

Надір І.-о. Алішов (Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова
НАН України, м. Київ, Україна)

Геннадій Г. Швачич (Національна металургійна академія України,
м. Дніпропетровськ, Україна)

Максим О. Ткач (Національна металургійна академія України,
м. Дніпропетровськ, Україна)

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ВУЗЛІВ БАГАТОПРОЦЕСОРНОЇ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ*

У статті визначено оптимальне число вузлів у багатопроцесорних обчислювальних системах. Основну увагу приділено дослідженню ефективності й прискорення обчислень за рахунок застосування багатопроцесорних обчислювальних систем. Виведено аналітичні співвідношення для отримання оптимального числа вузлів багатопроцесорної системи через її параметри.

Ключові слова: багатопроцесорна обчислювальна система, прискорення, ефективність, коефіцієнт завантаження обчислювальної мережі, обчислювальні вузли.

Форм. 18. Рис. 1. Літ. 14.

Надир И.-о. Алишов (Институт кибернетики имени В.М. Глушкова
НАН Украины, г. Киев, Украина)

Геннадий Г. Швачич (Национальная металлургическая академия Украины,
г. Днепропетровск, Украина)

Максим О. Ткач (Национальная металлургическая академия Украины,
г. Днепропетровск, Украина)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЧИСЛА УЗЛОВ МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ

В статье определено оптимальное число узлов в многопроцессорных вычислительных системах. Основное внимание уделено исследованию эффективности и ускорению вычислений за счет применения многопроцессорных вычислительных систем. Выведены аналитические соотношения для получения оптимального числа узлов многопроцессорной системы через ее параметры.

Ключевые слова: многопроцессорная вычислительная система, ускорение, эффективность, коэффициент загрузки вычислительной сети, вычислительные узлы.

Nadir I.-o. Alishov (Glushkov Institute of Cybernetics
of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine)

Gennadiy G. Shvachych (National Metallurgical Academy
of Ukraine, Dnipropetrovsk, Ukraine)

Maksym A. Tkach (National Metallurgical Academy
of Ukraine, Dnipropetrovsk, Ukraine)

DETERMINING THE OPTIMUM NUMBER OF NODES IN THE MULTIPROCESSOR COMPUTATION SYSTEM FOR SOLVING TASKS OF THE SAME CLASS

* статтю підготовлено на основі доповіді на XII-му міжнародному науковому семінарі «Сучасні проблеми інформатики в управлінні, економіці, освіті та екології» (1–5 липня 2013 р., оз. Світязь – Київ).

The article determines the optimum number of nodes in multiprocessor computation systems. Special attention is paid to studying the efficiency and calculations speedup by means of using multiprocessor computation systems. Analytical correlations are obtained for getting the optimum number of nodes in the multiprocessor system through its parameters.

Keywords: multiprocessor computation system; speedup; efficiency; computation network load factor; computation nodes.

Постановка проблеми. Практично одночасно з появою перших багатопроекторних систем виникла необхідність в оцінюванні їхньої ефективності, продуктивності, швидкодії, а пізніше – в порівнянні подібних обчислювальних систем за переліченими критеріями. Саме питанням швидкодії та продуктивності приділяється основна увага у конструюванні багатопроекторних систем. Такий підхід орієнтовано, наприклад, на розробку нових технологічних процесів (коли час обчислень є критичною величиною), на аналіз забруднення навколишнього середовища, також завдяки його застосуванню можна розв'язувати різноманітні багатовимірні нестационарні задачі [4; 6; 7; 9; 13]. Крім того, задачі такого типу часто доводиться розв'язувати в медицині, військовій техніці тощо.

