УДК 519.244

Г.В. Івахнік, С.В. Землянa

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ ПЕРЕВІРКИ ГІПОТЕЗИ ПРО ПАРАМЕТРИ НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ НА ОСНОВІ ПОСЛІДОВНОГО АНАЛІЗУ

Розглядається схема побудови оперативної характеристики та функції середнього обсягу вибірки для послідовного критерію Вальда у випадку нормального розподілу. Наведено обчислювальні процедури методу послідовного аналізу для випадку, коли одночасно два параметри нормального розподілу є невідомими.

Ключові слова: *послідовний аналіз, нормальний розподіл.*

Рассматривается схема построения оперативной характеристики и функции среднего объема выборки для последовательного критерия Вальда в случае нормального распределения. Приведены вычислительные процедуры метода последовательного анализа для случая, когда одновременно два параметра нормального распределения неизвестны.

Ключевые слова: *последовательный анализ, нормальное распределение.*

In this paper we considered schemes to computation operating characteristic function and average sample number function for the Wald's sequential criteria in case of normal distribution. There are sequential computation procedures in case of both normal distraction parameters unknown.

Keywords: *sequential analysis, normal distraction.*

Постановка проблеми в загальному вигляді. У даній роботі розглядається застосування критерію послідовного аналізу до випадку гіпотези про одночасно задані обидва параметри нормального розподілу. Для оцінки якості послідовного критерію потрібно побудувати оперативну характеристику та функцію середнього обсягу вибірки.

Аналіз останніх досягнень. Основний внесок у теорію послідовного аналізу зробив А. Вальд, який запропонував критерій відношення ймовірностей. У наступних роботах А.М. Бендерського, І.С. Гродзенської, А.Е. Башарінова цей метод набув подальшого розвитку. У роботі Р.-Г.Егера та Е.Б.Цоя [2] був розглянутий загальний випадок перевірки гіпотез для випадку багатьох параметрів.

Мета роботи. Необхідно розробити обчислювальну технологію перевірки гіпотези про одночасно задані два параметри нормального розподілу.

Основна частина. Нехай $x_1, x_2, \ldots$ – послідовність однаково розподілених випадкових величин із щільністю

$$f(x, m, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Будемо вважати елементи вибірки незалежними. Розглянемо гіпотезу вигляду

$$H_0 : m = m_0; \sigma^2 = \sigma_0^2,$$

$$H_1 : m = m_1; \sigma^2 = \sigma_1^2,$$

де $m_0 \neq m_1$ та/або $\sigma_0^2 \neq \sigma_1^2$. У випадку, коли $\sigma_0^2 = \sigma_1^2$, σ_0^2 відоме, маємо звичайний випадок гіпотези про середнє з відомою (фіксованою) дисперсією, що був розглянутий у [1].

Аналогічно у випадку, коли $m_0 = m_1$, m_0 відоме, маємо випадок гіпотези про дисперсію у випадку з відомим (фіксованим) середнім.

Складаємо за звичайною схемою відношення правдоподібності, отримуємо

$$l(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{f(x_i, m_1, \sigma_1^2)}{f(x_i, m_0, \sigma_0^2)} = \prod_{i=1}^{n} e^{(a + bx_i + cx_i^2)},$$

де

$$a = \ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{m_0^2}{m_1^2} - \frac{m_1^2}{m_0^2}\right), b = \frac{m_1}{\sigma_1^2} - \frac{m_0}{\sigma_0^2}, c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right).$$

Послідовний критерій відношення ймовірностей здійснюється аналогічним чином до наведених у [1] гіпотез, тобто шляхом використання загальної наведеної Вальдом схеми перевірки. На кожному етапі експерименту визначається відношення $l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Додаткові спостереження проводяться до тих пір, поки

$$B \leq l(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq A,$$

де A, B – апроксимації Вальда:

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha},$$

$$B = \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Логарифмуємо

$$\ln B \le \ln l(x_1, x_2, ..., x_n) \le \ln A .$$

У випадку, коли

$$\ln l(x_1, x_2, ..., x_n) \le \ln A ,$$

приймаємо головну гіпотезу; якщо

$$\ln l(x_1, x_2, ..., x_n) \ge \ln B ,$$

то головна гіпотеза відхиляється.

