Гюнель Гюльмамедова

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ДЕНЕЖНЫХ И МАТЕРИАЛЬНЫХ НАКОПЛЕНИЙ

В статье проведен сравнительный анализ методом спектральных преобразований смешанных задач для моделей денежных и материальных накоплений и разработаны рекомендации для инвестиционного анализа.

Ключевые слова: *уравнение денежных и материальных накоплений, корректная разрешимость, спектр, резольвента, вычет, собственные функции, прогнозирование.*
Форм. 10. Лит. 11.

Гюнель Гюльмамедова

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ ГРОШОВИХ ТА МАТЕРІАЛЬНИХ НАКОПИЧЕНЬ

У статті проведено порівняльний аналіз методом спектральних перетворень змішаних задач для моделей грошових і матеріальних накопичень та розроблено рекомендації щодо інвестиційного аналізу.

Ключові слова: *рівняння грошових та матеріальних накопичень, коректна розв'язність, спектр, вирахування, спектр, власні функції, прогнозування.*

Gunel Gulmamedova[1]

THE COMPARATIVE ANALISYS OF THE MODELS OF MONEY AND MATERIAL ACCUMULATIONS

The article carries out the comparative analysis via the method of spectral transformations of mixed problems for the models of money and material accumulations, and issues the recommendations concerning the investment analysis.

Keywords: *equation of money and material accumulations; the correct solvability; spectrum; deduction; eigenfunctions; forecast.*

Постановка проблемы. Одним из актуальных вопросов изучения моделей денежных и материальных накоплений является нахождение аналитического решения поставленных смешанных задач для уравнений, содержащихся в этих моделях. Из-за отсутствия внедрения аналитических аппаратов математики решения многих смешанных задач экономико-финансового характера не были изучены [2; 6–8; 11] в аспекте экономико-технического анализа и инвестиционно-управленческого характера. С помощью таких типовых модельных задач осуществляется анализ, прогнозирование, поиск и выбор определенных оптимальных решений в различных областях экономики и финансов, социальной сфере, управления инвестициями (задачи из [5]), что требует отдельных исследований математических особенностей для финансовых исследователей и аналитиков. Например, при финансово-экономических, а также статистических анализах сложных процессов, связанных с ростом совокупного богатства семей, особое значение имеют элементы богатства отдельных семей (как доходы, так и денежно-материальные накопления этих семей). Эти элементы являются его самой динамичной частью и имеют особо важные значения для повышения благосостояния и социального развития. Изучение

[1] Senior Lecturer, Department of Mathematical Economics, Baku State University, Azerbaijan.

математических моделей денежных и материальных накоплений является важным моментом при разработке различных инвестиционных проектов для привлечения свободных денежных средств населения к инвестированию. Денежные доходы совокупности семей можно рассматривать как совокупные доходы, как доходы на одну семью и как доходы на одного человека. Так, совокупные доходы выражают в обобщенном виде интенсивность потоков финансовых средств между системой общественного продукта, национального дохода и подсистемой материального уровня жизни населения государства в целом. Анализ доходов и расходов отдельных семей поможет найти тесные прямые и обратные связи между системами народного благосостояния и финансово-кредитными системами, т.к. позволяет получить информацию об оптимальном распределении дохода между потреблением и накоплением для анализа будущей инвестиционной деятельности кредитно-банковских учреждений в сфере кредитования. Поэтому изучение смешанных задач модели денежного и материального накопления является важным во многих областях экономики, финансов и социологии.

Анализ последних исследований и публикаций. В [2] проведен анализ вероятностных свойств случайных процессов, их числовые характеристики применительно к уравнениям денежных накоплений с помощью стохастического анализа. Здесь основное внимание уделено марковским и винерским процессам и их свойствам, непосредственно являющимся базовым аппаратом для вывода уравнения данного исследования. Также проанализированы уравнения Колмогорова-Маркова-Чепмена, которые соответствуют плотности переходных вероятностей из одного состояния в другое. Далее изучены основные характеристики для исследования выведенных ранее уравнений денежных накоплений совокупности семей.