Одна з основних проблем використання багатопроекторної системи для розв'язування задач типу, що розглядається в даній роботі, може бути сформульована таким чином: маємо різницеву сітку розмірності M , час обчислення задачі, яка розв'язується з використанням однопроекторної системи, позначеної величиною t . Це ключовий параметр. Необхідно істотно зменшити час обчислень, зберігаючи значення величини M . Тобто потрібно зменшити час розрахунків шляхом збільшення кількості вузлів багатопроекторної системи. При цьому область обчислень рівномірно розподіляється між вузлами багатопроекторної системи.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Значний інтерес у практиці паралельних обчислень викликає оцінювання величини можливого підвищення продуктивності з урахуванням якісних характеристик самого програмного продукту і технічних можливостей багатопроекторної обчислювальної системи. В ідеальному випадку можна передбачити, що розв'язування будь-якої задачі із застосуванням кількості процесорів n має відбуватись у n разів швидше, ніж на одному процесорі. Проте насправді такого прискорення практично ніколи не вдається досягти. Причина цієї обставини ілюструється законом Амдаля [14]. При дослідженні показників ефективності застосовано закон Амдаля для розв'язання оберненої задачі, що полягає у визначенні величини f (частини операцій алгоритму, яку розпаралелювати неможливо) за отриманими експериментально даними продуктивності системи. Це дало можливість у кількісному вимірі оцінити досягнуту ефективність розпаралелювання. З урахуванням зазначеного і було розроблено загальний підхід до оцінювання показників ефективності модульної багатопроекторної системи.

Відомо також, що ефективність паралелізації обчислень суттєво залежить від багатьох чинників. Один з найважливіших – це специфіка пересилання даних між сусідніми вузлами багатопроекторної системи. Це найповільніша частина алгоритму, яка може звести нанівець ефект від збільшення кількості

використовуваних процесорів. Ці питання вважаються вирішальними в процедурі моделювання широкого класу задач за допомогою модульних багато-процесорних систем і сьогодні вони успішно вирішуються багатьма дослідниками [1; 3; 12].

Невирішені частини загальної проблеми. Методи аналізу ефективності багатопроцесорних систем, які застосовуються, не дозволяють визначити оптимальне число її вузлів для розв'язування певного класу задач. У той же час не набули належного розвитку дослідження, присвячені аналізу впливу мережевого інтерфейсу на ефективність модульних багатопроцесорних обчислювальних систем. Крім того, для оцінювання ефективності обчислювальної багатопроцесорної системи не подаються основні аналітичні співвідношення через параметри досліджуваної системи.

Мета дослідження полягає в подальшому розвитку підходу, пов'язаного з розробкою методики оцінювання ефективності багатопроцесорної модульної обчислювальної системи. При цьому основна увага приділяється особливостям впливу на даний показник мережевого інтерфейсу розробленої системи. Також необхідно вивести аналітичні співвідношення для визначення оптимального числа вузлів системи при застосуванні до різних режимів її функціонування. Для зручності оцінювання ефективності обчислювальної багатопроцесорної системи необхідно вивести основні аналітичні співвідношення через її параметри.

Основні результати дослідження. Для класу задач, які розв'язуються в даному дослідженні, всі обчислення виконують на базі різницевої сітки, через що при аналізі ефективності багатопроцесорної системи найважливішим параметром виявився час розрахунку однієї ітерації (T_{it}) стосовно області обчислень. В умовах застосування багатопроцесорної системи цей показник визначався на підставі такого співвідношення:

$$T = T_n + T_{ex}, \quad (1)$$

де $T_n = \frac{T_{it}}{N}$ – величина, що означає час розрахунку однієї ітерації при використанні N обчислювальних вузлів, с; T_{ex} – час граничного обміну даними між вузлами системи, с. Час розрахунку однієї ітерації при використанні в системі N обчислювальних вузлів можна уточнити за формулою:

$$T_n = \frac{E_i \times E_y \times K_R}{N \times V_c}, \quad (2)$$

де E_i – довжина масиву граничної області обчислень, одночасно ця величина визначає довжину різницевої сітки по осі абсцис; E_y – довжина різницевої сітки по осі ординат; K_R – обсяг однієї різницевої комірки типу Real*8 (64 bit); параметр V_c показує швидкість обчислень при розв'язуванні задач даного класу з використанням пропонованого процесора.

