\in[h/2;3h/2]; \end{cases}$$

$$\Delta^2 p_i = p_{i-1} - 2p_i + p_{i+1},$$

має високу якість апроксимації, зокрема, при $h\to 0$ для довільної $p(t)\in C^3$ буде виконуватись

$$\left\| p(t) - S_{2,1}(\overline{p},t)\right\| = \frac{h^3}{12\sqrt{3}}\left\|p^{(3)}(t)\right\| + \mathrm{o}\left(h^3\right).$$

З іншого боку, наприклад, для сплайна

$$S_{4,0}(p,t) = \sum_{i\in Z} p_i B_{4,h}\left(t-(i+0,5)h\right), \qquad (3)$$

де

$$B_{4,h}(t) = \begin{cases} 0, & t\notin[-5h/2;5h/2], \\ (t/h+5/2)^4/24, & t\in[-5h/2;-3h/2], \\ \Psi(t/h)-5(t/h+1/2)^4/12, & t\in[-3h/2;-h/2], \\ \Psi(t/h), & t\in[-h/2;h/2], \\ \Psi(t/h)-5(t/h-1/2)^4/12, & t\in[h/2;3h/2], \\ (t/h-5/2)^4/24, & t\in[3h/2;5h/2]; \end{cases}$$

$$\Psi(t) = \frac{115}{192} - \frac{5}{8}t^2 + \frac{1}{4}t^4,$$

притаманна властивість згладжування: при $h\to 0$ для довільної функції $p(t)\in C^2$ справедливо таке:

$$\left\|p(t)-S_{4,0}\left(\overline{p},t\right)\right\|=\frac{h^2}{4}\left\|p''(t)\right\|+\mathrm{o}\left(h^2\right).$$

Отже, при застосуванні того, чи іншого типу сплайна, залежно від потреби, можна отримувати або асимптотично точні оцінки, або ж забезпечувати згладжування локальних осциляцій в даних. При обчисленнях сплайни зручно подавати в явному вигляді, наприклад, вирази (2) та (3) можна записати так:

$$S_{2,1}(p,t)=\frac{1}{48}\Big(-(1-x)^2 p_{i-2}+\left(2-16x+10x^2\right)p_{i-1}+$$
$$+\left(46-18x^2\right)p_i+\left(2+16x+10x^2\right)p_{i+1}-(1+x)^2 p_{i+2}\Big), \qquad (4)$$

$$S_{4,0}(p,t)=\frac{1}{384}\Big((1-x)^4 p_{i-2}+\big(76-88x+24x^2+$$
$$+8x^3-4x^4\big)p_{i-1}+\left(230-60x^2+6x^4\right)p_i+$$
$$+\left(76+88x+24x^2-8x^3-4x^4\right)p_{i+1}+(1+x)^4 p_{i+2}\Big), \qquad (5)$$

де $\quad x=\frac{2}{h}\big(t-(i+0,5)h\big),\ |x|\le 1$.

Перехід від неперервних наближень на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів до процедур *subdivision* викликає практичний інтерес майже протягом останніх тридцяти років. Наприклад у [8] є чимало подібних процедур, при цьому бібліографія складає 180 робіт. Автори [9] започаткували цілу низку публікацій, які пропонують підходи до побудови *subdivision* що базуються на локальних сплайнах на основі *B*-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, наприклад [10]. У [11; 12] отримані лінійні оператори небінарного масштабування одно- та двовимірних послідовностей відліків гладких функцій, які дозволяють здійснювати вказану операцію як з вимогою згладжування, так і асимптотично точно. Проте, загальної постановки задачі для процедур небінарного *subdivision* зроблено не було. Обумовлено це тим, що вибір конкретних часткових випадків локальних сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, потребує автоматизованого визначення вузлів інтерполювання. Тож, це питання потребує узагальнення, що й визначає мету даної публікації.

Виклад основного матеріалу. Нехай у вузлах розбиття

$$\Delta_{h_M}: t_j = jh_M,\ h_M>0$$

задано $P = \{p_{j,\kappa}\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\kappa = 1, 2, \ldots$ – послідовність відліків гладкої функції $p(t)$. Під κ будемо розуміти ітераційний крок небінарного масштабування проектування послідовності P. Тоді, якщо $\{p_{i,\kappa-1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ – початкова послідовність, визначена у вузлах розбиття

$$\Delta_{h_N} : t_i = ih_N \,,\; h_N > 0 \,,$$

а $\{p_{j,\kappa}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ – утворена, шляхом «проектування» будь-яких N послідовних точок в M, то маємо визначення для $p_{j,\kappa}$, наведене нижче.