У випадку, якщо виконується нерівність

$$\sigma_1^2\sigma_0^2 \ln B - n\sigma_1^2\sigma_0^2 (\ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1} + \frac{1}{2}(\frac{m_0^2}{\sigma_0^2} - \frac{m_1^2}{\sigma_1^2})) \le$$

$$\le \frac{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i (\sigma_0^2 m_1 - \sigma_1^2 m_0) \le$$

$$\le \sigma_1^2\sigma_0^2 \ln A - n\sigma_1^2\sigma_0^2 (\ln\frac{\sigma_0}{\sigma_1} + \frac{1}{2}(\frac{m_0^2}{\sigma_0^2} - \frac{m_1^2}{\sigma_1^2})),$$

продовжуємо спостереження.

Найбільш важливими проблемами щодо опису статистичних властивостей послідовного критерію є обчислення його характеристик: оперативної характеристики та функції середнього обсягу вибірки.

Оперативна характеристика $L(m, \sigma^2)$ визначає ймовірність того, що процес завершиться прийняттям гіпотези H_0, коли істинне значення параметрів дорівнює m, σ^2. Вальдом [1] отримані наближені формули для оперативної характеристики у випадку, коли було знехтувано перевищенням величиною $l(x_1, x_2, ..., x_n)$ границь A та B у момент завершення процесу. Почнемо з відношень, що визначають оперативну характеристику, яка у послідовному випадку має, окрім самостійного теоретичного значення, ще й важливу допоміжну роль, оскільки за її допомогою будується функція середнього обсягу випробувань послідовної процедури. В [1] було запропоновано для графічного представлення оперативної характеристики розв’язувати рівняння відносно $h(m,\sigma^2)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{f(x,m_1,\sigma_1^2)}{f(x,m_0,\sigma_0^2)}\right]^h f(x,m,\sigma^2)dx = 1 .$$

Але такий метод для будь-якої гіпотези відносно декількох параметрів є трудомістким, тож у даній роботі було використано поняття конгруентних пар параметрів, як запропоновано у [2].

Можна продемонструвати, що так званий метод конгруентних пар параметрів може бути застосований до даної гіпотези. Оперативна характеристика та функція середнього обсягу вибірки для послідовного критерію Вальда може бути обчислена наближено у сенсі так званої апроксимації Вальда у значеннях конгруентних пар параметрів.

Дві пари параметрів (m,σ^2) та (m',σ'^2) називаються конгруентними, якщо існує дійсне число $h \neq 0$, причому

$$l_{n,m,\sigma^2,m',\sigma'^2} = l^h_{n,m_0,\sigma_0^2,m_1,\sigma_1^2}, n = 1,2,...,$$

та позначаються

$$(m,\sigma^2) \xleftrightarrow{h} (m',\sigma'^2) .$$

Вальдом було доведено, що побудований критерій завершує дію з імовірністю 1.

Це співвідношення еквівалентне

$$l_{1,m,\sigma^2,m',\sigma'^2} = l_{1,m_0,\sigma_0^2,m_1,\sigma_1^2}{}^h ;$$

покладемо тепер

$$z_{1,m,\sigma^2,m',\sigma'^2} = \ln l_{1,m,\sigma^2,m',\sigma'^2}; z_{1,m_0,\sigma_0^2,m_1,\sigma_1^2} = \ln l_{1,m_0,\sigma_0^2,m_1,\sigma_1^2}$$

