Заинелхриет Мурзабеков, Марек Милош, Камшат Тусупова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОИСКА СТАЦИОНАРНОГО СОСТОЯНИЯ В ТРЕХСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КЛАСТЕРА

В статье рассмотрена трехсекторная экономическая модель кластера (ТЭМК). Задача поиска оптимального стационарного состояния ТЭМК, при котором максимальными являются результаты деятельности целого кластера, сводится к задаче нелинейного программирования. Для решения поставленной задачи использованы множители Лагранжа специального вида. С помощью алгебраических преобразований получена функция, нулевая точка которой определяет решение задачи поиска оптимального стационарного состояния ТЭМК. Полученный алгоритм решения оптимального стационарного состояния кластера использован для конкретного примера.

Ключевые слова: *экономический кластер; трехсекторная модель экономики; стационарное состояние системы; метод множителей Лагранжа.*

Форм. 48. Рис. 1. Табл. 2. Лит. 12.

Заінелхріет Мурзабеков, Марек Мілош, Камшат Тусупова

ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ ПОШУКУ СТАЦІОНАРНОГО СТАНУ ТРЬОХСЕКТОРНОЇ ЕКОНОМІЧНОЇ МОДЕЛІ КЛАСТЕРА

У статті розглянуто трьохсекторну економічну модель кластера (ТЕМК). Задача пошуку оптимального стаціонарного стану ТЕМК, за якого максимальними є результати діяльності кластера в цілому, зводиться до задачі нелінійного програмування. Для вирішення поставленої задачі використано множники Лагранжа спеціального виду. За допомогою алгебраїчних перетворень отримано функцію, нульова точка якої визначає рішення задачі пошуку оптимального стаціонарного стану ТЕМК. Отриманий алгоритм рішення оптимального стаціонарного стану кластера використано на конкретному прикладі.

Ключові слова: *економічний кластер; трьохсекторна модель економіки; стаціонарний стан системи; метод множників Лагранжа.*

Zainelkhriet N. Murzabekov[1], Marek Milosz[2], Kamshat B. Tussupova[3]

SOLUTION OF STEADY STATE SEARCH PROBLEM IN THREE-SECTOR ECONOMIC MODEL OF A CLUSTER

The paper explores a three-sector economic model of a cluster (TSEMC). The problem of TSEMC's optimum steady state search in which work results of the whole cluster are maximized, is reduced to the problem of nonlinear programming. To solve the problem Lagrange multipliers of a special kind are used. By means of algebraic transformations we receive a function the zero point of which defines sequential solution algorithm for the problem of TSEMC's optimum steady state search. Received solution algorithm for the cluster's optimum steady state is applied to a discrete case.

Keywords: *economic cluster; three-sector model of economy; steady state of the system; Lagrange multipliers method.*

Постановка проблемы. Особый интерес к кластерным системам связан с тенденциями группировки и консолидации капиталов, которые могут привести к активизации процессов интеграции предприятий. Стержнем эффективного функционирования кластера как экономической системы станет процесс группового стратегического планирования. В этих условиях необходима

[1] Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.
[2] Lublin University of Technology, Poland.
[3] Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.

теоретическая и методическая проработка вопросов координации организаций науки, производства и других экономических сфер. Пересмотр выбора объекта стратегического планирования определяет необходимость создания новых схем и процедур группы процессов планирования управления проектами применительно к кластерам.

Анализ последних исследований и публикаций. Одним из ученых, детально изучавших вопросы формирования и функционирования кластеров, был М. Портер [4]. Исследованию нынешнего положения организованных в Казахстане кластеров, представляющих различные сферы деятельности и состояния, их развития, были посвящены статьи Г. Ажиметовой [5], Х.С. Ейтзен [9]. Математическая модель трехсекторной экономики рассмотрена в работах А.В. Колемаева [2], в публикациях С. Де [7], А.А. Джусупова [1], О. Думитру [8], Ж.С. Жанг [12], Ш. Жоу [11], М.Н. Калимолдаева [1], М. Ксю [11], Д. Лоретти [8], Е.В. Малишевского [1], Н. Михаела [8], З.Н. Мурзабекова [1], П. Сен [10].

Целью исследования является поиск оптимального стационарного состояния кластера, в котором состояние ТЭМК стационарно и величина удельного выпуска потребительского сектора максимальна во всех допустимых областях изменения управляющих параметров.

Основные результаты исследования. В настоящее время одним из приоритетных направлений в мировой экономике, в том числе и в Казахстане [5; 9], является кластеризация. Кластер указывает на новые роли компаний, правительств и других субъектов экономики, стремящихся к повышению конкурентоспособности [4]. В процессе перехода (или развития) к экономике, базирующейся на кластерах, государство, реализуя общенациональные цели, стимулирует развитие кластеров в различных отраслях.