Для довільного індексу i зафіксуємо N вузлів $\{t_{i+u,\kappa-1}\}_{i\in\mathbb{Z},\, u=\overline{0,N-1}}$ в яких визначено значення $\{p_{i+u,\kappa-1}\}_{i\in\mathbb{Z},\, u=\overline{0,N-1}}$. Суть проектування N точок до M полягає в тому, що на кожній ітерації в межах інтервалу

$$\left[-h_N/2 + ih_N \,,\, ih_N + (N-1)h_N + h_N/2\right]$$

визначаємо нові вузли з рівномірним кроком $h_M > 0$.

На інтервалі

$$\left[-h_M/2 + jh_M \,,\, jh_M + (M-1)h_M + h_M/2\right],$$

де

$$-h_N/2 + ih_N = -h_M/2 + jh_M \,;$$

$$h_M = \frac{N}{M} h_N \,.$$

будемо визначати члени послідовності $P = \{p_{j,\kappa}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ на основі лінійних операторів, що базуються на даних попереднього кроку рекурсії:

$$p_{j+l,\kappa} = A_l\left(p^{\kappa-1,i}\right),\; l = \overline{0, M-1}\,,$$

де $A_l\left(p^{\kappa-1,i}\right)$ неважко отримати як часткові випадки сплайнів на зразок (2), (3).

У загальному випадку для конкретного l знаходимо величини

$$u^* = \frac{N(2l+1)}{2M}\,,\; u = \left[u^*\right], \text{ де } [\bullet] - \text{ ціла частина,}$$

$$x_l = 2\left(u^* - u\right) - 1$$

та підставляємо до явної формули для сплайна, визначеного на розбитті Δ_{h_N} . Наприклад, з виразу (4) отримуємо

$$p_{j+l,\kappa} = \frac{1}{48}\Big(-\left(1 - x_l\right)^2 p_{i+u-2,\kappa-1} + \left(2 - 16x_l + 10x_l^2\right) p_{i+u-1,\kappa-1} +$$

$$+\left(46 - 18x_l^2\right) p_{i+u,\kappa-1} + \left(2 + 16x_l + 10x_l^2\right) p_{i+u+1,\kappa-1} - \left(1 + x_l\right)^2 p_{i+u+2,\kappa-1} \Big). \tag{6}$$

Для зменшення обчислювальної складності пропонується замість формул на зразок (6) використовувати наперед визначені часткові випадки сплайнів при конкретних значеннях аргумента x. Наприклад, при $x_l = 1/3$ вираз (6) перепишеться так:

$$p_{j+l,\kappa} = \frac{1}{108}\left(-p_{i+u-2,\kappa-1} - 5p_{i+u-1,\kappa-1} + 99p_{i+u,\kappa-1} + 19p_{i+u+1,\kappa-1} - 4p_{i+u+2,\kappa-1} \right)$$

або

$$p_{j+l,\kappa} = \sum_{ii=i+u-2}^{i+u+2} \gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{1}{3}\right)\, ii-i+u} \cdot p_{ii,\kappa-1} ,$$

де $\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{1}{3}\right)} = \left(-1 \quad -5 \quad 99 \quad 19 \quad -4\right)^T / 108 .$

Загалом, для часткових випадків локальних поліноміальних сплайнів парних ступенів на основі *B*-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому [4; 5], має місце загальна формула для визначення лінійних операторів небінарного *subdivision*

$$p_{j+l,\kappa} = \sum_{ii=i+u-w}^{i+u+w} \gamma^{(r,v)}_{(x)\, ii-i+u} \cdot p_{ii,\kappa-1} , \tag{7}$$

де $\gamma^{(r,v)}_{(x)}$ – маска оператора дискретної згортки; $2 \cdot w + 1$ – ширина маски; r – порядок сплайна; v – порядок уточнення сплайна; x – часткове значення аргументу в явному поданні сплайну.

