О.Г. Яковенко *(Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, Україна)*
К.М. Заворотченко *(Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, Україна)*

МОДИФІКОВАНИЙ БІНОМІАЛЬНИЙ МЕТОД ЦІНОУТВОРЕННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ GARCH-ПРОЦЕСУ

У статті запропоновано модифікований біноміальний метод ціноутворення з моделюванням дисперсії активу як garch-процесу. Здійснено прогноз на основі даних про ціни на золото за січень-серпень 2011 р. за допомогою адаптованого методу Монте-Карло симуляції. Проведено порівняння класичного та модифікованого біноміального методів.
Ключові слова: *біноміальна метод, моделювання, garch-, ціноутворення, прогнозування.*
Форм. 6. Табл. 3. Рис. 7. Літ. 14.

А.Г. Яковенко *(Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, Украина)*
Е.Н. Заворотченко *(Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, Украина)*

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ БИНОМИАЛЬНЫЙ МЕТОД ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ GARCH-ПРОЦЕССА

В статье предложен модифицированный биномиальный метод ценообразования с моделированием дисперсии актива как garch-процесса. Осуществлен прогноз на основе данных о ценах на золото за январь-август 2011 г. с помощью адаптированного метода Монте-Карло симуляции. Проведено сравнение классического и модифицированного биномиального методов.
Ключевые слова: *биномиальный метод, моделирование, garch-, ценообразование, прогнозирование.*

O.G. Yakovenko *(Dnipropetrovsk National University of Oles Honchar, Ukraine)*
K.M. Zavorotchenko *(Dnipropetrovsk National University of Oles Honchar, Ukraine)*

MODIFIED BINOMIAL APPROACH TO PRICING UNDER GARCH PROCESS

The article offers a modified binomial approach to pricing with modelling of variance as a garch process. The forecast is carried out using the prices for gold in January-August 2011 and applying the adapted Monte-Carlo method. Comparison of classic and modified binomial methods is presented.
Keywords: *binomial method; modelling; garch-; pricing; forecast.*

Постановка проблеми. Головною проблемою при прийнятті рішень залишається оцінювання ризику, що є основою діяльності суб'єктів господарювання на фінансовому ринку. Оскільки більшість ризиків і винагород знаходяться у майбутньому, інвестори змушені порівнювати очікування втрат і винагород, приймаючи такі рішення, що покращують інвестиції, максимізуючи винагороди та мінімізуючи ризики. Мірою ризику визначають зазвичай ринкову невизначеність або діапазон коливань ціни активу. Визначивши можливий діапазон коливань курсу акцій, інвестор може адекватно оцінювати свої шанси на виграш і приймати ефективніші рішення. На фінансових ринках випадкові відхилення величини від постійного значення впродовж часу є особливо важливими, оскільки вартість акцій, опціонів та інших фінансових інструментів залежить від рівня їх ризикованості. В цьому випадку дисперсію (волатильність) прибутковості природно розглядати як міру ризикованості фінансового активу. Таким чином, при прийнятті інвестиційних рішень корисно мати прогнози не лише математичного сподівання шуканої величини, але і її дисперсії.

На практиці при оцінюванні ризику використовується не сама дисперсія, а волатильність, яка знаходиться як корінь квадратний з дисперсії. Волатильність є однією з важливих величин для позначення невизначеності на фондовому ринку. У широкому сенсі під волатильністю розуміють мінливість, варіацію відхилення впродовж часу величини економічного показника на фінансовому ринку від постійного значення. Наприклад, волатильність курсу – це непостійність (випадковість), мінливість курсу на біржі за певний проміжок часу.