В [6–8] рассмотрен ряд вопросов, связанных с вышеуказанными моделями для денежных и материальных накоплений, остававшихся до сих пор в стороне, но имеющих большое практическое значение, например, вопросы, связанные с прогнозированием инвестирования. Интерес к этому в последнее время особенно возрос в связи систематическим применением кибернетических динамических стратегий к решению задач финансового инвестирования. В этих работах нестандартные математические модели (одно или оба краевых условия заданы нелокальным образом в интегральном виде со степенными весовыми функциями) описываются как смешанные задачи для поставленных модельных уравнений денежного и материального накопления. Такие задачи ранее были решены в частном виде только численно методом разностных схем [2], когда рассматривались только денежные накопления. Здесь мы указываем, каким образом сможем применить спектральные методы из [6–8], тем самым показываем, что эти методы являются мощными средствами для решения таких задач. В этих работах методами интегральных преобразований и методом разделения переменных Фурье к поставленной смешанной задаче сопоставляются две задачи: спектральная задача для дифференциального уравнения 2-го порядка со спектральным параметром λ и задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Далее исследовано решение поставленных новых спектральных задач, описывающих новые модифицированные модели денежных и материальных накоплений [4, 38]. Выделены классы задач, называемые регулярными, для которых решения существуют во всей комплексной плоскости спектрального параметра, за исключением дискретных собственных значений, которые являются полюсами функции Грина соответствующих спектральных задач. Там же явно вычислены их значения и получены асимптотическое поведение последней функции вне малой окрестности таких точек. Функция Грина ведёт себя как $O(\frac{1}{\lambda})$. Получена формула разложения достаточно гладких функций по решению спектральной задачи. Эти функции можно найти с помощью аппроксимации статистических данных математическими функциями по методу наименьших квадратов и задать в качестве начальных условий. Полученная формула разложения обеспечивает выполнение начальных условий изучаемой смешанной задачи. Можно получить и явное представление решения задачи Коши. Если это решение ограничено на спектре спектральной задачи, то можно применить вычетный метод [9; 10]. С помощью этого метода получится явное аналитическое представление решения смешанных задач для одномерного по пространственной переменной уравнения денежного накопления или же для двухмерного уравнения денежного и материального накопления, выраженных в виде полного интегрального вычета через решения соответствующих спектральных задач и задачи Коши. Если выполняются достаточные условия на начальные данные (эти условия указаны в [6–8]), тогда поставленная смешанная задача является корректной, т.е. решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных условий, поэтому по этим результатам можно получить ряд предварительных сведений для экономического анализа, использовать аналитические формулы для получения прогностических значений изучаемых процессов.

Нерешённые части проблемы. Несмотря на то, что построением и изучением моделей денежных и материальных накоплений населения исследователи занимаются сравнительно недавно, имеются весомые результаты. Однако эти результаты не доведены до такого состояния, чтобы они могли быть использованы финансовыми аналитиками и социологами – исследователями для анализа финансовых состояний населения по статистической выборке, без знания которых невозможны какие-либо эффективные экономико-социологические прогнозы, разработка инвестиционных стратегий, связанных с кредитованием, решить новые задачи в области управления. Нерешенной частью проблемы является то, что ещё не созданы соответствующее программное обеспечение таких задач, с помощью которых выполнялись бы этапы вычислений и прогнозирования, не описанные до сих пор в научной литературе.

Целью исследования является анализ представления решений смешанных задач через решения соответствующих спектральных задач в виде полного интегрального вычета, полученных в [6–8], являющихся удобным аппаратом и для численного расчета их решений.

В последнее время появился значительный интерес к разработке математических методов исследования в таких трудно формализуемых областях, как экономика, финансы и социология. Данная статья иллюстрирует возможность применения некоторых математических спектральных методов для решения моделей социально-экономических процессов, использующих уравнения с частными производными и учитывающих случайные факторы, характерные для таких явлений. Это позволяет провести качественный финансово-экономический анализ и прогнозировать развитие изучаемого процесса в будущем. Для успешной работы на финансовых рынках аналитикам, кроме опыта, необходимо обладать определенными математическими знаниями, чтобы принимать обоснованные решения на минимальном уровне риска.

