

УДК 519.254:519.652(045)

Б. І. Мартюк, О. Г. Чолишкіна, П. О. Приставка

*Національний авіаційний університет***ДОСЛІДЖЕННЯ ПОХІДНИХ ЛІНІЙНОЇ
КОМБІНАЦІЇ *B*-СПЛАЙНІВ П'ЯТОГО ПОРЯДКУ**

Отримано похідні першого та другого порядку для поліноміальних сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, на основі *B*-сплайнів п'ятого порядку, визначених на рівномірному розбитті осі аргументу. Досліджено властивості отриманих похідних, подано теореми про норми та якості апроксимації.

Ключові слова: *сплайн; похідні; аналогові сигнали.*

Получены производные первого и второго порядка для полиномиальных сплайнов, близких к интерполяционным в среднем, на основании *B*-сплайнов пятого порядка, определенных на равномерном разбиении оси аргумента. Исследованы особенности полученных производных, представлены теоремы о нормах и качестве аппроксимации.

Ключевые слова: *сплайн; производные; аналоговые сигналы.*

Obtained derivatives of the first and second-order polynomial splines, interpolation close to the average, based on the *B*-splines of the fifth order, defined on a uniform partition argument axis. The features of the obtained derivatives represented theorem on approximation of standards and quality.

Keywords: *spline; derivative; analog signals.*

Постановка проблеми. В задачах обробки цифрових сигналів важливе місце займає питання вирішення проблеми пошуку локальних особливостей. Зважаючи на випадкову природу різного роду завад, пошук особливостей потребує вирішення питання згладжування сигналу, тож корисним було б використовувати математичні оператори на основі наближень, що мають відповідні обґрунтовані властивості апроксимації зі згладжуванням, наприклад, лінійні комбінації *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому [1]. Зауважимо, що при фіксації аналогового сигналу має місце таке. Нехай $\phi(t)$ – функція імпульсного відклику системи, що реєструє сигнал $p(t)$. Враховуючи технічні властивості систем реєстрації,

результатом згортки сигналу та функції відклику буде значення, усереднене на інтервалі дискретизації:

$$(p * \phi)(ih) = \frac{1}{h} \int_{ih-\frac{h}{2}}^{ih+\frac{h}{2}} p(t) \phi(t-ih) dt = \bar{p}_i.$$

Тоді цифровий сигнал має таке подання:

$$p_i = \bar{p}_i + \varepsilon_i, \quad i \in Z,$$

(1)

де ε_i – випадкова вада.

Для задач обробки цифрових сигналів, що задані співвідношенням (1), в якості моделі $p(t)$ є потреба використовувати наближення з властивостями імпульсного нерекурсивного низькочастотного фільтра. В роботі [1] показано, що лінійна комбінація B -сплайнів порядку вище першого за відліками (1) може мати використання в якості моделі аналогового сигналу, причому чим вищий порядок B -сплайну, тим кращими є згладжувальні властивості при відносно низькій обчислювальній складності. Тож актуальним є дослідження подібних моделей для B -сплайнів високих порядків.

Для пошуку особливостей аналогового сигналу можна використовувати першу та другу похідні лінійних комбінацій B -сплайнів, відповідно, постає питання дослідження цих похідних. Так, у роботах [3–5] досліджено властивості похідних локальних поліноміальних сплайнів на основі B -сплайнів другого, третього та четвертого порядків. Тому актуальною є потреба отримання та дослідження похідних лінійних комбінацій B -сплайнів більш високого порядку, зокрема п'ятого, що обумовлено властивостями відповідних B -сплайнів [1].

Аналіз досліджень та постановка задачі. Задачу відтворення гладких функцій на основі лінійних комбінацій B -сплайнів висвітлено у роботах І. Шоенберга, К. Де Бора, М. П. Корнійчука та ін. Увагу поліноміальним сплайнам, визначеним на локальних носіях, близьким до інтерполяційних у середньому, приділено А. О. Лигуном, О. А. Шумейко, В. В. Кармазіною [2–4] та у авторських роботах [5–6].

