УДК 519.242

С.В. Землянa

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ СХЕМИ ПОСЛІДОВНОГО АНАЛІЗУ ПРИ КОНТРОЛІ НАДІЙНОСТІ З НЕПЕРЕРВНОЮ ВИБІРКОЮ

Розглядаються методи контролю на надійність високонадійних виробів, які працюють у кусково-стаціонарному режимі. Наведено обчислювальні процедури методу послідовного аналізу для вибіркової реалізації з неперервним часом на основі сплайн-експоненційного розподілу з одним вузлом залежно від взаємного розташування вузлів сплайна.

Ключові слова: *послідовний аналіз, вибіркова реалізація з неперервним часом.*

Рассматриваются методы контроля на надежность высоконадежных изделий, работающих в кусочно-стационарном режиме. Приведены вычислительные процедуры метода последовательного анализа для выборочной реализации с непрерывным временем на основе сплайн-экспоненциального распределения с одним узлом в зависимости от взаимного расположения узлов сплайна.

Ключевые слова: *последовательный анализ, выборочная реализация с непрерывным временем.*

In this paper we considered methods to control the reliability of highly reliable products that work in the piecewise stationary mode. We present computational method of sequential analysis of procedure for the sample realization the continuous-time based on spline-exponential distribution with a single node, depending on the relative position of nodes of the spline.

Key words: *sequential analysis, sample realization of continuous time.*

Постановка проблеми в загальному вигляді. Дана робота розглядає методи контролю на надійність високонадійних виробів, які працюють у кусково-стаціонарному режимі (це значить, що нестаціонарність викликана раптовими змінами в деякі моменти часу: які при цьому не завжди наперед відомі). Контролюються як самі моменти «розладу», так і параметри надійності на стаціонарних

© С.В. Землянa, 2012

дільницях при невідомих точних значеннях цих параметрів, а також меж інтервалів стаціонарності.

Під «високою надійністю» розуміють ситуацію, при якій під час проведення випробувань спостерігається мало відмов, або вони довгий

час зовсім відсутні і тоді єдиною інформацією про надійність виробу є час неперервної безвідмовної роботи, що далі в тексті буде називатись «використанням неперервних реалізацій» протягом випробувань на надійність. Прикладами таких виробів можуть бути різні енергетичні установки, електроприводи систем автоматики, відмови яких призводять до катастрофічних наслідків, ракетна техніка, медична апаратура, вузли рухомого складу на залізничному транспорті та ін.

Аналіз останніх досягнень. Основний внесок у теорію планування випробувань вніс А. Вальд, який запропонував метод послідовного аналізу. В наступних роботах Дж. Кифера, Дж. Вольфовиця, Б. Марченко [1–3] ці методи набули подальшого розвитку. Запропоновано точні формули обчислень для вибіркової реалізації з неперервним часом на основі експоненційного закону розподілу часу напрацювання до відмови. Слід зазначити, що в даний час при вирішенні різних задач обробки статистичних даних знайшли широке застосування сплайн-розподіли [4], які найбільш адекватно і достовірно описують реальні процеси. Тому актуальним є використання сплайн-розподілів при розробці обчислювальних схем планування випробувань.

Мета роботи. Необхідно розробити обчислювальну технологію планування випробувань на основі сплайн-експоненційного розподілу з одним вузлом для вибіркової реалізації з неперервним часом залежно від взаємного розташування вузлів сплайна.