Величину T_{ex} можна визначати за такою формулою:

$$T_{ex} = \frac{m \times (N - 1) \times E_i \times K_R}{k \times d \times V_p}, \quad (3)$$

де m може дорівнювати 1 в умовах одностороннього режиму граничного обміну даними або 2, коли він двосторонній; V_p – пропускна здатність мережі в

системі, Гбіт/с; k – кількість каналів зв'язку обчислювальної мережі, які працюють одночасно (кількість обчислювальних мереж); d – напівдуплексний ($d = 1$) або дуплексний ($d = 2$) режим роботи обчислювальної мережі в багато-процесорній системі.

У зазначених умовах можна обчислити загальний час розрахунку однієї ітерації, до складу якого буде входити, власне, час розрахунку однієї ітерації при використанні N вузлів багатопроцесорної системи і час граничного обміну даними залежно від кількості вузлів N , тобто:

$$T = \frac{E_i \times E_v \times K_R}{N \times V_c} + \frac{m \times (N-1) \times E_i \times K_R}{k \times d \times V_p}. \quad (4)$$

Аналіз співвідношення (4) показує, що після розподілу області обчислень між вузлами вдалося зменшити обсяг розрахунків, які виконуються кожним його лезом. Унаслідок того, що вузли багатопроцесорної системи працюють паралельно, загальний час рахунку ітерації стає меншим. Разом з тим, із збільшенням вузлів у системі зростає також обсяг граничних даних, а отже, збільшується час обміну інформацією між вузлами.

Для розрахунку прискорення й ефективності системи за основу були взяті загальноприйняті в теорії паралельних обчислень формули. Було виведено аналітичне співвідношення для оцінювання ефективності багатопроцесорної системи через її параметри, тобто:

$$Q = \frac{T_{it} \times k \times d \times V_n \times N}{T_{it} \times k \times d \times V_n \times N + N^2 \times m \times (N-1) \times E_i \times K_R}. \quad (5)$$

Показники ефективності багатопроцесорної системи одночасно визначались за формулами (3–5) і за допомогою експериментальних розрахунків. Було помічено збіг отриманих результатів, що пояснюється характером обчислень. На рис. 1 зображено графіки моделювання залежності часу розрахунку однієї ітерації від кількості вузлів багатопроцесорної системи. Як видно з рис. 1, час розрахунку однієї ітерації при збільшенні числа вузлів зменшується за гіперболічною залежністю (крива 1). Час граничного обміну даними при збільшенні числа вузлів системи збільшується за лінійним законом (лінія 2). Загальну картину зміни значення часу обчислення однієї ітерації в багато-процесорній системі ілюструє залежність, відображена кривою 3. Аналіз кривої свідчить, що на першому етапі час розрахунків зменшується при збільшенні кількості вузлів системи. Подібний результат, здавалося б, і був передбачений. Проте зменшення такого часу відбувалося до певної межі. Якщо, наприклад, кількість вузлів перевищувала 6, то загальний час розрахунків починає зростати. Відбувалося це на тлі збільшення обсягу даних, які пересилаються між вузлами. Таким чином, за умови постійного розміру сітки число лез у системі повинно бути не більше 6. При цьому час, витрачений на розв'язування задачі, зменшився зі 100 с до 30,81 с.

У другій частині досліджень набули подальшого розвитку методи аналізу ефективності багатопроцесорної модульної обчислювальної системи. Причому основна увага приділялась особливостям впливу мережевого інтерфейсу розробленої системи на показники її ефективності. Спочатку було розглянуто особливості формування архітектури мережевого інтерфейсу багатопроцесор-