Отже, моделювання волатильності має важливе практичне значення у сфері вимірювання, контролю й управління ризиками та при оцінюванні вартості деривативів, визначенні структури фондового портфеля або оцінюванні капіталу підприємства. Тому актуальним є розроблення нових або модифікація існуючих моделей поведінки фінансових активів з урахуванням їх дисперсії.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Волатильність може значно змінюватися в часі: за періодами великих змін наступають періоди незначних відхилень. Однак незважаючи на те, що реальна волатильність є змінною, економісти тривалий час застосовували статистичні методи, які виходять з припущення про її постійність. У перших моделях, де була врахована ризикованість економічних показників, дисперсія була постійною, незмінною в часі величиною. Так, Г. Марковіц [11] і Дж. Тобін [14] розглядали ризики активів портфеля й оптимізували портфель їх зменшенням. В. Шарп [13] розвивав теорію зв'язку між очікуваними прибутком і дисперсією, за якої всі інвестори прагнуть до спільної мети та володіють однаковою інформацією щодо стану ринку. Ця модель названа моделлю оцінювання дохідності активів (capital asset pricing model – CAPM). Ф. Блек та М. Шоулз [6], Р. Мертон [12] розробили моделі ціноутворення опціону європейського типу, що враховувала як один із чинників волатильність прибутковості базового активу. Дж. Кокс, С. Росс та М. Рубінштейн [8] запропонували дискретний варіант даної моделі, який дозволив оцінювати опціони як європейського, так і американського типу – біноміальну модель, що була в подальшому модифікована та доповнена різними авторами [4; 5].

З часом зростаюча важливість невизначеності в економічній теорії призвела до розвитку нових економетричних методів для часових рядів, які враховували б при моделюванні зміну дисперсії у часі. У 1982 р. Р.Ф. Енглом [9] була запропонована модель, що отримала назву моделі з умовною гетероскедастичністю (autoregressive conditional heteroske dastisity – ARCH або arch-модель). Р.Ф. Енгл запропонував цю модель, щоб описати добре відому з практики поведінку багатьох фінансових рядів: кластеризацію волатильності, коли періоди великої мінливості показника змінювалися періодом малої мінливості. Дана модель не підходить для моделювання тренду економічного показника, проте дозволяє спрогнозувати його розмах, дисперсію. В практиці фінансового аналізу вона знайшла подальший розвиток у більш загальній формі залежності умовної дисперсії похибок, ніж у моделі ARCH. Модель GARCH (generalized ARCH – узагальнена модель ARCH), запропонована Т. Боллерельовом [7], є альтернативною модифікацією моделі ARCH, що дозволяє отримати довші кластери при малому числі параметрів.

Невирішені частини проблеми. Для існуючих до цього моделей часового ряду з незмінними умовними дисперсіями (наприклад, класична біноміальна модель (ARMA) [3]) невизначеність помилки прогнозу – це зростаюча функція горизонту прогнозу, яка не залежить від часу. Але на практиці дисперсія активу залежить від моменту прогнозу, а для біноміальної моделі ціноутворення активів, яка була розроблена саме для зменшення ризику, помилка прогнозу є критичною і нехтування нею може значно вплинути на оптимальність результату. Проте через garch-помилку точність прогнозу нетривіально залежатиме від поточної інформації, отже, від моменту прогнозу. Тому важливим є модифікація існуючих методів шляхом моделювання дисперсії як garch-процесу.

Метою дослідження є розробка модифікованої біноміальної моделі, яка враховує змінність дисперсії параметрів на основі garch-процесів та адаптування методу прогнозування до побудованої моделі.

Основні результати дослідження. Вивчення волатильності прибутковості активів є важливим внеском у розуміння сучасних фінансових ринків. Багатьом фінансовим часовим рядам притаманні такі властивості:

1. Ціни активів нестаціонарні. Прибутковості, зазвичай, стаціонарні.
2. Волатильність ряду прибутковості кластеризована.
3. Нормальність відкидається на користь розподілу з товстими хвостами.

Моделі GARCH були розроблені для врахування цих емпіричних закономірностей у фінансових даних. Вони застосовуються для моделювання волатильності прибутковості фінансових активів, таких як цінні папери з фіксованим доходом, обмінні курси, акції і фондові індекси.