Нехай з кроком $h > 0$ задано розбиття дійсної осі $\Delta_h : t_i = ih, i \in Z$, у кожній точці якого отримано значення деякої неперервної функції $p(t) \in C^r$, $r \geq 2$, визначеної на $\mathbb{R}_1(-\infty; \infty)$. Вважають, що інформацію про функцію $p(t)$, яка підлягає відтворенню, задано у вузлах розбиття

Δ_h у вигляді інтеграла $\bar{p}_i = \frac{1}{h} \int_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t) dt$, при цьому істинне

значення функції $p(t)$ у вузлах визначається аналогічно виразу (1).

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h , вводяться такі поліноміальні сплайни на основі B -сплайнів, що є близькими до інтерполяційних у середньому [6]:

$$S_{5,0}(p, t) = \sum_{i \in Z} p_i B_{5,h}(t - ih), \quad (2)$$

де B -сплайн $B_{r,h}(t)$ порядку r ($r \geq 1$) визначається рекурентно таким чином: якщо

$$B_{0,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-h/2; h/2], \\ 1, & t \in [-h/2; h/2], \end{cases}$$

$$\text{то } B_{r,h}(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h/2}^{t+h/2} B_{r-1,h}(\tau) d\tau.$$

Таким чином, B -сплайн п'ятого порядку має вигляд [7]:

$$B_{5,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h; 3h], \\ \frac{1}{120} \left(3 + \frac{t}{h}\right)^5, & t \in [-3h; -2h], \\ -\frac{1}{24} \left(\frac{t}{h}\right)^5 - \frac{3}{8} \left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{5}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{7}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^2 - \frac{5}{8} \left(\frac{t}{h}\right) + \frac{51}{120}, & t \in [-2h; -h], \\ \frac{1}{12} \left(\frac{t}{h}\right)^5 + \frac{1}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{11}{20}, & t \in [-h; 0], \\ -\frac{1}{12} \left(\frac{t}{h}\right)^5 + \frac{1}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{11}{20}, & t \in [0; h], \\ \frac{1}{24} \left(\frac{t}{h}\right)^5 - \frac{3}{8} \left(\frac{t}{h}\right)^4 + \frac{5}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{7}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{5}{8} \left(\frac{t}{h}\right) + \frac{51}{120}, & t \in [h; 2h], \\ \frac{1}{120} \left(3 - \frac{t}{h}\right)^5, & t \in [2h; 3h]. \end{cases} \quad (3)$$

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h зручно використовувати явний вигляд лінійної комбінації

B-сплайнів (2) з урахуванням виразу (3):

$$\begin{aligned}
 S_{5,0}(p, t) = & \frac{1}{3840}(-p_{i-2} + 5p_{i-1} - 10p_i + 10p_{i+1} - 5p_{i+2} + p_{i+3})x^5 + \\
 & + \frac{1}{768}(p_{i-2} - 3p_{i-1} + 2p_i + 2p_{i+1} - 3p_{i+2} + p_{i+3})x^4 + \\
 & + \frac{1}{384}(-p_{i-2} - 3p_{i-1} + 14p_i - 14p_{i+1} + 3p_{i+2} + p_{i+3})x^3 + \\
 & + \frac{1}{384}(p_{i-2} + 21p_{i-1} - 22p_i - 22p_{i+1} + 21p_{i+2} + p_{i+3})x^2 + \\
 & + \frac{1}{768}(-p_{i-2} - 75p_{i-1} - 154p_i + 154p_{i+1} + 75p_{i+2} + p_{i+3})x + \\
 & + \frac{1}{3840}(p_{i-2} + 237p_{i-1} + 1682p_i + 1682p_{i+1} + 237p_{i+2} + p_{i+3}).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Нехай у вузлах розбиття Δ_h для значень деякої гладкої неперервної функції $p(t)$ виконується умова (1). Тоді для сплайну (4) має місце така рівність:

$$S_{5,0}(p, t) = S_{5,0}(\bar{p}, t) + S_{5,0}(\varepsilon, t).$$

Оцінка якості відтворення функції $p(t)$ зводиться до оцінки відхилення

$$|p(t) - S_{5,0}(p, t)| = |p(t) - S_{5,0}(\bar{p}, t) - S_{5,0}(\varepsilon, t)|,$$

або для $|\varepsilon_i| < \varepsilon$, $i \in Z$, до оцінки нерівності

$$|p(t) - S_{5,0}(p, t)| \leq |p(t) - S_{5,0}(\bar{p}, t)| + \varepsilon \|S_{5,0}\|,
 \tag{5}$$

де

$$\|S_{5,0}\| = \sup_{|\varepsilon_i|} \max_t |S_{5,0}(\varepsilon, t)|,
 \tag{6}$$

норма сплайн-оператора $S_{5,0}(p, t)$.