Наприклад, для x, що може набувати значення із множини

$$\left\{ -1, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1 \right\}, \tag{8}$$

мають місце такі маски, отримані з часткових випадків виразу (4):

$$\gamma^{(2,1)}_{(-1)} = \left(-1 \quad 7 \quad 7 \quad -1 \quad 0\right)^T / 12 ;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(-\frac{4}{5}\right)} = \left(-81 \quad 530 \quad 862 \quad -110 \quad -1\right)^T \Big/ 1200\,;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(-\frac{3}{4}\right)} = \left(-49 \quad 314 \quad 574 \quad -70 \quad -1\right)^T \Big/ 768\,;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(-\frac{2}{3}\right)} = \left(-25 \quad 154 \quad 342 \quad -38 \quad -1\right)^T \Big/ 432\,;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(-\frac{3}{5}\right)} = \left(-16 \quad 95 \quad 247 \quad -25 \quad -1\right)^T \Big/ 300\,;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \left(-9 \quad 50 \quad 166 \quad -14 \quad -1\right)^T \Big/ 192\,;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(-\frac{2}{5}\right)} = \left(-49 \quad 250 \quad 1078 \quad -70 \quad -9\right)^T \Big/ 1200\,;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(-\frac{1}{3}\right)} = \left(-4 \quad 19 \quad 99 \quad -5 \quad -1\right)^T \Big/ 108\,;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(-\frac{1}{4}\right)} = \left(-25 \quad 106 \quad 718 \quad -22 \quad -9\right)^T \Big/ 768\,;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(-\frac{1}{5}\right)} \left(-9 \quad 35 \quad 283 \quad -5 \quad -4\right)^T \Big/ 300\,;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{(0)} = \left(-1 \quad 2 \quad 46 \quad 2 \quad -1\right)^T \Big/ 48\,;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{1}{5}\right)} = \left(-4 \quad -5 \quad 283 \quad 35 \quad -9\right)^T \Big/ 300\,;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{1}{4}\right)} = \left(-9 \quad -22 \quad 718 \quad 106 \quad -25\right)^T \Big/ 768\,;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{1}{3}\right)} = \left(-1 \quad -5 \quad 99 \quad 19 \quad -4\right)^T \Big/ 108\,;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{2}{5}\right)} = \left(-9 \quad -70 \quad 1078 \quad 250 \quad -49\right)^T \Big/ 1200\,;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(-1 \quad -14 \quad 166 \quad 50 \quad -9\right)^T \Big/ 192\,;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{3}{5}\right)} = \left(-1 \quad 25 \quad 247 \quad 95 \quad -16\right)^T \Big/ 300\,;$$

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{2}{3}\right)} = \left(-1 \quad -38 \quad 342 \quad 154 \quad -25\right)^T \Big/ 432\,;$$

$$\gamma_{\left(\frac{3}{4}\right)}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} -1 & -70 & 574 & 314 & -49 \end{pmatrix}^T \Big/ 768\,;$$

$$\gamma_{\left(\frac{4}{5}\right)}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} -1 & -110 & 862 & 530 & -81 \end{pmatrix}^T \Big/ 1200\,;$$

$$\gamma_{(1)}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 & 7 & -1 \end{pmatrix}^T \Big/ 12\,.$$

Для сплайна (5), коли x може набувати значення із множини (8), мають місце наступні маски:

$$\gamma_{(-1)}^{(4,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 11 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \Big/ 24\,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{4}{5}\right)}^{(4,0)} = \begin{pmatrix} 6561 & 97516 & 121286 & 14636 & 1 \end{pmatrix}^T \Big/ \left(24 \cdot 10^4\right);$$

$$\gamma_{\left(-\frac{3}{4}\right)}^{(4,0)} = \begin{pmatrix} 2401 & 38620 & 50726 & 6556 & 1 \end{pmatrix}^T \Big/ 98304\,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{2}{3}\right)}^{(4,0)} = \begin{pmatrix} 625 & 11516 & 16566 & 2396 & 1 \end{pmatrix}^T \Big/ 31104\,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{3}{5}\right)}^{(4,0)} = \begin{pmatrix} 256 & 5281 & 8171 & 1291 & 1 \end{pmatrix}^T \Big/ 15000\,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{2}\right)}^{(4,0)} = \begin{pmatrix} 81 & 1996 & 3446 & 620 & 1 \end{pmatrix}^T \Big/ 6144\,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{2}{5}\right)}^{(4,0)} = \begin{pmatrix} 2401 & 71516 & 137846 & 28156 & 81 \end{pmatrix}^T \Big/ \left(24 \cdot 10^4\right);$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{3}\right)}^{(4,0)} = \begin{pmatrix} 16 & 545 & 1131 & 251 & 1 \end{pmatrix}^T \Big/ 1944\,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{4}\right)}^{(4,0)} = \begin{pmatrix} 625 & 21212 & 57926 & 18460 & 81 \end{pmatrix}^T \Big/ 98304\,;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{5}\right)}^{(4,0)} = \begin{pmatrix} 81 & 3691 & 8891 & 2321 & 16 \end{pmatrix}^T \Big/ 15000\,;$$