Для разработки правовых и экономических рычагов, а также методов их оптимального применения, необходимо создавать и исследовать экономические модели кластеров, как замкнутые, так и открытые [7; 10; 11].

В этой работе представлена математическая модель замкнутого кластера. Модель учитывает изменение ресурсов в трех основных секторах, присущих кластерам [8; 12]. Каждый из трех секторов производит свой продукт. ***Материальный сектор*** производит предметы труда (сырье, энергоресурсы, полуфабрикаты и другие расходуемые материалы), ***фондосоздающий*** – средства труда (здания, сооружения, машины, оборудование и другие товары производственного назначения), а ***потребительский*** – предметы потребления [2]. Между секторами кластера распределяются ресурсы, влияющие на производительность труда секторов и целого кластера. К ним относятся: инвестиционные, материальные и трудовые ресурсы, которыми распряжется кластер.

Математическая постановка задачи. Для построения ТЭМК обозначим через i сектора модели, где $i = 0$ – материальный, $\mathrm{i} = i$ – фондосоздающий и $i = 2$ – потребительский.

Примем также ряд упрощений.

Во-первых, ТЭМК рассматривается как замкнутая модель. Это означает, что в кластер не поставляется никаких ресурсов из внешней среды, а он поставляет во внешнюю среду только предметы потребления.

Во-вторых, принимается, что спрос на предметы потребления является неограниченным.

В-третьих, все субъекты кластера кооперируются для получения как можно больше предметов потребления. Все частные интересы отдельных секторов (и входящих в них предприятий) подчинены этой цели. Из этого вытекает, что кластер распределяет все доступные ресурсы полностью.

Экономические условия функционирование ТЭМК задаются определенными коэффициентами. К ним относятся:

A_i – коэффициент нейтрального технического прогресса, это коэффициент, который соизмеряет ресурсы с выпуском;

α_i – коэффициент эластичности по фондам показывает, насколько процентов увеличивается выпуск, если фонд возрастает на 1%;

β_i – прямые материальные затраты на единицу продукции i-го сектора;

$\lambda_i = \mu_i + \nu$ – коэффициент износа фондовооруженности i-го сектора;

μ_i – доля выбывших за год основных производственных фондов;

ν – годовой темп прироста числа занятых.

Примем также, что технологический уклад считается постоянным и задается с помощью линейно однородных неоклассических производственных функций (ПФ) [2], которые выражают зависимость результата производства от затраты ресурсов. При описании модели с помощью ПФ на вход поступают ресурсы, а на выходе получаются результаты в виде годовых объемов производства продукции. В качестве ресурсов рассмотрим инвестиционный капитал K и число занятых L, а в качестве результата – выпуск продукции X. Таким образом, ПФ запишем в виде:

$$X_i = F_i(K_i, L_i),\ i = 0,1,2. \qquad (1)$$

Предполагается также, что за каждым сектором закреплены основные производственные фонды (ОПФ), в то время как трудовые ресурсы и инвестиции можно свободно перемещать между секторами. Изменение за период Δt ОПФ i-го сектора состоит из износа ($-\mu_i K_i$) и прироста за счет капиталовложений инвестиций (I_i), т.е.:

$$K_i(t+\Delta t) - K_i(t) = [-\mu_i K_i(t) + I_i(t)]\Delta t, i = 0,1,2, \qquad (2)$$

при $\Delta t \to 0$ получаем дифференциальные уравнения для ОПФ секторов [2]:

$$\frac{dK_i}{dt} = -\mu_i K_i + I_i, K_i(0) = K_i^0, i = 0,1,2. \qquad (3)$$

Введем следующие обозначения:

$\theta_i = \dfrac{L_i}{L}$ – доли секторов в распределении трудовых ресурсов;

$s_i = \dfrac{I_i}{X_1}$ – доли секторов в распределении инвестиционных ресурсов;

$f_i(k_i) = \dfrac{X_i}{L_i}$ – производительность труда i-го сектора.

$k_i = \dfrac{K_i}{L_i}$ — фондовооруженность секторов;

$x_i = \theta_i f_i(k_i)$ — удельный выпуск секторов.