Поставимо за мету даної роботи отримати явний вигляд похідних сплайну $S_{5,0}(p, t)$ та знаходження норм і якості апроксимації для даних похідних.

Виклад основного матеріалу. Отримаємо явний вигляд 1-ї та 2-ї

похідної для сплайнів $S_{5,0}(p, t)$.

$$\begin{aligned} S'_{5,0}(p, t) = & \frac{1}{768}(-p_{i-2} + 5p_{i-1} - 10p_i + 10p_{i+1} - 5p_{i+2} + p_{i+3})x^4 + \\ & + \frac{1}{192}(p_{i-2} - 3p_{i-1} + 2p_i + 2p_{i+1} - 3p_{i+2} + p_{i+3})x^3 + \\ & + \frac{1}{128}(-p_{i-2} - 3p_{i-1} + 14p_i - 14p_{i+1} + 3p_{i+2} + p_{i+3})x^2 + \\ & + \frac{1}{192}(p_{i-2} + 21p_{i-1} - 22p_i - 22p_{i+1} + 21p_{i+2} + p_{i+3})x + \\ & + \frac{1}{768}(-p_{i-2} - 75p_{i-1} - 154p_i + 154p_{i+1} + 75p_{i+2} + p_{i+3}), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} S''_{5,0}(p, t) = & \frac{1}{192}(-p_{i-2} + 5p_{i-1} - 10p_i + 10p_{i+1} - 5p_{i+2} + p_{i+3})x^3 + \\ & + \frac{1}{64}(p_{i-2} - 3p_{i-1} + 2p_i + 2p_{i+1} - 3p_{i+2} + p_{i+3})x^2 + \\ & + \frac{1}{64}(-p_{i-2} - 3p_{i-1} + 14p_i - 14p_{i+1} + 3p_{i+2} + p_{i+3})x + \\ & + \frac{1}{192}(p_{i-2} + 21p_{i-1} - 22p_i - 22p_{i+1} + 21p_{i+2} + p_{i+3}). \end{aligned} \quad (8)$$

Подальша задача оцінки якості відтворення $p(t)$ складається з двох етапів: знаходження норм похідних сплайн-оператора $S_{5,0}(p, t)$ і задача визначення якості апроксимації.

Проведемо оцінку норм перших та других похідних сплайну $S_{5,0}(p, t)$.

Теорема 1. Для сплайну $S'_{5,0}(p, t)$ є вірним:

$$\|S'_{5,0}(p, t)\|_C = \frac{115}{192} \|p(t)\|_C.$$

Доведення. За визначенням норми оператора лінійного нормового простору для похідної сплайну $S'_{5,0}(p, t)$ маємо:

$$\|S'_{5,0}(p, t)\|_C = \sup_{p_i} \max_t |S'_{5,0}(p_i, t)|.$$

Згрупуємо сплайн (7) відносно p_i :

$$\begin{aligned}
S'_{5,0}(p,t) = & \frac{1}{768} \left((1-x)^4 p_{i-2} + (-75+84x-18x^2-12x^3+5x^4) p_{i-1} + \right. \\
& + (-154-88x+84x^2+8x^3-10x^4) p_i + \\
& + (154-88x-84x^2+8x^3+10x^4) p_{i+1} + \\
& \left. + (75+84x+18x^2-12x^3-5x^4) p_{i+2} + (1+x)^4 p_{i+3} \right). \quad (9)
\end{aligned}$$

З представлення сплайну $S'_{5,0}(p,t)$ у вигляді (9) слідує, що

$$\|S'_{5,0}(p,t)\|_C \leq \frac{1}{768} \|p(t)\|_C \max_{|x| \leq 1} A(x),$$

де

$$\begin{aligned}
A(x) = & |1-x|^4 + |-75+84x-18x^2-12x^3+5x^4| + \\
& + |-154-88x+84x^2+8x^3-10x^4| + |154-88x-84x^2+8x^3+10x^4| + \\
& + |75+84x+18x^2-12x^3-5x^4| + |1+x|^4.
\end{aligned}$$