$$z_{1,m_0,\sigma_0^2,m_1,\sigma_1^2} = a + bx_1 + cx_1^2$$

та

$$z_{1,m,\sigma^2,m',\sigma'^2} = a' + b'x_1 + c'x_1^2 .$$

Таким чином, маємо

$$a' + b'x_1 + c'x_1^2 = ha + hbx_1 + hcx_1^2 .$$

Порівнюючи коефіцієнти, за означенням конгруентних пар параметрів $(m,\sigma^2,m',\sigma'^2) \xleftrightarrow{h} (m_0,\sigma_0^2,m_1,\sigma_1^2)$, як у [2], маємо

$$a' = ha, b' = hb, c' = hc .$$

Отже, для заданих m та σ^2 ці три рівності утворюють нелінійну систему рівнянь із невідомими m', σ'^2 та h. Розглядаючи оперативну характеристику та функцію середнього обсягу вибірки, вважаємо, що достатньо виконати обчислення лише значень h.

Таким чином, шляхом перетворень отримуємо

$$\sigma'^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} - 2hc}; m' = \sigma^2 (hb + \frac{m}{\sigma^2})$$

– вирази для h, що залежить від m та σ^2, для цих параметрів задаємо бажаний діапазон та для кожної пари обчислюємо значення h методом золотого перерізу, діапазон для невідомого отримуємо шляхом підбору.

Таким чином, результуючий вираз для h має вигляд

$$h = \frac{\ln\frac{\sigma}{\sigma'} + \frac{1}{2}(\frac{m^2}{\sigma^2} - \frac{m'^2}{\sigma'^2})}{\sigma} .$$

Після обчислення значення h побудова оперативної характеристики не викликає труднощів. Ця побудова виконується за стандартною формулою Вальда

$$L(\theta) \approx \frac{A^h - 1}{A^h - B^h} .$$

Середній обсяг вибірки для винесення остаточного рішення, коли істинне значення параметрів m, σ^2 і $E\{n\} \neq 0$, має вигляд

$$E\{n\} \approx \frac{L(\theta)\ln B + [1 - L(\theta)]\ln A}{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{f(x, m_1, \sigma_1^2)}{f(x, m_0, \sigma_0^2)} \right] f(x, m, \sigma^2) dx} .$$

Обчислення інтеграла у знаменнику виконується якимось чисельним методом, наприклад методом Сімпсона.

Приклад. Розглянемо такі гіпотези про параметри нормального розподілу:

$$H_0 : m = 0; \sigma^2 = 1;$$

$$H_1 : m = 0{,}5; \sigma^2 = 1{,}6.$$

Для оцінки якості послідовного критерію Вальда треба побудувати оперативну характеристику та функцію середнього обсягу вибірки.

Ймовірності похибок 1-го та 2-го роду обрано такими: $\alpha = 0.01$; $\beta = 0.01$.

Обрані діапазони параметрів для побудови:

$$m = -3..1.4,$$

$$\sigma^2 = 0.5..5,$$

$$h = -2..2.$$

Результати побудови оперативної характеристики та функції середнього обсягу вибірки представлено на рис.1 та 2.

Побудована оперативна характеристика задовольняє необхідним умовам та є достатньою, тобто для всіх параметрів, що знаходяться в області прийняття головної гіпотези, оперативна характеристика є більшою за $1-\alpha$, а для параметрів, що знаходяться в області відхилення головної гіпотези, оперативна характеристика менша за β. Функція середнього обсягу вибірки демонструє, яке у середньому число випробувань необхідне для критерію Вальда при заданих гіпотезах та значеннях параметрів m, σ^2.