Тогда уравнения (3) запишем в следующем виде для фондовоорженности секторов:

$$\frac{dk_i}{dt} = -\lambda_i k_i + \frac{s_i}{\theta_i} x_1, \lambda_i > 0, k_i(0) = k_i^0, i = 0,1,2. \quad (4)$$

Примем дополнительные предположения, что все ресурсы в кластере распределяются полностью. Это приводит к следующим ограничениям:

трудовой баланс: $\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, 0 < \theta_i < 1;$ (5)

инвестиционный баланс: $s_0 + s_1 + s_2 = 1, 0 < s_i < 1;$ (6)

материальный баланс: $(1-\beta_0)x_0 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \beta_i > 0.$ (7)

Уравнения (4)—(7) [1; 2] составляют общую ТЭМК. Уточняя ТЭМК, рассмотрим случай, когда ПФ являются функциями Кобба-Дугласа [2; 6]:

$$X_i = F_i(K_i, L_i) = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i}, i = 0,1,2, \quad (8)$$

тогда

$$f_i(k_i) = \frac{X_i}{L_i} = A_i k_i^{\alpha_i}, A_i > 0, 0 < \alpha_i < 1, i = 0,1,2. \quad (9)$$

Используя (9), после соответствующих преобразований дифференциальные уравнения (4) получим в следующем виде:

$$\frac{dk_0}{dt} = -\lambda_0 k_0 + \frac{s_0}{\theta_0}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1}, k_0(0) = k_0^0; \quad (10)$$

$$\frac{dk_1}{dt} = -\lambda_1 k_1 + s_1 A_1 k_1^{\alpha_1}, k_1(0) = k_1^0; \quad (11)$$

$$\frac{dk_2}{dt} = -\lambda_2 k_2 + \frac{s_2}{\theta_2}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1}, k_2(0) = k_2^0. \quad (12)$$

Постановка задачи поиска оптимального стационарного состояния. Целью существования кластера является производство потребительского сектора, при условии продажи всей продукции кластер должен максимизировать величину предметов потребления, поскольку она является единственным источником прибыли кластера. Все ресурсы кластера распределяются для достижения этой цели. Напомним, что рассматривается замкнутая модель кластера без дополнительных внешних ограничений. Например, принимается отсутствие ограничений на величину спроса на продукцию кластера или ограничений на величину продукции материального сектора.

Задача поиска оптимального стационарного состояния кластера (ОССК) сводится к задаче поиска точки, в которой состояние ТЭМК стационарно и величина удельного выпуска потребительского сектора $(x_2 = \theta_2 A_2 k_2^{\alpha_2})$ максимальна во всех допустимых областях изменения управляющих параметров, которыми являются величины распределения трудовых (θ_i) и инвестиционных (s_i) ресурсов.

В связи с выше указанным задача поиска ОССК для уточненной ТЭМК сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

$$\theta_2 A_2 k_2^{\alpha_2} \xrightarrow[\theta_i, s_i]{} \max \tag{13}$$

при условиях:

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, 0 < \theta_i < 1; \tag{14}$$

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1, 0 < s_i < 1; \tag{15}$$

$$(1-\beta_0)\theta_0 A_0 k_0^{\alpha_0} = \beta_1 \theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} + \beta_2 \theta_2 A_2 k_2^{\alpha_2},\ \beta_i > 0. \tag{16}$$

Решение задачи поиска ОССК. Поскольку ведется поиск стационарного решения ТЭМК, фондовооруженность секторов не меняется во времени. Из этого следует, что скорость изменения фондовооруженности секторов в уравнениях (10)–(12) равна нулю. Тогда получим следующую нелинейную систему:

$$-\lambda_0 k_0 + \frac{s_0}{\theta_0}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} = 0; \tag{17}$$

$$-\lambda_1 k_1 + s_1 A_1 k_1^{\alpha_1} = 0; \tag{18}$$

$$-\lambda_2 k_2 + \frac{s_2}{\theta_2}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} = 0. \tag{19}$$

Для решения поставленной задачи (13)–(16) и (17)–(19) используем множители Лагранжа специального вида и функцию запишем в виде:

$$\begin{gathered} L(\theta_i, s_i, k_i, c_j) = -\theta_2 A_2 k_2^{\alpha_2} + c_1(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 - 1) + c_2(s_0 + s_1 + s_2 - 1) + \\ + c_3\left((1-\beta_0)\theta_0 A_0 k_0^{\alpha_0} - \beta_1\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} - \beta_2\theta_2 A_2 k_2^{\alpha_2}\right) + c_4 k_0\left(-\lambda_0 k_0 + \frac{s_0}{\theta_0}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1}\right) \\ + c_5 k_1\left(-\lambda_1 k_1 + s_1 A_1 k_1^{\alpha_1}\right) + c_6 k_2\left(-\lambda_2 k_2 + \frac{s_2}{\theta_2}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1}\right), \end{gathered} \tag{20}$$

где c_j, $j = 1, ..., 6$ – множители Лагранжа.