$$\gamma_{(0)}^{(4,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 76 & 230 & 76 & 1 \end{pmatrix}^T \Big/ 384\,;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{5}\right)}^{(4,0)} = \begin{pmatrix} 16 & 2321 & 8891 & 2321 & 81 \end{pmatrix}^T \Big/ 15000\,;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{4}\right)}^{(4,0)} = \begin{pmatrix} 81 & 18460 & 57926 & 21212 & 625 \end{pmatrix}^T \Big/ 98304\,;$$

$$\gamma^{(4,0)}_{\left(\frac{1}{3}\right)} = \begin{pmatrix}1 & 251 & 1131 & 545 & 16\end{pmatrix}^T \Big/ 1944\,;$$

$$\gamma^{(4,0)}_{\left(\frac{2}{5}\right)} = \begin{pmatrix}81 & 28156 & 137846 & 71516 & 2401\end{pmatrix}^T \Big/ \left(24\cdot 10^4\right);$$

$$\gamma^{(4,0)}_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \begin{pmatrix}1 & 620 & 3446 & 1996 & 81\end{pmatrix}^T \Big/ 6144\,;$$

$$\gamma^{(4,0)}_{\left(\frac{3}{5}\right)} = \begin{pmatrix}1 & 1291 & 8171 & 5281 & 256\end{pmatrix}^T \Big/ 15000\,;$$

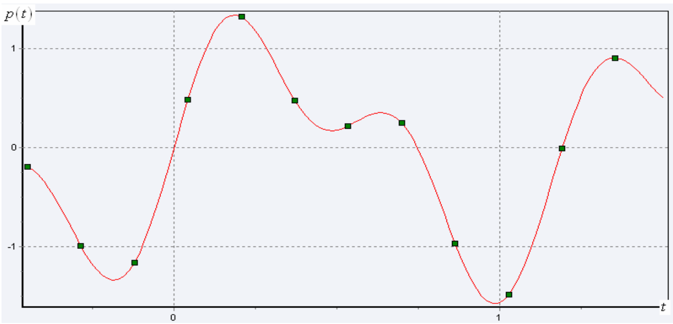
$$\gamma^{(4,0)}_{\left(\frac{2}{3}\right)} = \begin{pmatrix}1 & 2396 & 16566 & 11516 & 625\end{pmatrix}^T \Big/ 31104\,;$$

$$\gamma^{(4,0)}_{\left(\frac{3}{4}\right)} = \begin{pmatrix}1 & 6556 & 50726 & 38620 & 2401\end{pmatrix}^T \Big/ 98304\,;$$

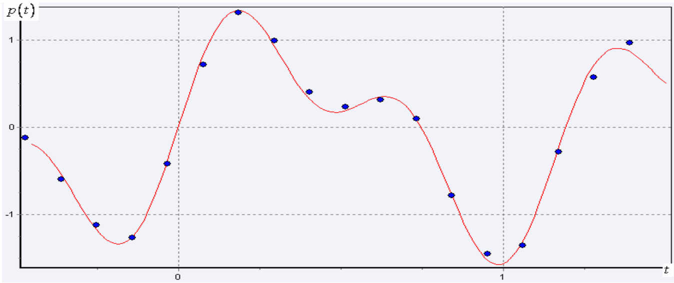
$$\gamma^{(4,0)}_{\left(\frac{4}{5}\right)} = \begin{pmatrix}1 & 14636 & 121286 & 97516 & 6561\end{pmatrix}^T \Big/ \left(24\cdot 10^4\right);$$

$$\gamma^{(4,0)}_{(1)} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 11 & 11 & 1\end{pmatrix}^T \Big/ 24\,.$$

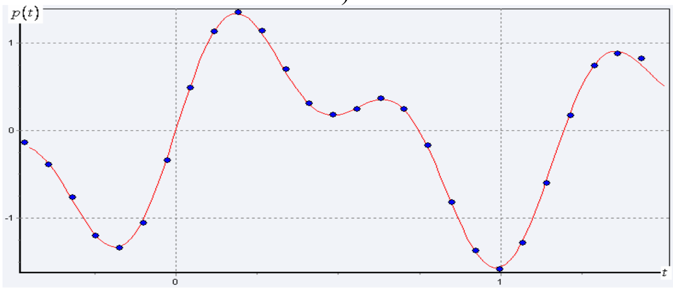
На графіках (рис.1) подано приклад небінарного *subdivision* при проектуванні кожних 2-х послідовних точок у 3-і. В якості лінійних операторів масштабування брались часткові випадки сплайну (4) відповідно в точках $x = -1/3$, $x = -1$, $x = 1/3$, котрим, згідно виразу (7) відповідають маски $\gamma^{(2,1)}_{\left(-\frac{1}{3}\right)}$, $\gamma^{(2,1)}_{(-1)}$, $\gamma^{(2,1)}_{\left(\frac{1}{3}\right)}$.