Враховуючи, що функція $A(x)$ парна, для знаходження її максимуму достатньо розглянути її для $x \in [0;1]$:

$$\begin{aligned}
1 \pm x & \geq 0, \\
-75+84x-18x^2-12x^3+5x^4 & < 0, \quad -154-88x+84x^2+8x^3-10x^4 < 0, \\
154-88x-84x^2+8x^3+10x^4 & \geq 0, \quad 75+84x+18x^2-12x^3-5x^4 > 0.
\end{aligned}$$

Отже

$$\begin{aligned}
A(x) = & (1-x)^4 + 75-84x+18x^2+12x^3-5x^4 + 154+88x-84x^2-8x^3 + \\
& + 10x^4 + 154-88x-84x^2+8x^3+10x^4 + 75+84x+18x^2-12x^3-5x^4 + \\
& + (1+x)^4 = 12x^4 - 120x^2 + 460.
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\max_{x \in [0;1]} A(x) = 460,$$

$$\|S'_{5,0}(p,t)\|_C \leq \frac{115}{192} \|p(t)\|_C,$$

(10)

з іншого боку, при $x=0$ з (7) маємо:

$$S'_{5,0}(p, t) = \frac{1}{768}(-p_{i-2} - 75p_{i-1} - 154p_i + 154p_{i+1} + 75p_{i+2} + p_{i+3}).$$

Тоді для деякого часткового випадку

$$p^*_{i-2} = p^*_{i-1} = p^*_i = p^*_{i+1} = p^*_{i+2} = p^*_{i+3} = p^*,$$

то

$$\|S'_{5,0}(p, t)\|_C \geq \|S'_{5,0}(p^*, t)\|_C \geq \|S'_{5,0}(p^*, t)\| = \frac{115}{192} \|p(t)\|_C.$$

Разом з нерівністю (10) це співвідношення доводить сформувану теорему.

Теорема 2. Якщо $p(t) \in C^5$, то при $h \rightarrow 0$ рівномірно по t має місце асимптотична рівність

$$p'(t) - S'_{5,0}(\bar{p}, t) = -\frac{7}{24} p'''(t) h^2 - \frac{77}{1920} p^{(5)}(t) h^4 - \\ - \frac{7}{24} p^{(4)}(t) h^2 \tau - \frac{7}{48} p^{(5)}(t) h^2 \tau^2 + o(h^4),$$

де

$$\tau = t - ih.$$

Доведення. Розкладемо сплайн $S'_{5,0}(\bar{p}, t)$ в ряд Тейлора в околі точки ih з урахуванням $S'_{5,0}(\bar{p}, t) \in C^5$.

$$S'_{5,0}(\bar{p}, t) = S'_{5,0}(\bar{p}, t^*) + S''_{5,0}(\bar{p}, t^*) \tau + S'''_{5,0}(\bar{p}, t^*) \frac{\tau^2}{2!} + \\ + S^{(4)}_{5,0}(\bar{p}, t^*) \frac{\tau^3}{3!} + S^{(5)}_{5,0}(\bar{p}, t^*) \frac{\tau^4}{4!} + o(h^4), \quad (11)$$

де

$$S'_{5,0}(\bar{p}, t^*) = \frac{1}{384h}(-\bar{p}_{i-2} - 75\bar{p}_{i-1} - 154\bar{p}_i + 154\bar{p}_{i+1} + 75\bar{p}_{i+2} + \bar{p}_{i+3}), \quad (12)$$

$$S''_{5,0}(\bar{p}, t^*) = \frac{1}{48h^2}(\bar{p}_{i-2} + 21\bar{p}_{i-1} - 22\bar{p}_i - 22\bar{p}_{i+1} + 21\bar{p}_{i+2} + \bar{p}_{i+3}), \quad (13)$$

$$S'''_{5,0}(\bar{p}, t^*) = \frac{1}{8h^3}(-\bar{p}_{i-2} - 3\bar{p}_{i-1} + 14\bar{p}_i - 14\bar{p}_{i+1} + 3\bar{p}_{i+2} + \bar{p}_{i+3}), \quad (14)$$