GARCH порядка p та q відображає залежності наступного виду:

$$D_{\varepsilon_{i-1}\ldots\varepsilon_{i-p}}(\varepsilon_i)=\alpha_0+\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\varepsilon_{i-j}^2+\sum_{j=1}^{q}\gamma_j\sigma_{i-j}^2, \tag{1}$$

де $D_{\varepsilon_{i-1}\ldots\varepsilon_{i-p}}(\varepsilon_i)$ ε_i $\sigma_{i-j}^2=D(\varepsilon_{i-j})$; α_j, γ_j – коефіцієнти моделі.

Параметри p, q, як очевидно з рівняння (1), означають глибину аналізу залежності теперішнього значення від минулих. Оцінювання процесів *GARCH(p,q)* здійснюється методом максимальної правдоподібності. Найпростіший варіант моделі *GARCH(1,1)* має вигляд:

$$D_{\varepsilon_{i-1}}(\varepsilon_i)=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{i-1}^2+\gamma_1\sigma_{i-1}^2. \tag{2}$$

Розглянемо біноміальний метод ціноутворення фінансового активу. Нехай спостерігається зміна ціни активу P_i на певному часовому інтервалі $[t_0,t_n]$,

$i=\overline{0,n}$. В кожний наступний момент часу $t_{i+1} > t_i$ ціна змінюється на величину ζ, що може набувати двох значень:

$$\zeta = \begin{cases} u \geq 1, pr \\ d < 1, 1-pr \end{cases}, \tag{3}$$

де pr – ймовірність події $\zeta = u$. ζ знаходиться як співвідношення P_{i+1} / P_i і називається прибутковістю активу. Тобто ціна у t_{i+1} момент часу може з імовірністю pr зрости до величини u x P_i, або з імовірністю 1 – pr впасти до d x P_i. Знаючи параметри моделі u, d, pr, можна спрогнозувати ціну на t_{n+k} періодів наперед, при цьому нечіткість прогнозу залежатиме лише від довжини горизонту планування k. Таким чином, описано рух ціни активу за допомогою біноміального підходу. В цій моделі ціноутворення параметри, що відповідають за розмах змін ціни u, d, вважаються постійними на всьому інтервалі $[t_0, t_{n+k}]$, але насправді це не завжди відповідає дійсності.

У результаті спостереження за величиною $\{\zeta_i\}_{i=1}^{n}$ отримаємо два ряди: $\{u_i\}_{i=1}^{n_u}$ $\{d_i\}_{i=1}^{n_d}$, $n_u + n_d = n$:

$$\begin{gathered} P_i = P_{i-1} \times \zeta_i, i=\overline{1,n} \\ \zeta_i = \begin{cases} u_i \geq 1, pr \\ d_i < 1, 1-pr \end{cases}. \end{gathered} \tag{4}$$

Для того, щоб змоделювати їхню поведінку за допомогою GARCH-процесу, дані ряди мають бути стаціонарні. Стаціонарність означає, що значення параметру коливаються навколо незмінної величини.

Опишемо поведінку параметра $\{u_i\}$ відповідно до процесу (1). Розіб'ємо його значення на дві частини таким чином:

$$\begin{gathered} u_i = \mu u + \varepsilon u_i; \\ \mu u = const, \end{gathered}$$

де μu – тренд; εu_i – волатильність, випадкова величина в t_i-й момент часу.

Умовне математичне сподівання величини εu_i має дорівнювати нулю $M(\varepsilon u_i | \varepsilon u_1, \varepsilon u_2, ..., \varepsilon u_{i-1}) = 0$. Умовне – означає, що при його розрахунку враховуються значення величини у попередні періоди. Для скороченого запису позначимо його через $M_{\varepsilon u_{i-1}}(\varepsilon u_i)$. Умовна дисперсія відповідно до GARCH процесу (2) дорівнює $D_{\varepsilon u_{i-1}}(\varepsilon u_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \times \varepsilon u^2_{i-1} + \gamma_1 \times \sigma u^2_{i-1}$, де $\varepsilon u^2_{i-1} = D(\varepsilon u_{i-1})$. Такий запис дисперсії означає, що більше відхилення від поясненого (прогнозованого) значення в попередньому спостереженні приводить до більшої ймовірності значного відхилення і в наступному спостереженні. Дослідження показують, що такі явища часто спостерігаються аналітиками фінансового ринку: періоди «затишшя», коли фінансові показники лише трохи вагаються довкола середнього, чергуються з періодами «сплеску», що характеризуються ширшим розмахом значень тих же показників.