ної системи й основні режими його роботи. Для оцінювання процесів, що відбуваються в системі під час передачі потоків інформації, порівнювалася пропускна спроможність мережі системи й пропускна спроможність комутатора. Ця процедура була необхідною для оптимального підбору компонентів мережевого інтерфейсу багато процесорної системи. У зв'язку із цим для зручності досліджень було введено параметр загальної пропускної спроможності мережі багато процесорної системи за специфікацією виробника (V_s), який визначається за формулою:

$$V_s = V_p \times N \times d, \quad (6)$$

де N – число вузлів системи; V_p – протокольна пропускна спроможність її мережі, Гбіт/с. При такому підході вже можна порівнювати величини загальної пропускної спроможності мережевого інтерфейсу системи (V_s) і пропускної спроможності комутатора (V_b). Для подальшого аналізу роботи мережевого інтерфейсу багато процесорної системи було введено коефіцієнт пропускної спроможності мережі системи (k_s). Його величина визначається за таким співвідношенням:

$$k_s = \frac{V_s}{V_b}. \quad (7)$$

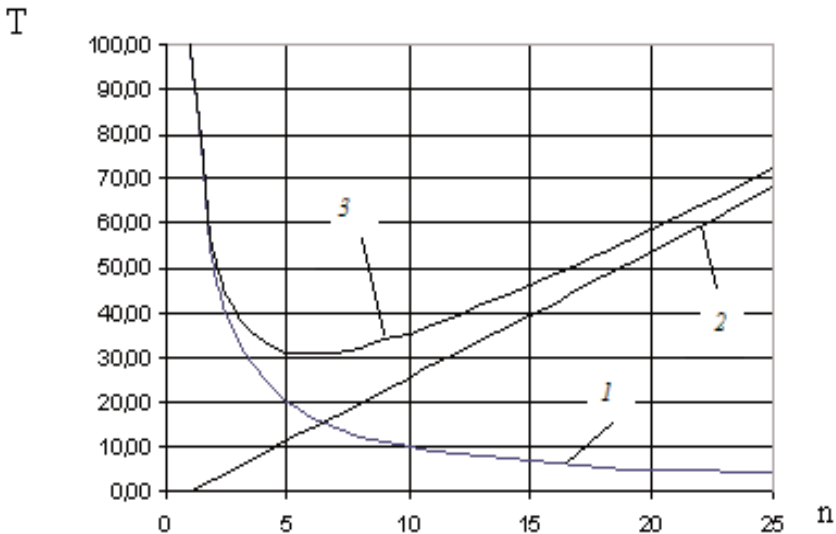


Рис. 1. Криві залежності часу розрахунку однієї ітерації від кількості вузлів багато процесорної системи, авторська розробка

З урахуванням формули (7):

$$k_s = \frac{V_p \times N \times d}{V_b}. \quad (8)$$

З метою подальшого використання цього підходу було запропоновано поняття коефіцієнта пропускної спроможності комутатора (k_b) та виведено формулу для його визначення:

$$k_b = \frac{V_b}{V_p \times N \times d}. \quad (9)$$

Для відображення повної картини процесів було введено визначення, а потім, з їх урахуванням, виконано більш детальний аналіз основних мережевих характеристик багатопроекторної системи.

Визначення 1. *Режим дефіциту мережевого інтерфейсу багатопроекторної системи* – це такий варіант функціонування мережі, при якому виконується нерівність $k_s < k_b$.

Визначення 2. *Режим профіциту мережевого інтерфейсу багатопроекторної системи* являє собою такий варіант функціонування мережі, при якому виконується нерівність $k_s > k_b$.

Встановлення оптимального числа вузлів кластерної системи. Слід зазначити, що обчислювальними методами розв'язування задачі теплопровідності слугували числово-аналітичні схеми підвищеного порядку точності, висвітлені в [8; 10]. За основу для визначення часу граничного обміну даними в кластерній системі при роботі в режимі дефіциту мережевого інтерфейсу було уточнено співвідношення (3), яке набуло вигляду:

$$T_{ex1} = \frac{m \times (N-1) \times E_i \times K_R \times K_{pr}}{k \times d \times V_p}. \quad (10)$$

Для обчислення часу граничного обміну даними при роботі кластерної системи в режимі профіциту її мережевого інтерфейсу застосуємо співвідношення:

$$T_{ex2} = \frac{m \times (N-1) \times E_i \times K_R \times N \times K_{pr}}{k_m \times d \times V_b}. \quad (11)$$