Основна частина. Припустимо, що щільність розподілу часу безвідмовної роботи об’єкта, який підлягає випробуванню на надійність, має сплайн-експоненційний закон з одним вузлом [4], тобто

$$p\left(t;\lambda_1,\lambda_2,T\right)=$$

$$=\begin{cases}\lambda_1\exp(-\lambda_1)I_t(0,T]+\lambda_2\exp(-\lambda_2 t-(\lambda_1-\lambda_2)T)I_t(T,\infty), & t>0;\\ 0, & t\le 0,\end{cases}$$

де $\lambda_1>0,\lambda_2>0,T>0$ параметри, T - момент «розладу», а $I_t(a,b]$ та $\mathrm{I_t(a,b)}$ індикатори:

$$I_t(a,b]=\begin{cases}1, & t\in(a,b];\\ 0, & t\notin(a,b).\end{cases}\quad I_t(a,b)=\begin{cases}1, & t\in(a,b);\\ 0, & t\notin(a,b).\end{cases}$$

У роботі [5] отримано загальний вигляд логарифму відношення правдоподібності. Процес відмов (кількість відмов, що виникли до моменту часу t) описується узагальненим процесом Пуассона з ведучою функцією

$$\mathrm{x(t)}=\Lambda(t)=-\left(\lambda_1 I_t(0,T]+\lambda_2 I_t(T,\infty)\right)t\ ,$$

гіпотези про стан об`єкта сформульовано у вигляді:

H_0: $\lambda_1=\lambda_1',\lambda_2=\lambda_2',T=T'$; $p\left(t;\lambda_1',\lambda_2',T'\right)$,

H_1: $\lambda_1=\lambda_1'',\lambda_2=\lambda_2'',T=T''$; $p\left(t;\lambda_1'',\lambda_2'',T''\right)$.

Зараз розглянемо окремо часткові випадки різного взаємного розташування вузлів сплайна.

1) $T_0' < T_0''$

а) $t\in\left(0,T_0'\right]$

Введемо наступні позначення:

$$K_1=\frac{b}{\ln r_1},\ J_1=\frac{a_1}{\ln r_1},\ r_1=\frac{\lambda_1''}{\lambda_1'},\ c_1=\frac{\lambda_1''-\lambda_1'}{\ln r_1}.$$

Тоді

$$v_\lambda(s)=\begin{cases}0, & s\le K_1;\\ 1, & s\ge J_1,\end{cases}$$

а для $K_1 < s < J_1$ при $s\ne J_1-1$, як показано в [2], $v_\lambda(s)$ задовольняє наступному рівнянню

$$cv_\lambda'(s)+\lambda v_\lambda(s)=\lambda v_\lambda(s+1). \qquad (1)$$

При виконанні умов

– $v_\lambda(s)$ неперервна для $\lambda < J_1$;

– $v_\lambda(K_1)=0$;

– $v_\lambda(s)=1$ для $s\ge J_1$,

рівняння (1) має наступний розв’язок

$$v_\lambda(s)=1-\exp\left(-\frac{\lambda}{c}s\right)\exp\left(\frac{\lambda}{c}K_1\right)\frac{\sum_{i=0}^{n(s)}\frac{(-1)^i}{i!}\left[(J_1-s-i)\frac{\lambda}{c}\exp\left(-\frac{\lambda}{c}\right)\right]^i}{\sum_{i=0}^{n(K_1)}\frac{(-1)^i}{i!}\left[(J_1-K_1-i)\frac{\lambda}{c}\exp\left(-\frac{\lambda}{c}\right)\right]^i},$$

де $n(s)=]J_1-s[$ – ціла частина від J_1-s, тобто найбільше ціле число, що не перевищує J_1-s.

Введемо наступне позначення

$$\Psi(x,y,d)=\sum_{m=0}^{]x[}\frac{(-1)^m}{m!}\left[(y-m)e^{-d}d\right]^m,$$

тоді

$$v_\lambda(s)=1-\exp\left(-\frac{\lambda}{c}s\right)\exp\left(\frac{\lambda}{c}K_1\right)\frac{\Psi(J_1-s,J_1-s,\lambda/c)}{\Psi(J_1-K_1,J_1-K_1,\lambda/c)}.$$

У даному випадку s = 0, тому

$$v_\lambda(0)=q\left(\frac{\lambda}{c}\right)=1-\exp\left(\frac{\lambda}{c}K_1\right)\frac{\Psi(J_1,J_1,\lambda/c)}{\Psi(J_1-K_1,J_1-K_1,\lambda/c)}. \quad (2)$$