Таким чином, маємо таку модель для параметра $\{u_i\}$:

$$\begin{gathered} u_i = \mu u + \varepsilon u_i; \\ \mu u = const; \\ M_{\varepsilon u_{i-1}}(\varepsilon u_i) = 0; \\ D_{\varepsilon u_{i-1}}(\varepsilon u_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \times \varepsilon u^2_{i-1} + \gamma \times \sigma u^2_{i-1}, \end{gathered} \tag{5}$$

де $\sigma u^2_{i-1} = D_{\varepsilon u_{i-2}}(\varepsilon u_{i-1})$.

Аналогічно змоделюємо поведінку ряду $\{d_i\}$:

$$\begin{gathered} d_i = \mu d + \varepsilon d_i; \\ \mu d = const; \\ M_{\varepsilon d_{i-1}}(\varepsilon d_i) = 0; \\ D_{\varepsilon d_{i-1}}(\varepsilon d_i) = \beta_0 + \beta_1 \times \varepsilon d^2_{i-1} + \eta \times \sigma d^2_{i-1}; \\ \sigma d^2_{i-1} = D_{\varepsilon d_{i-2}}(\varepsilon d_{i-1}). \end{gathered} \qquad (6)$$

Об`єднавши моделі (4)–(6), отримуємо нову модифіковану біноміальну модель зміни ціни активу.

Спрогнозуємо за допомогою даної моделі ціни на золото. Дані про зміну ціни на золото за січень-серпень 2011 р. [2] наведено на рис. 1.

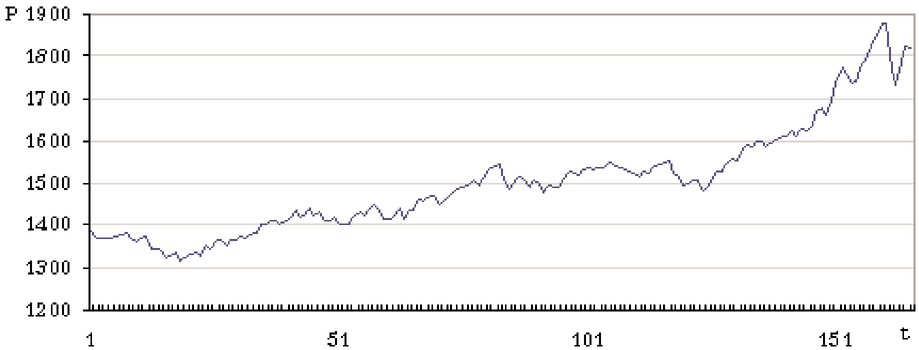

Рис. 1. **Ціни на золото за січень-серпень 2011 року** [2]

Аналізуючи даний ряд цін до біноміальної моделі (4), знайдемо $\{u_i\}_{i=1}^{n_u}$ та $\{d_i\}_{i=1}^{n_d}$. Знайдений результат наведено на рис. 2.

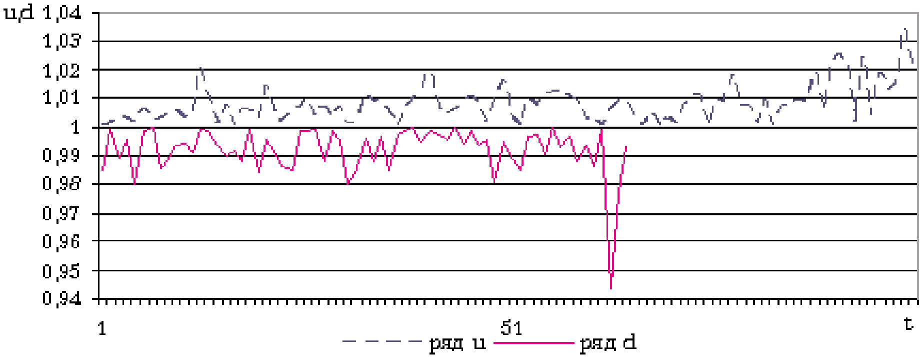

Рис. 2. **Зміна параметрів біноміальної моделі ціни на золото у часі,**
розроблено за [2]

Визначимо параметри моделі (5) для ряду $\{u_i\}$. Для розрахунку використаємо такий потужний інструмент математичного аналізу, як Matlab, що має вбудований пакет функцій для аналізу garch-процесів.