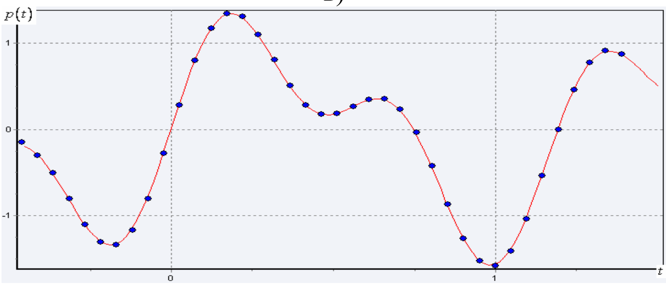
а)



б)



в)



г)

Рис.1. Небінарний *subdivision* «2 в 3» на основі сплайна (4): а) функція $p(t) = \sin(5t) + 0,6\sin(11t)$, $t \in [-0,45;1,52]$ та її початкові відліки; б) *subdivision* при $\kappa = 1$; в) *subdivision* при $\kappa = 2$; г) *subdivision* при $\kappa = 3$

Висновки. У роботі запропоновано загальну постановку задачі на проведення небінарного *subdivision* на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому. Викладено загальний спосіб визначення місцезнаходження відліків для проектування числових послідовностей. Наведено часткові випадки сплайн-операторів у вигляді дискретної згортки послідовності відліків та відповідних масок.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на оцінку якості наближення функцій спостережень, при умові, коли данні задано з різними типами завад. Вартим уваги може бути питання узагальнення поданих процедур не бінарного *subdivision* на випадок багатовимірних послідовностей.

Бібліографічні посилання

1. **Де Бор К.** Практическое руководство по сплайнам / К. Де Бор. – М., 1985. – 303 с.
2. **Роджерс Д.** Математические основы машинной графики: пер. с англ. / Д. Роджерс, Дж. Адамс – М., 2001. – 604 с.
3. **Чуи Ч.** Введение в вэйвлеты: Пер. с агнгл. / Ч. Чуи – М., 2001. – 412 с.
4. **Лигун А.А.** Асимптотические методы восстановления кривых. / А.А. Лигун, А.А. Шумейко. – К., ІМ НАН України, 1996. – 358 с.
5. **Приставка П.О.** Поліномаільні сплайни при обробці даних / П.О. Приставка. – Д., 2004. – 236 с.
6. **Приставка П.О.** Лінійні комбінації *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, в задачі моделювання аналогових сигналів / П.О. Приставка // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: зб. наук. праць. – 2011. – Т.15. – С. 4–17.
7. **Приставка П.О.** Дослідження *B*-сплайну п’ятого порядку та їх лінійної комбінації / П.О. Приставка, О.Г. Чолишкіна / Математичне моделювання. – 2007. – № 1 (16). – С. 14–17.
8. **Andersson L.-E.,** Stewart N. Introduction to the mathematics of subdivision surfaces. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. – 356 p.
9. **Лигун А.А.** Исследования линейных операторов, порожденных методами пополнения данных / А.А. Лигун, А.А. Шумейко // Математичне моделювання. – 2000, 2 (5), С. 11–19.
10. **Приставка П.О.** Поліноміальні сплайни в задачах бінарного поповнення / П.О. Приставка // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. – 2003. – Т. 7. –С. 39–53.
11. **Приставка П.О.** Небінарне поповнення послідовностей відліків гладких функцій лінійними операторами на основі поліноміальних сплайнів / П.О. Приставка // Вісник НАУ. – 2008. – № 3. – С. 85–89.
12. **Приставка П.О.** Небінарне поповнення послідовностей відліків гладких функцій двох змінних лінійними операторами / П.О. Приставка // Вісник НАУ. – 2009. – № 2. – С. 173–177.

Надійшла до редколегії 11.07.2012