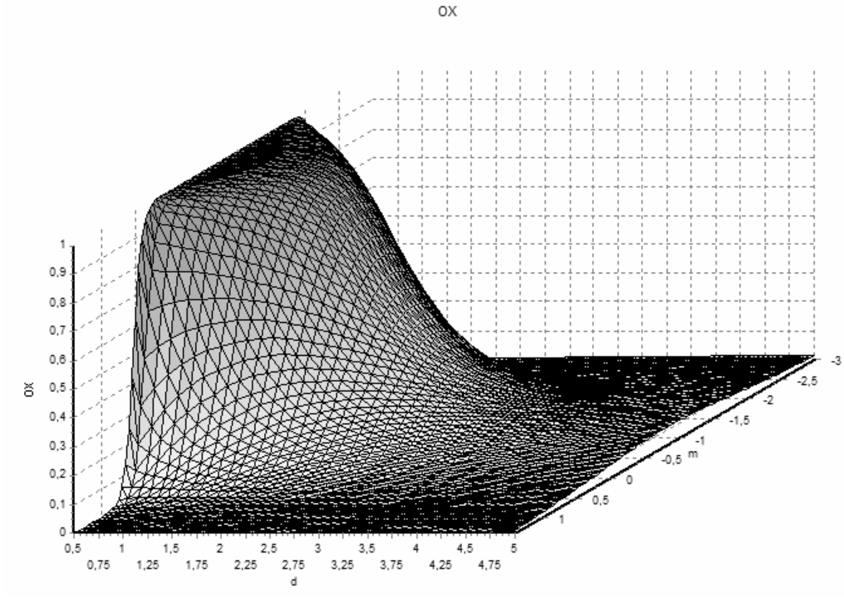

Рис.1. Оперативна характеристика

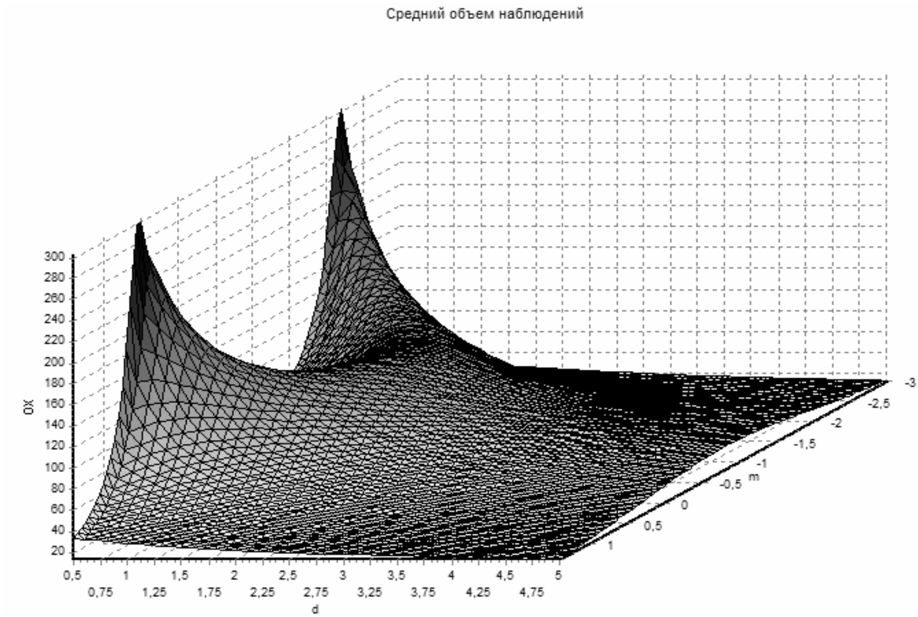

Рис.2. Функція середнього обсягу вибірки

Висновки та перспективи подальшого розвитку. Було розроблено обчислювальну схему перевірки гіпотези двох параметрів нормального розподілу одночасно на основі послідовного критерію відношення ймовірностей Вальда. Надалі вважаємо за доцільне розробити обчислювальні схеми розрахунку точних границь послідовного критерію для реалізації на ЕОМ.

Бібліографічні посилання

1. **Вальд А.** Последовательный анализ / А. Вальд. – М.: Физмагиз, 1960. – 307 с.
2. **Eger R.-H.** Robustness of Seguential Probability Ratio Tests in Case of Nuisance Parameters / R.-H.Eger, Е.Б.Цой // The third international forum on strategic technologies: proc. of IFOST 2008, Novosibirsk; Tomsk (Russia), 23–29 june 2008. – P. 266–270.

Надійшла до редколегії 25.06.2013 р.