Моделювання за допомогою методів ARCH та GARCH вимагає стаціонарності ряду. Більшість часових рядів є динамічними. Вони відрізняються від стаціонарних рядів тим, що коливаються не навколо постійної величини, а навколо величини, яка змінюється з часом. Статистичні методи, які використовуються для стаціонарних рядів, можуть дати абсолютно невірні результати у випадку, якщо їх застосовувати до динамічних рядів. З рис. 2 видно, що параметри u_i та d_i мають тенденцію повернення до свого середнього значення.

Для того, щоб даний ряд можно було моделювати як GARCH-процес, необхідно визначити наявність кореляції між даними. В Matlab для знаходження кореляційної залежності використовується функція autocorr(). Отриманий результат зображено на рис. 3.

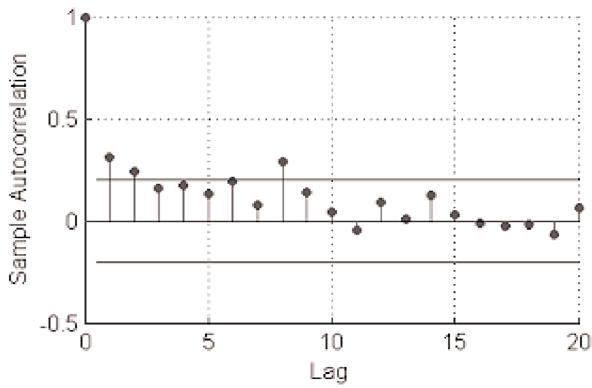

Рис. 3. **Автокореляційна функція для ряду u,** *авторська розробка*

З рис. 3 можно зробити висновок про існування залежності, яка спадає з часом. Щоб впевнитися в існуванні залежності, скористаємося Ljung-Box-Pierce Q-тестом [1] та Engle's ARCH [9] тестом. У першому тесті як нульова гіпотеза $H = 0$ висувається припущення про відсутність кореляції, тобто ряд $\{u_i\}$ є серією стохастичних незалежних спостережень. $H = 1$ означає наявність кореляції. Другий тест аналізує наявність гетероскедастичності. В Matlab виконаємо перевірку на наявність зв'язку для часового лагу у 10 одиниць та рівні значущості 0,05. Обидва тести відхилили нульову гіпотезу, наведену у табл. 1.

Таблиця 1. **Результати перевірки ряду на наявність кореляції,** *авторська розробка*

Q-тест	Engle's ARCH тест
lbqtest(u-mean(u),[10]',0.05)	archtest(u-mean(u),[10]',0.05)
[H pValue Stat CriticalValue]	[H pValue Stat CriticalValue]
1.0000 0.0000 40.4146 18.3070	1.0000 0.0000 44.6705 18.3070

Наявність гетероскедастичності, яку відображає даний аналіз, означає можливість використання garch-процесів при моделюванні ряду $\{u_i\}$.

Для оцінювання параметрів моделі GARCH використовується метод максимальної правдоподібності. У Matlab він реалізований за допомогою вбудованої функції garchfit(), отриманий результат наведено у табл. 2.