Далі, розглядаючи багатопроекторну систему в умовах експерименту, встановимо в ній кількість вузлів, що може забезпечити найбільш ефективне розв'язування задачі. В працях [2; 5] показано, що швидкість обчислень зростатиме приблизно до моменту, коли

$$T_{calc} \approx T_{ex}. \quad (12)$$

Таким чином, на підставі співвідношення (12) можна розрахувати кількість вузлів у кластерній обчислювальній системі, потрібну для ефективного розв'язування задачі. Даний етап досліджень має на меті зменшення загального часу розрахунку шляхом розпаралелювання програми. Очевидно, що при цьому загальний розмір різницевої сітки не залежить від числа обчислювальних вузлів кластерної системи. Враховуючи співвідношення (9), отримують аналітичні вирази для визначення оптимального числа вузлів кластерної системи при її роботі в режимі дефіциту мережевого інтерфейсу, тобто

$$\frac{T_{calc}}{N} \approx \frac{m \times (N-1) \times E_i \times K_R \times K_{pr}}{k \times d \times V_p}. \quad (13)$$

Профіцит мережевого інтерфейсу розраховується за формулою:

$$\frac{T_{calc}}{N} \approx \frac{m \times (N-1) \times E_i \times K_R \times N \times K_{pr}}{k_m \times d \times V_b}. \quad (14)$$

Користуючись виразами (13) і (14), можна отримати два рівняння відносно N для визначення оптимального числа вузлів кластерної системи, при яко-

му загальний час обчислень, потрібний для розв'язування задачі, буде мінімальним. У зв'язку з цим рівняння (13) зводиться до квадратичного вигляду, тобто:

$$N^2 - N - \frac{E_y \times k \times d \times V_p}{m \times V_c} = 0. \quad (15)$$

Для зручності аналізу рівняння (15) запишемо таким чином:

$$N^2 - N - \lambda = 0. \quad (16)$$

У рівнянні (16) $\lambda = f(E_y, V_p, 1/V_c)$. Цю величину можна трактувати як коефіцієнт узгодженості можливостей обраних процесорів, мережевого інтерфейсу і величини області обчислень, коли система працює в режимі дефіциту мережевого інтерфейсу. Крім того, необхідно підкреслити, що відповідність можливостей кластерної системи характеру розв'язуваних задач вимагає узгодження всіх складових, які входять у значення величини λ . Проведемо аналіз цього коефіцієнта. На перший погляд, результат виявився дещо парадоксальним. Він свідчить про те, що коефіцієнт узгодженості λ , як і оптимальне число лез у кластерній системі, не залежить від розміру області обміну даними. Таке твердження можна пояснити тим, що розподіл області обчислень між вузлами кластерної системи виконувався при незмінному її розмірі. Це означає, що співвідношення часу, який затрачається на обробку даних цієї області, і часу їх пересилання теж залишався незмінним і таким, що не залежить від її розміру. Другий, дуже важливий висновок полягає в тому, що оптимальне число лез у кластерній системі, яке забезпечує найбільшу його швидкодію, зменшується із збільшенням обчислювальної потужності процесорів, що входять у неї. Таке твердження стає цілком зрозумілим, коли враховувати, що мережевий обмін даними між вузлами кластерної системи тим помітніше буде гальмувати загальний процес обчислень, чим менше часу буде витратитися безпосередньо на розв'язування певної задачі.

Розв'язком рівняння (15) будуть два корені, один з них від'ємний, а інший – додатний. Виходячи з поставлених фізичних умов завдання, приймається додатний корінь, значення якого дорівнює 8, отже $N = 8$. Варто зауважити, що такий результат задовольняє нерівність, яка визначає умови функціонування кластерної системи в режимі дефіциту мережевого інтерфейсу [2].