Тепер точні значення для a знаходяться з рівнянь:

$$q\left(\frac{\lambda_1'}{c_1}\right)=\alpha \text{ або } q\left(\frac{\lambda_1''}{c_1}\right)=1-\beta. \quad (3)$$

Враховуючи, що

$$\frac{\lambda_1'}{c_1}=\frac{\lambda_1'\ln\frac{\lambda_1''}{\lambda_1'}}{\lambda_1''-\lambda_1'}=\frac{\ln\frac{\lambda_1''}{\lambda_1'}}{\frac{\lambda_1''}{\lambda_1'}-1}=\frac{\ln r_1}{r_1-1}, \quad (4)$$

отримаємо з (2) з врахуванням одного з рівнянь (3) наступне співвідношення для визначення a_1

$$1-\alpha=\exp\left(\frac{b}{r_1-1}\right)\frac{\Psi(\frac{a_1}{\ln r_1},\frac{a_1}{\ln r_1},\frac{\ln r_1}{r_1-1})}{\Psi(\frac{a_1-b}{\ln r_1},\frac{a_1-b}{\ln r_1},\frac{\ln r_1}{r_1-1})}. \quad (5')$$

б) $t\in\left(T',T''\right]$

Уведемо наступні позначення:

$$K_2 = \frac{b}{\ln r_2}, \quad J_2 = \frac{a_2}{\ln r_2}, \quad r_2 = \frac{\lambda_1''}{\lambda_2'}, \quad c_2 = \frac{\lambda_1'' - \lambda_2'}{\ln r_2},$$

$$n(s) = \left]J_2 - s\right[, \quad R(0) = d_2, \quad d_2 = -\frac{\lambda_1' - \lambda_2'}{\ln r_2} T_0';$$

$$v_\lambda(d_2) = q\left(\frac{\lambda}{c_2}\right) = 1 - \exp\left\{-\frac{\lambda}{c_2}(d_2 - K_2)\right\} \frac{\Psi(J_2 - d_2, J_2 - d_2, \lambda/c_2)}{\Psi(J_2 - K_2, J_2 - K_2, \lambda/c_2)}.$$

Тоді для визначення a_2 отримаємо наступне співвідношення

$$1 - \alpha = \exp\left\{\frac{1}{r_2 - 1}(b - d_2 \ln r_2)\right\} \frac{\Psi\left(\frac{a_2}{\ln r_2} - d_2, \frac{a_2}{\ln r_2} - d_2, \frac{\ln r_2}{r_2 - 1}\right)}{\Psi\left(\frac{a_2 - b}{\ln r_2}, \frac{a_2 - b}{\ln r_2}, \frac{\ln r_2}{r_2 - 1}\right)}.$$

(5′′)

в) $t \in \left(T_0'', \infty\right)$

Введемо наступні позначення:

$$K_3 = \frac{b}{\ln r_3}, \quad J_3 = \frac{a_3}{\ln r_3}, \quad r_3 = \frac{\lambda_2''}{\lambda_2'}, \quad c_3 = \frac{\lambda_2'' - \lambda_2'}{\ln r_3},$$

$$n(s) = \left[J_3 - s\right], \quad R(0) = d_3, \quad d_3 = \frac{\lambda_1' - \lambda_2'}{\ln r_3} T_0' - \frac{\lambda_1'' - \lambda_2''}{\ln r_3} T_0'';$$

$$v_\lambda(d_3) = q\left(\frac{\lambda}{c_3}\right) = 1 - \exp\left\{-\frac{\lambda}{c_3}(d_3 - K_3)\right\} \frac{\Psi(J_3 - d_3, J_3 - d_3, \lambda/c_3)}{\Psi(J_3 - K_3, J_3 - K_3, \lambda/c_3)}.$$

Тоді для визначення a_3 отримаємо наступне співвідношення

$$1 - \alpha = \exp\left\{\frac{1}{r_3 - 1}(b - d_3 \ln r_3)\right\} \frac{\Psi\left(\frac{a_3}{\ln r_3} - d_3, \frac{a_3}{\ln r_3} - d_3, \frac{\ln r_3}{r_3 - 1}\right)}{\Psi\left(\frac{a_3 - b}{\ln r_3}, \frac{a_3 - b}{\ln r_3}, \frac{\ln r_3}{r_3 - 1}\right)}. \quad (5''')$$

Випадки 2), 3) розглядаються аналогічно.