$$S^{(4)}_{5,0}(\bar{p}, t^*) = \frac{1}{2h^4}(\bar{p}_{i-2} - 3\bar{p}_{i-1} + 2\bar{p}_i + 2\bar{p}_{i+1} - 3\bar{p}_{i+2} + \bar{p}_{i+3}), \quad (15)$$

$$S_{5,0}^{(5)}(\bar{p}, t^*) = \frac{1}{h^5}(-\bar{p}_{i-2} + 5\bar{p}_{i-1} - 10\bar{p}_i + 10\bar{p}_{i+1} - 5\bar{p}_{i+2} + \bar{p}_{i+3}), \quad (16)$$

$$t^* = ih.$$

З урахуванням розкладу $S'_{5,0}(\bar{p}, t)$ та $p(t) \in C^5$ в ряд Тейлора в околі точки ih , нескладно отримати, що для $\forall p(t) \in C^5$ при $h \rightarrow 0$ рівномірно по t має місце асимптотична рівність

$$\begin{aligned} p'(t) &= p'(t^*) + p''(t^*)\tau + p'''(t^*)\frac{\tau^2}{2!} + \\ &+ p^{(4)}(t^*)\frac{\tau^3}{3!} + p^{(5)}(t^*)\frac{\tau^4}{4!} + o(h^4), \end{aligned} \quad (17)$$

причому:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{i-2} &= p(t^*) - \frac{5}{2}p'(t^*)h + \frac{19}{6}p''(t^*)h^2 - \frac{65}{24}p'''(t^*)h^3 + \\ &+ \frac{211}{120}p^{(4)}(t^*)h^4 - \frac{665}{720}p^{(5)}(t^*)h^5 + o(h^5), \\ \bar{p}_{i-1} &= p(t^*) - \frac{3}{2}p'(t^*)h + \frac{7}{6}p''(t^*)h^2 - \frac{15}{24}p'''(t^*)h^3 + \\ &+ \frac{31}{120}p^{(4)}(t^*)h^4 - \frac{63}{720}p^{(5)}(t^*)h^5 + o(h^5), \\ \bar{p}_i &= p(t^*) - \frac{1}{2}p'(t^*)h + \frac{1}{6}p''(t^*)h^2 - \frac{1}{24}p'''(t^*)h^3 + \\ &+ \frac{1}{120}p^{(4)}(t^*)h^4 - \frac{1}{720}p^{(5)}(t^*)h^5 + o(h^5), \\ \bar{p}_{i+1} &= p(t^*) + \frac{1}{2}p'(t^*)h + \frac{1}{6}p''(t^*)h^2 + \frac{1}{24}p'''(t^*)h^3 + \\ &+ \frac{1}{120}p^{(4)}(t^*)h^4 + \frac{1}{720}p^{(5)}(t^*)h^5 + o(h^5), \\ \bar{p}_{i+2} &= p(t^*) + \frac{3}{2}p'(t^*)h + \frac{7}{6}p''(t^*)h^2 + \frac{15}{24}p'''(t^*)h^3 + \\ &+ \frac{31}{120}p^{(4)}(t^*)h^4 + \frac{63}{720}p^{(5)}(t^*)h^5 + o(h^5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_{i+3} = & p(t^*) + \frac{5}{2} p'(t^*) h + \frac{19}{6} p''(t^*) h^2 + \frac{65}{24} p'''(t^*) h^3 + \\ & + \frac{211}{120} p^{(4)}(t^*) h^4 + \frac{665}{720} p^{(5)}(t^*) h^5 + o(h^5). \end{aligned}$$

Підставляючи ці рівності в рівності (12) – (16) отримаємо:

$$S'_{5,0}(\bar{p}, t^*) = p'(t^*) + \frac{7}{24} p'''(t^*) h^2 + \frac{77}{1920} p^{(5)}(t^*) h^4 + o(h^5), \quad (18)$$

$$S''_{5,0}(\bar{p}, t^*) = p''(t^*) + \frac{7}{24} p^{(4)}(t^*) h^2 + o(h^5), \quad (19)$$

$$S'''_{5,0}(\bar{p}, t^*) = p'''(t^*) + \frac{7}{24} p^{(5)}(t^*) h^2 + o(h^5), \quad (20)$$