Основные результаты исследования. Представление решений смешанной задачи через решения спектральной задачи в виде полного интегрального вычета оказывается удобным аппаратом и для численного расчета. Ввиду того, что слагаемые вычетных рядов непрерывно зависят от полюсов спектральной задачи, то приближение значений полюсов даёт возможность получить приближенные значения решений с любой степенью точности. Таким образом, трудность практического нахождения приближенных решений и их численных значений сводится к трудности нахождения приближенных численных значений полюсов. А трудность нахождения приближенных значений полюсов или нулей характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ функции Грина легко преодолевается с помощью программных продуктов Excel, MathCad, MatLab. В самом деле, как видно, например, из формулы:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} L_1(y_1) & L_1(y_2) \\ L_2(y_1) & L_2(y_2) \end{vmatrix}, \tag{1}$$

где $L_1(Y)=\dfrac{b}{2}\lambda^2 Y(0)+\alpha_0 Y(0)+\alpha_1 Y'(0)$; $L_2(Y)=\dfrac{b}{2}\lambda^2 Y(1)+\beta_0 Y(0)+\beta_1 Y'(0)$; Y_1 и Y_1 являются фундаментальными системами решений соответствующей спектральной задачи:

$$Y''-\frac{2c}{b}Y'-\lambda^2 Y=0; \tag{2}$$

$$Y_1(x,\lambda)=\exp\left\{\left(\frac{c}{b}+\lambda\sqrt{\frac{c^2}{b^2\lambda^2}+1}\right)x\right\}; \tag{3}$$

$$Y_2(x,\lambda)=\exp\left\{\left(\frac{c}{b}-\lambda\sqrt{\frac{c^2}{b^2\lambda^2}+1}\right)x\right\}. \tag{4}$$

Здесь допускается, что наряду с непрерывным распределением величин допускается их сосредоточенное распределение в отдельных точках, что вызывает появление производной по t в краевых условиях для смешанной задачи уравнения денежного накопления и соответствующая спектральная задача содержит в краевых условиях спектральный параметр. Нетрудно получить квазиполиномиальный вид характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, который представляет собой целую функцию комплексного параметра $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, где λ_1, λ_2 – соответственно действительная и мнимая части λ, нули которой явно не вычисляются. Тогда $\Delta(\lambda)$ можно представить в виде

$$\Delta(\lambda) = \Delta_1(\lambda_1, \lambda_2) + i\Delta_2(\lambda_1, \lambda_2), \tag{5}$$

где Δ_1, Δ_2 – соответственно действительные и мнимые части $\Delta(\lambda)$. Как видно из этого представления, уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ эквивалентно следующим двум уравнениям: $\Delta_1(\lambda_1, \lambda_2) = 0$, $\Delta_2(\lambda_1, \lambda_2) = 0$. Задавая λ произвольные числовые значения $(\lambda_1^1, \lambda_2^1)$, $(\lambda_1^2, \lambda_2^2)$, ..., $(\lambda_1^n, \lambda_2^n)$ и соединяя их плавной кривой, можно получить кривую, являющуюся графиком неявной функции $\lambda_2(\lambda_1)$, определяемой этим уравнением.

Точно также можно построить график неявной функции $\lambda_2(\lambda_1)$, определяемой из второго уравнения последней системы двух уравнений. Координаты $(\widetilde{\lambda}_1^k, \widetilde{\lambda}_2^k)$ точки пересечения этих двух графиков представляют собою приближенные решения этой системы уравнений. В качестве итерационного подхода можно применить метод Ньютона [1].

Для применения этого метода обозначим производные левых частей системы через:

$$\frac{\partial\Delta_1(\lambda_1\lambda_2)}{\partial\lambda_1} = Y1,\ \frac{\partial\Delta_1(\lambda_1\lambda_2)}{\partial\lambda_2} = Y2,\ \frac{\partial\Delta_2(\lambda_1\lambda_2)}{\partial\lambda_1} = Z1,\ \frac{\partial\Delta_2(\lambda_1\lambda_2)}{\partial\lambda_2} = Z2. \tag{6}$$