Дані з табл. 2 інтерпретуються так: Т-статистика відображає значущість параметра, отже, коефіцієнтом K, для якого Т-статистика менша 1, можно знехтувати, оскільки він майже не має пояснювальної сили, параметри з Тстатистикою більше 2 мають 95% пояснювальної значущості. Таким чином, розраховані значення дають змогу створити таку модель для параметра u_i:

$$u_i = 1{,}0071 + \varepsilon u_i;$$
$$M_{\varepsilon u_{i-1}}(\varepsilon u_i) = 0;$$
$$D_{\varepsilon u_{i-1}}(\varepsilon u_i) = 0{,}13174 \times \varepsilon u^2_{i-1} + 0{,}86826 \times \sigma u^2_{i-1},$$

де $\sigma u^2_{i-1} = D_{\varepsilon u_{i-2}}(\varepsilon u_{i-1})$.

Таблиця 2. **Параметри garch-моделі для ряду u,** *авторська розробка*

Параметр	Значення	Т-статистика
C	1.0071	1565.5322
K	1.0186e-006	0.3900
GARCH(1)	0.86826	7.4146
ARCH(1)	0.13174	1.9084

Так як існують варіації garch-процесу з більшою глибиною залежності, наприклад, моделювання дисперсії вигляду $D_{\varepsilon u_{i-1}}(\varepsilon u_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \times \varepsilon u^2_{i-1} + \gamma_1 \times \sigma u^2_{i-1} + \gamma_2 \times \sigma u^2_{i-2}$ для garch(2,1) процесу, порівняємо отриману модель із вищевказаною.

У Matlab розраховуємо другий набір параметрів та за допомогою критерію відношення правдоподібності [10] з рівнем значущості 0,05 порівняємо обидві моделі. Результат показує, що статистичні дані на підтримку моделі garch(2,1) недостатні, отже, для моделювання процесу залишаємо garch(1,1) модель.

Наведемо результат моделювання та прогнозу ряду u поряд з фактичними даними на рис. 4.

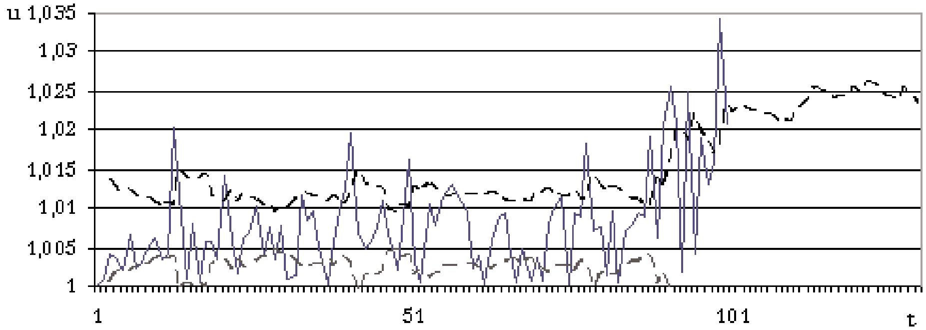

Рис. 4. **Результат моделювання ряду u,** *авторська розробка*

Таким чином, побудовано модель параметра u_i на основі garch(1,1) процесу. Аналогічно знайдемо параметри моделі для d_i (табл. 3).

Таблиця 3. **Параметри garch-моделі для ряду d, авторська розробка**

Параметр	Значення	Т-статистика
C	0.99121	1079.6805
K	2.6299e-005	1.3402
GARCH(1)	0	0
ARCH(1)	1	2.2744

$$d_i = 0{,}99121 + \varepsilon d_i;$$
$$M_{\varepsilon d_{i-1}}(\varepsilon d_i) = 0;$$
$$D_{\varepsilon d_{i-1}}(\varepsilon d_i) = 0{,}000026299 + \varepsilon u^2_{i-1}.$$

Спробуємо порівняти дану модель з garch(1,2) процесом $D_{\varepsilon d_{i-1}}(\varepsilon d_i) = \beta_0 + + \beta_1 \times \varepsilon d^2_{i-1} + \beta_2 \times \varepsilon d^2_{i-2} + \eta \times \sigma d^2_{i-1}$. Використання критерію знову ідентифікує недостатність статистичної значущості другої моделі порівняно з першою.

На рис. 5 наведено результат моделювання та прогнозування ряду $\{d_i\}$ поряд з реальними даними.