З співвідношень (5′), (5′′), (5′′′) за допомогою відомих методів рішення рівнянь, наприклад, методом половинного ділення, по заданим α, β та r_1, r_2, r_3, d_2, d_3 можна знаходити відповідні значення a_1, a_2, a_3.

Область продовження випробувань у випадку 1) задається наступними нерівностями:

а) $t \in \left(0, T_0'\right]$

$$K_1 + c_1 t < x(t) < J_1 + c_1 t \;;$$

б) $t \in \left(T_0', T_0''\right]$

$$K_2 + c_2 t - d_2 < x(t) < J_2 + c_2 t - d_2 \;;$$

в) $t \in \left(T_0'', \infty\right)$

$$K_3 + c_3 t - d_3 < x(t) < J_3 + c_3 t - d_3 \,.$$

Приведемо формулу для визначення середньої кількості спостережень для прийняття остаточного рішення.

Позначимо середню кількість спостережень, коли істинне значення параметра розподілу дорівнює λ та $R(0) = s$, через $M_\lambda\left(t/\lambda', r, s\right)$.

Введемо позначення

$$\Psi_1(x, y, d) = \sum_{m=0}^{]x[-1} e^{-d\ i} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \left[(y - m - 1) d \right]^k \,.$$

Тоді, згідно з [4]

$$M_\lambda\left(t/\lambda', r, s\right) = \frac{n(s)+1}{\lambda} + c' \exp\left(-\frac{\lambda}{c} s \right) \Psi\left(J - s, J - s, \lambda/c\right) -$$

$$-\frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{\lambda}{c} (J - s - 1) \right) \Psi_1\left(J - s, J - s, \lambda/c\right)$$

при $K \le s \le J$, де постійна c′ визначається з умови $M_\lambda\left(t/\lambda', r, K\right) = 0$ та дорівнює

$$c' = \frac{1}{\lambda} \exp\left\{ \frac{\lambda}{c} (J - 1) \right\} \frac{\Psi_1\left(J - K, J - K, \lambda/c\right) - n(K) - 1}{\Psi\left(J - K, J - K, \lambda/c\right)} \,.$$

Тоді середня тривалість спостережень до прийняття рішення у випадку сплайн-експоненційного розподілу з одним вузлом дорівнює

$$M_\lambda\left(t/\lambda', r\right) = M_\lambda\left(t/\lambda', r_1, 0\right) v_\lambda(0) + M_\lambda\left(t/\lambda', r_2, d_2\right) v_\lambda(d_2) +$$

$$+ M_\lambda\left(t/\lambda', r_3, d_3\right) v_\lambda(d_3) \,.$$

Оперативна характеристика, згідно з [4], має вигляд

$$P_{\lambda}\left(H_0\right)=1-q\left(\frac{\lambda}{c}\right).$$

Проведемо порівняльний аналіз меж послідовного аналізу при реалізації моделей з дискретною вибіркою та з неперервною для випадку сплайн-експоненційного розподілу з одним вузлом часу безвідмовної роботи високо надійних виробів спеціального призначення. Для цього розглянемо наступний приклад.

Приклад. Треба побудувати (розрахувати) план проведення випробувань високонадійних виробів на надійність шляхом перевірки наступних гіпотез :

H_0: $\lambda_1'=1.2$; $\lambda_2'=0.6$; $T'=1.2$ року;

H_1: $\lambda_1''=3.07$; $\lambda_2''=1.7$; $T''=1.2$ року.