Якобианом системы будет

$$Y(\lambda_{1n}, \lambda_{2n}) = \frac{\partial\Delta_1(\lambda_{1n}, \lambda_{2n})}{\partial\lambda_1} \times \frac{\partial\Delta_2(\lambda_{1n}, \lambda_{2n})}{\partial\lambda_2} - \frac{\partial\Delta_1(\lambda_{1n}, \lambda_{2n})}{\partial\lambda_2} \times \frac{\partial\Delta_2(\lambda_{1n}, \lambda_{2n})}{\partial\lambda_1}. \tag{7}$$

Согласно методу Ньютона, используя решения нелинейной системы уравнений, из [1] можно записать итерационные формулы:

$$\lambda_{1n+1} = \lambda_{1n} - \frac{\Delta_1(\lambda_{1n}, \lambda_{2n})\dfrac{\partial\Delta_2(\lambda_{1n}, \lambda_{2n})}{\partial\lambda_2} - \Delta_2(\lambda_{1n}, \lambda_{2n})\dfrac{\partial\Delta_2(\lambda_{1n}, \lambda_{2n})}{\partial\lambda_2}}{Y(\lambda_{1n}, \lambda_{2n})}; \tag{8}$$

$$\lambda_{1n+1} = \lambda_{1n} + \frac{\Delta_1(\lambda_{1n}, \lambda_{2n})\dfrac{\partial\Delta_2(\lambda_{1n}, \lambda_{2n})}{\partial\lambda_1} - \Delta_2(\lambda_{1n}, \lambda_{2n})\dfrac{\partial\Delta_2(\lambda_{1n}, \lambda_{2n})}{\partial\lambda_1}}{Y(\lambda_{1n}, \lambda_{2n})}. \tag{9}$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока два последовательных приближения не будут близки друг к другу. Условия сходимости процесса можно выбирать так:

$$\left|(\lambda_{1n+1} - \lambda_{1n})\right|^2 + \left|(\lambda_{2n+1} - \lambda_{2n})\right|^2 < \varepsilon. \tag{10}$$

После нахождения этих нулей применяется технология численного вычисления определенных интегральных сумм в Excel и MatLab.

Выводы. Исследование решений смешанных задач для моделей денежных и материальных накоплений с привлечением спектральных методов дифференциальных аппаратов является очень удобным аппаратом – и для явного представления решений модели, и для её численного расчета. В результате можно получить важные предварительные информационные базы для анализа финансовых состояний отдельных семей или их групп, а также для среднедушевого дохода, использовать аналитические формулы решений для получения прогностических значений изучаемых процессов. Таким образом, спектральный подход дает возможность принимать более обоснованные инвестиционные решения, направленные на регулирование и повышение уровня жизни, что базируется на строгих математических доказательствах.

1. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.

2. *Ерофеенко В.Т., Козловская И.С.* Уравнения с частными производными и математические модели в экономике. – М: Эдиториал УРСС, 2004. – 248 с.

3. *Йонкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения.– 1977.– Т. XIII, №2. – С. 294–304.

4. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 586 с.

5. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Пер. с англ. – М.: Мир; АСТ, 2003. – 408 с.

6. *Оруджев Э.Г., Гюльмамедова Г.А.* О смешанных задачах для уравнения денежных и материальных накоплений // Доклады НАН Азербайджана.– 2011.– Т. LXVII, №2. – С. 14–19.

7. *Оруджев Э.Г., Гюльмамедова Г.А.* О смешанных задачах на конечном пространстве накоплений // Актуальные проблемы экономики.– 2011.– №11. – С. 431–441.

8. *Оруджев Э.Г., Гюльмамедова Г.А.* О существовании и единственности решений некоторых смешанных задач для уравнения денежных накоплений // Вестник Бакинского университета.– Серия: Физ-мат. наук.– 2009.– №4. – С. 10–18.

9. *Расулов М.Л.* Применение вычетного метода к решению задач дифференциальных уравнений. – Баку: ЭЛМ, 1989. – 328 с.

10. *Расулов М.Л.* Разложение функции в ряд полного интегрального вычета и решение смешанных задач // Доклады Академии наук СССР.– 1986.– Т. 286, №1. – С. 42–46.

11. *Чернавский Д.С., Попков Ю.С., Рахимов А.Х.* Математическая модель типологии семейных накоплений // Экономика и математические методы.– 1994.– Т. 30, №2. – С. 98–106.

Стаття надійшла до редакції 12.07.2012.