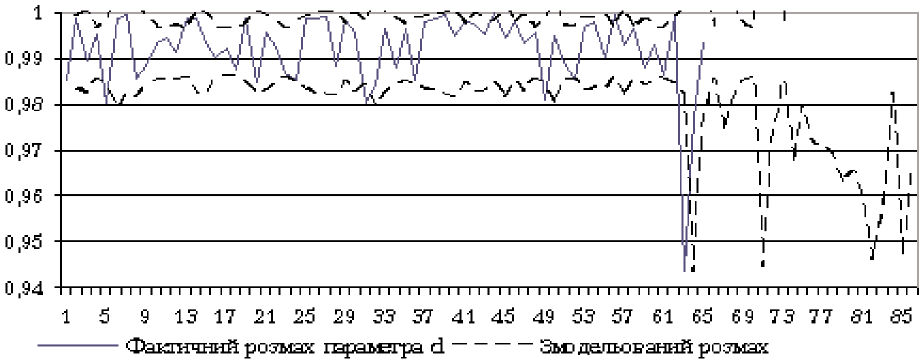

Рис. 5. **Результат моделювання ряду d,** *авторська розробка*

Маючи моделі для параметрів u_i, d_i, перейдемо до прогнозування ціноутворення на основі моделі (4) на k = 44 періодів. У результаті оцінювання класичної біномінальної моделі маємо такі параметри: u = 1,008, d = 0,992, pr = 0,6. Значення ймовірності зростання ціни pr = 0,6 залишимо і для модифікованої моделі, оскільки щодо його зміни не вводилося ніяких припущень. Модифікована модель має ненормальний розподіл цін на горизонті планування, тому прогнозування проведемо методом Монте-Карло симуляції.

Для адаптації даного методу уточнимо деякі положення симуляції:

1. Параметри моделі (5) та (6) εu_i та εd_i $i = \overline{1,k}$ змінюються у кожний t_i момент часу випадковим чином з розмахом, який спостерігався за останні 5 періодів у фактичних даних.

2. Оскільки параметри εu_i та εd_i з попереднього пункту змінюються випадковим чином, то дисперсія набуває значень більших або менших від нуля з однаковою ймовірністю.

3. Через специфіку біноміальної моделі $\forall i = \overline{1,k}$, якщо прогнозоване u_i < 1, то u_i = 1, а якщо d_i > 1, то d_i = 1, тому що ці параметри відповідають за зміну ціни та за визначенням (3) не можуть набувати вказаних значень.

4. Зростання ціни у кожний t_i момент часу відбувається з біноміальною ймовірністю, що в даному випадку складає 60%.

Для оцінювання розподілу цін в момент часу t_k змоделюємо 3000 спостережень. Результати прогнозування за допомогою класичної та модифікованої моделі наведемо на рис. 6.