Рівняння (11) зводиться до кубічного вигляду, тобто:

$$N^3 - N^2 - \frac{E_y \times k_m \times d \times V_b}{m \times V_c} = 0. \quad (17)$$

Для зручності аналізу запишемо його таким чином:

$$N^3 - N^2 - \mu = 0. \quad (18)$$

У рівнянні (15) $\mu = f(E_y, V_p, 1/V_c)$. Дану величину можна вважати коефіцієнтом узгодженості можливостей обраних процесорів, мережевого інтерфейсу і величини області обчислень, коли система працює в режимі профіциту мережевого інтерфейсу. Проаналізуємо значення цього коефіцієнта. Можна зробити висновок, що оптимальне число лез у кластерній системі здатне забезпечити найбільшу її швидкодію, буде залежити від величини області обчислень, можливостей комутатора й обчислювальної потужності процесорів, з яких

складається кластерна система. Варіація зазначених параметрів і дозволяє обрати відповідну кількість лез при роботі системи в режимі профіциту мереженого інтерфейсу.

Унаслідок розв'язку рівняння (17) буде отримано 3 корені: 2 уявні і 1 дійсний. Дійсний корінь відповідає такій кількості вузлів: $N = 33$. Проте аналіз цього результату свідчить, що він не задовольняє умову функціонування кластерної системи в режимі профіциту мережевого інтерфейсу [2]. Проаналізувавши отримані результати моделювання, можна зробити висновок, що в умовах задачі, яка досліджується, оптимальне число лез кластерної системи буде відповідати $N = 8$.

Висновки. Клас задач, який розглядається в даній статті, розв'язується за допомогою багатопроцесорної обчислювальної системи. Таким чином створено передумови для кількісного оцінювання ефективності багатопроцесорної системи. Оптимальне число вузлів у кластерній системі, при якому досягається максимальна ефективність розпаралелювання, $N = 8$. Такий розмір кластера забезпечить у 4,28 раза швидше розв'язування задачі, ніж на одному комп'ютері. Як показують розрахункові дані, запропонований режим роботи кластера дозволив не тільки підвищити ефективність системи, але й суттєво скоротити час обчислень – з 83,11 до 19,52 с. Якщо така величина прискорення обчислень не в змозі забезпечити контроль температурних полів, то в такому випадку необхідно застосовувати більш потужні процесори. Зважаючи на це, перспективні дослідження будуть спрямовані на висвітлення зазначених питань.

1. *Баканов В.М.* Параллельные вычисления: Учеб. пособие. – М.: МГУПИ, 2007. – 127 с.
2. *Башков Е.А., Иващенко В.П., Швачич Г.Г.* Перспективы применения современных коммуникационных технологий и исследование их влияния на эффективность многопроцессорных вычислительных систем // Наукові праці Донецького національного технічного університету. – Серія: Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка. – 2011. – Вип. 14. – С. 100–112.
3. *Букатов А.А., Дацюк В.Н., Жегуло А.И.* Программирование многопроцессорных вычислительных систем. – Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2003. – 208 с.
4. *Воеводин В.В.* Математические модели и методы в параллельных процессах. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
5. Информационные системы и технологии: Монография / В.П. Иващенко, Е.А. Башков, Г.Г. Швачич и др. – Красноярск: Научно-инновационный центр, 2011. – 302 с.
6. *Ковеня В.М., Яненко Н.Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. – Новосибирск: Наука, 1981. – 304 с.
7. *Коздоба Л.А.* Вычислительная теплофизика. – К.: Наукова думка, 1992. – 224 с.
8. *Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
9. *Роуч П.* Вычислительная гидромеханика / Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
11. *Хохлюк В.И.* Параллельные алгоритмы целочисленной оптимизации. – М.: Радио и связь, 1987. – 224 с.
12. *Шпаковский Г.И.* Организация параллельных ЭВМ и суперскалярных процессоров: Учеб. пособие. – Минск: Белгосуниверситет, 1996. – 296 с.
13. *Яненко Н.Н.* Метод мелких шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 196 с.
14. *Amdahl, G.* (1967). Validity of the single-processor approach to achieving large-scale computing capabilities. Proc. 1967 AFIPS Conf., AFIPS Press, 30: 483–485.

Стаття надійшла до редакції 29.07.2013.