$$S^{(4)}_{5,0}(\bar{p}, t^*) = p^{(4)}(t^*) + o(h^5). \quad (21)$$

$$S^{(5)}_{5,0}(\bar{p}, t^*) = p^{(5)}(t^*) + o(h^5). \quad (22)$$

Тоді, підставляючи рівності (18) – (22) в (11), будемо мати:

$$\begin{aligned} S'_{5,0}(\bar{p}, t) = & (p'(t^*) + \frac{7}{24} p'''(t^*) h^2 + \frac{77}{1920} p^{(5)}(t^*) h^4) + \\ & + \left(p''(t^*) + \frac{7}{24} p^{(4)}(t^*) h^2 \right) \tau + (p'''(t^*) + \frac{7}{24} p^{(5)}(t^*) h^2) \frac{\tau^2}{2!} + \\ & + p^{(4)}(t^*) \frac{\tau^3}{3!} + p^{(5)}(t^*) \frac{\tau^4}{4!} + o(h^4). \end{aligned} \quad (23)$$

За рівністю (17) та (23):

$$\begin{aligned} p'(t) - S'_{5,0}(\bar{p}, t) = & -\frac{7}{24} p'''(t) h^2 - \frac{77}{1920} p^{(5)}(t) h^4 - \\ & - \frac{7}{24} p^{(4)}(t) h^2 \tau - \frac{7}{48} p^{(5)}(t) h^2 \tau^2 + o(h^4). \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Наслідок 1. Для сплайну $S'_{5,0}(p, t)$ при $p(t) \in C^4$ є вірним

$$\|p'(t) - S'_{5,0}(\bar{p}, t)\|_C \leq \frac{7h^2}{24} \|p'''(t)\|_C + \frac{115}{192} \varepsilon \|p(t)\|_C + o(h^4).$$

Аналогічно для сплайнів $S''_{5,0}(p, t)$, $S'''_{5,0}(p, t)$:

Теорема 3. Для сплайнів $S''_{4,0}(p, t)$, $S'''_{4,0}(p, t)$, $S^{(4)}_{4,0}(p, t)$ є вірним:

$$\|S''_{5,0}(p, t)\|_C = \frac{1}{2} \|p(t)\|_C, \quad \|S'''_{5,0}(p, t)\|_C = \frac{9}{16} \|p(t)\|_C,$$

$$\|S^{(4)}_{5,0}(p, t)\|_C = \frac{13}{16} \|p(t)\|_C.$$

Доведення є аналогічним доведенню теореми 1.

Теорема 4. Якщо $p(t) \in C^5$, то при $h \rightarrow 0$ рівномірно по t має місце асимптотична рівність:

$$p''(t) - S''_{5,0}(\bar{p}, t) = -\frac{7}{24} p^{(4)}(t) h^2 - \frac{7}{24} p^{(5)}(t) h^2 \tau + o(h^3),$$

$$p'''(t) - S'''_{5,0}(\bar{p}, t) = -\frac{7}{24} p^{(5)}(t) h^2 + o(h^2).$$

Доведення є аналогічним доведенню теореми 2.

Наслідок 2. Для сплайну $S''_{4,0}(p, t)$ при $p(t) \in C^4$ та для сплайну $S'''_{4,0}(p, t)$ при $p(t) \in C^5$ є вірним:

$$\|p''(t) - S''_{5,0}(\bar{p}, t)\|_C \leq \frac{7h^2}{24} \|p^{(4)}(t)\|_C + \frac{1}{2} \varepsilon \|p(t)\|_C + o(h^3),$$

$$\|p'''(t) - S'''_{5,0}(\bar{p}, t)\|_C \leq \frac{7h^2}{24} \|p^{(5)}(t)\|_C + \frac{9}{16} \varepsilon \|p(t)\|_C + o(h^2).$$

Наведемо приклади реалізації першої та другої похідних сплайну $S_{5,0}(p, t)$. На графіку (рис.1 (а)) точками позначено відліки сигналу та подано реалізацію згладжування сплайном $S_{5,0}(p, t)$, похідні $S'_{5,0}(p, t)$, $S''_{5,0}(p, t)$ відображено на рис. 1 (б) та (в) відповідно. Пунктиром (вертикальні ствпці на рис. 1 (б, в)) позначено окіл особливих точок сигналу. Як видно з графіків, в особливих точках сигналу, яким відповідають нулі похідної $S'_{5,0}(p, t)$, можна побачити мінімум або максимум сплайну $S_{5,0}(p, t)$, причому за мінімум відповідає додатньо визначена функція другої похідної $S''_{5,0}(p, t)$ з рис. 1 (в), а за максимум – від'ємно визначена функція.