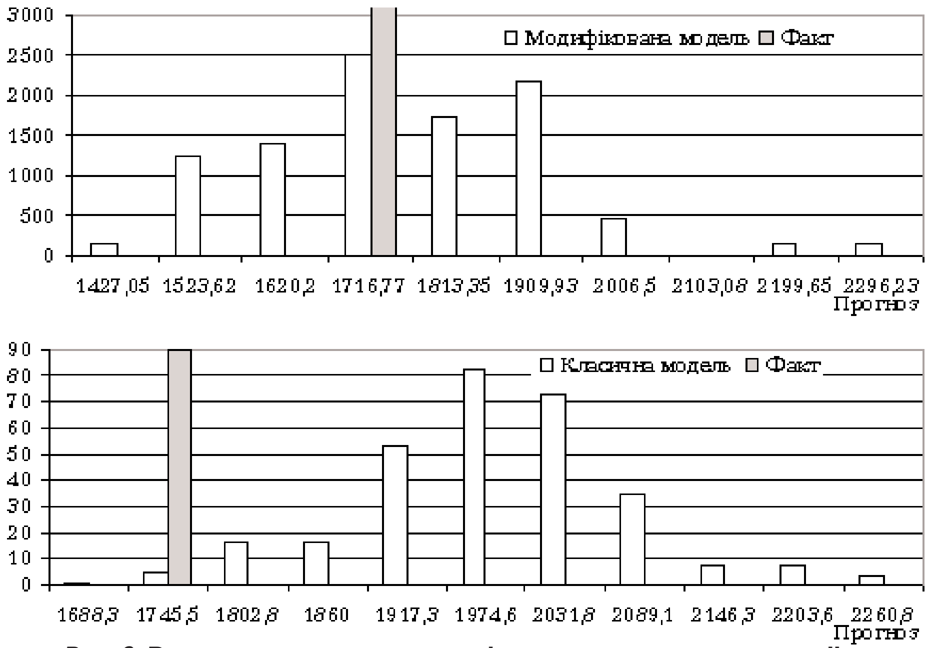

Рис. 6. **Результат прогнозування ціни за допомогою класичної та модифікованої моделей,** *авторська розробка*

Як видно з рис. 6, модифікована модель дала кращий результат прогнозування, ніж класична.

Висновки та напрямки подальшої роботи. Таким чином, була розроблена модифікована біноміальна модель ціноутворення активів й адаптовано метод Монте-Карло симуляції для прогнозування ціни за вказаною моделлю. Для кращого розуміння переваг даної моделі над класичною розглянемо рух ціни модельованого активу – золота – за 44 періоди (що, за винятком святкових днів, складає 2 місяці) (рис. 7).

Рис. 7. **Фактичне значення руху ціни за вересень-жовтень 2011 року** [2]

Якщо порівнювати динаміку ціни за січень-серпень (рис. 1) та вересень-жовтень (рис. 7), то помітно, що на початку вересня тенденція до зростання змінилася на спад. Сигналом до цього були значні цінові коливання наприкінці серпня на фоні більш-менш стабільного зростання у попередні місяці, які вдалося вловити модифікованій моделі. Класичній же моделі вдалося врахувати лише загальну тенденцію до зростання, через що вона дала завищені прогнозовані значення поряд з фактичними.

Отже, модифікована модель є результативною для оцінювання моменту зміни напрямку руху ціни. Але все ще залишається відкритим питання щодо кластеризації аналізованих даних і моделювання ймовірності pr(3), значення якої можуть значно вплинути на отриманий результат прогнозування.

1. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. – М.: Мир, 1974. – 406 с.

2. Лондонські фіксинги цін на золото за 2011 рік // www.gold9999.ua.

3. *Уотшем Т.Дж., Паррамоу К.* Количественные методы для вузов / Пер. с англ. под ред. М.Р. Ефимовой. – М.: Финансы; ЮНИТИ, 1999. – 527 с.

4. *Яковенко О.Г.* Математичні моделі процесів активності в економічній динаміці: Монографія. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2010. – 196 с.

5. *Яковенко О.Г., Заворотченко К.Н.* Моделирование ценообразования опциона на основе биномиальной модели с учетом вероятности роста цены базового актва // Вісник Дніпропетровського університету.– Серія: Економіка.– 2011.– Т. 19, №10/1. – С. 252–259.

6. *Black, F., Scholes, M.* (1972). The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency. Journal of Finance, 27: 399–417.

7. *Bollerslev, T.* (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of Econometrics, 31: 309–328.

8. *Cox, J.C., Ross, S.A., Rubinstein, M.* (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. Journal of Financial Economics, 7: 229–263.

9. *Engle, R.F.* (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the UK inflation. Econometrica, 50: 987–1008.

10. *Hamilton, J.D.* (1994). Time Series Analysis. Princeton University Press, Princeton.

11. *Markowitz, H.M.* (1952). Portfolio Selection. Journal of Finance, 7: 77–91.

12. *Merton, R.C.* (1973). Theory of Rational Options Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science, 4: 141–183.

13. *Sharpe, W.* (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. Journal of Finance, 19: 425–442.

14. *Tobin, J.* (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. Review of Economic Studies, 25: 65–86.

Стаття надійшла до редакції 30.12.2011.