Ймовірності похибок 1-го та 2-го роду обрано наступні: $\alpha=0.1$; $\beta=0.1$.

У результаті розрахунків за наведеними вище формулами отримуємо:

$a=\ln\frac{1-\beta}{\alpha}=2.197$; $b=\ln\frac{\beta}{1-\alpha}=-2.197$; $r_1=2.558$; $r_2=2.833$; $c_1=1.991$; $c_2=0.0585$; $d_2=-0.887$; $K_1=-2.339$; $K_2=2.11$; $a_1=1.881$; $a_2=0.756$; $J_1=2.002$; $J_2=0.726$.

Дослідження проводились на протязі 2,5 років шляхом неперервних спостережень. Масив часу відмов (реалізація відмов, числа в роках): {0.059; 0.165; 0.2086; 0.336; 0.644; 1.95; 2.19}.

Результати послідовного аналізу представлено на рисунку.

[В, АД] – область продовження випробувань у випадку дискретної вибіркової реалізації; [В, АН] – область продовження випробувань у випадку неперервної вибіркової реалізації; x(t) – процес відмов.

З аналізу рис. витікає, що область продовження випробувань у випадку неперервної вибіркової реалізації менша, ніж та ж область у випадку дискретної вибіркової реалізації. Це призводить до зменшення кількості випробувань за планом з неперервною вибірковою реалізацією у порівнянні з планом випробувань з дискретною вибіркою. План з неперервною вибіркою після виникнення третьої відмови призводить до відхилення основної гіпотези. План з дискретною вибірковою реалізацією після четвертої відмови призводить до відхилення основної гіпотези.

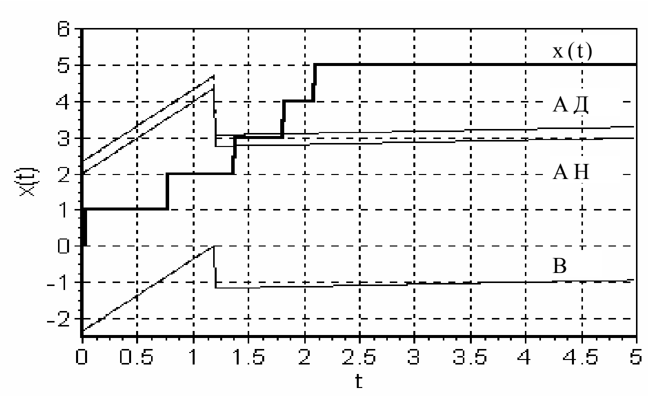

Рис. Результати послідовного аналізу

Висновки та перспективи подальшого розвитку. Рекомендується віддавати перевагу використанню методу послідовного аналізу з неперервною вибіркою, тому що він базується на точних порогових значеннях меж для аналізу процесу правдоподібності, крім того, цей метод потребує у середньому меншу кількість випробувань. Надалі представляється доцільним розробити більш прості для реалізації на ЕОМ обчислювальні схеми розрахунку границь випробувань.

Бібліографічні посилання

1. **Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J.** Sequential decision problems for process with continuosis time parameter. Testing Hypotheses. // The Annals of Mathematical Statistics, June. – 1953. – 24, 2. – P. 254–264.
2. **Kiefer J., Wolfowitz J.** Sequential Tests of Hypothes about the mean occurense time of continuous parameter Poisson process // Naval research Logistics quartaly – 3, 3 (1956). – P. 205–219.
3. **Броди С.М.** Расчет и планирование испытаний систем на надежность. / С.М. Броди, О.Н. Власенко, Б.Г. Марченко. – К., – 1970. – 192 с.
4. **Приставка А.Ф.** Сплайн-распределения в статистическом анализе / А.Ф. Приставка – Д., – 1995. – 152 с.
5. **Земляна С.В.** Застосування послідовного аналізу при контролі надійності в нестаціонарних режимах: загальні положення / С.В. Земляна // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. – Д., 2011. – Т.15. – С.195–200.

Надійшла до редколегії 11.06.2012