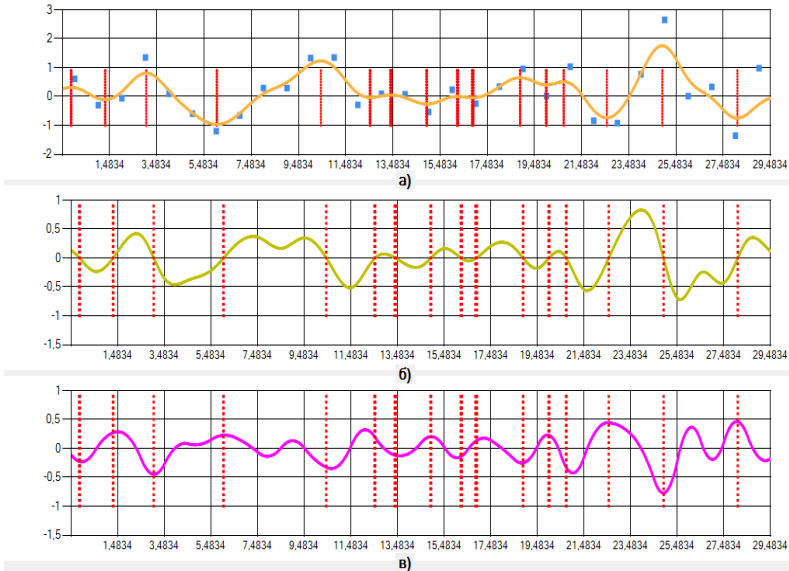


Рисунок 1 – Реалізація аналогового сигналу та згладжування його за допомогою сплайнів: а) відліки сигналу та сплайн $S_{5,0}(p, t)$; б) сплайн $S'_{5,0}(p, t)$; в) сплайн $S''_{5,0}(p, t)$.

Висновки. В роботі отримано явний вигляд похідних поліноміальних сплайну $S_{5,0}(p, t)$. Подано та доведено теореми про норми та оцінки якості апроксимації функції зазначеними сплайнами, наведено приклад їх застосування для визначення особливих точок випадкового сигналу.

Подальші дослідження можуть полягати в дослідженні похідних поліноміальних сплайнів більш високого порядку задля реалізації їх у задачах обробки цифрових сигналів та узагальненні теоретичних результатів досліджень для двовимірних та багатовимірних випадків.

Бібліографічні посилання

1. Приставка П. О. Лінійні комбінації B -сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, в задачі моделювання аналогових сигналів // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій : зб. наук. праць. Дніпропетровськ: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. 2011. Т.15. С. 4–17.

2. Лигун А. А., Шумейко А. А. Асимптотические методы восстановления кривых. Київ: ІМ НАН України, 1996. 358 с.

3. Лигун А. А., Кармазина В. В. О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка / Днепродзержинский индустр. ин-т. Днепродзержинск, 1989. 30 с. Деп. в УкрНИИИНТИ 8.06.89, N 1559– Ук89.

4. Лигун А. А., Кармазина В. В. Восстановление функций плотности распределения и их производных с помощью кубических гистосплайнов / Днепродзержинский индустр. ин-т. Днепродзержинск, 1989. 38 с. Деп. в УкрНИИИНТИ 13.11.89, N 2569–Ук89.

5. Приставка П. О., Чолишкіна О. Г., Мартюк Б. І. Дослідження похідних лінійної комбінації *B*-сплайнів четвертого порядку. // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій.: зб. наук. праць. Дніпро: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. 2016. Т. 20. С. 65–77.

6. Приставка П. О. Поліномаїльні сплайни при обробці даних. Дніпро: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. 236 с

7. Приставка П. О., Чолишкіна О. Г. Дослідження *B*-сплайну п'ятого порядку та їх лінійної комбінації // Математичне моделювання, 2007.

Надійшла до редколегії 19.07.17.