Для исследования функции $L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)$ на экстремум запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial \theta_0} = c_1 + c_3(1-\beta_0)A_0 k_0^{\alpha_0} - c_4\frac{s_0}{\theta_0^2}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} k_0 = 0; \tag{21}$$

$$\frac{\partial L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial \theta_1} = c_1 - c_3\beta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} + c_4\frac{s_0}{\theta_0}A_1 k_1^{\alpha_1} k_0 + c_6\frac{s_2}{\theta_2}A_1 k_1^{\alpha_1} k_2 = 0; \tag{22}$$

$$\frac{\partial L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial \theta_2} = c_1 - c_3\beta_2 A_2 k_2^{\alpha_2} - c_6\frac{s_2}{\theta_2^2}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} k_2 - A_2 k_2^{\alpha_2} = 0; \tag{23}$$

$$\frac{\partial L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial s_0} = c_2 + c_4\frac{\theta_1}{\theta_0}A_1 k_1^{\alpha_1} k_0 = 0; \tag{24}$$

$$\frac{\partial L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial s_1} = c_2 + c_5 A_1 k_1^{\alpha_1 + 1} = 0; \tag{25}$$

$$\frac{\partial L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial s_2} = c_2 + c_6 \frac{\theta_1}{\theta_2} A_1 k_1^{\alpha_1} k_2 = 0; \tag{26}$$

$$\frac{L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial k_0} = c_3 \alpha_0 (1-\beta_0)\theta_0 A_0 k_0^{\alpha_0 - 1} + c_4\left(-\lambda_0 k_0 + \frac{s_0}{\theta_0}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1}\right) - c_4 \lambda_0 k_0 = 0; \tag{27}$$

$$\begin{gathered}\frac{L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial k_1} = -c_3 \beta_1 \theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1 - 1} + c_4 \frac{s_0}{\theta_0}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1 - 1} k_0 + \frac{c_5}{\alpha_1}\left(-\lambda_1 k_1 + s_1 A_1 k_1^{\alpha_1}\right) + \\ + \frac{c_5}{\alpha_1} k_1\left(-\lambda_1 + \alpha_1 s_1 A_1 k_1^{\alpha_1 - 1}\right) + c_6 \frac{s_2}{\theta_2}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1 - 1} k_2 = 0;\end{gathered} \tag{28}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial L(\theta_i, s_i, k_i, c_j)}{\partial k_2} = -\theta_2 A_2 k_2^{\alpha_2 - 1} - c_3 \beta_2 \theta_2 A_2 k_2^{\alpha_2 - 1} + \\ + \frac{c_6}{\alpha_2} k_2\left(-\lambda_2 k_2 + \frac{s_2}{\theta_2}\theta_1 A_1 k_1^{\alpha_1}\right) - \frac{c_6}{\alpha_2}\lambda_2 k_2 = 0.\end{gathered} \tag{29}$$

Таким образом получаем нелинейную систему из 15 уравнений (14)–(16), (17)–(19) и (21)–(29) с пятнадцатью неизвестными параметрами. Из данной системы путем алгебраических преобразований находится неизвестные параметры и множители.

При оптимальном росте между управляющими параметрами θ_i, s_i выполняются равенства соотношений:

$$\frac{s_0 \theta_1}{s_1 \theta_0} = \frac{\alpha_0 (1-\alpha_1)}{\alpha_1 (1-\alpha_0)}; \tag{30}$$

$$\frac{s_0 \theta_2}{s_2 \theta_0} = \frac{\alpha_0 (1-\alpha_2)}{\alpha_2 (1-\alpha_0)}; \tag{31}$$

$$\frac{s_2 \theta_1}{s_1 \theta_2} = \frac{\alpha_2 (1-\alpha_1)}{\alpha_1 (1-\alpha_2)}. \tag{32}$$

Далее задача поиска ОССК реализуется через построение нелинейной функции $\varphi(s_1)$, которая представляет собой решение для всех зависимых от нее параметров и переменных.

Алгоритм получения конечного решения ОССК. Алгоритм решения поставленной задачи поиска ОССК начинается с нахождения значения параметра s_1 из алгебраической нелинейной функции $\varphi(s_1)$. s_1 меняется от 0 до 1 (рис. 1).

$$\begin{gathered}\varphi(s_1) = s_1\left((1-\alpha_0)(1-\beta_0)A_0\gamma_0^{\alpha_0} + (1-\alpha_1)\beta_1 A_1 \gamma_1^{\alpha_1} s_1^{\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{1-\alpha_1}}\right) \\ -\alpha_1(1-\alpha_0)(1-\beta_0)A_0\gamma_0^{\alpha_0} = 0,\end{gathered} \tag{33}$$

где γ_1, $i = 0, 1, 2$ обозначают следующее:

$$\gamma_0 = \left(\frac{s_0\theta_1}{s_1\theta_0}\right)\frac{A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}}{\lambda_0\lambda_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}} = \frac{\alpha_0(1-\alpha_1)}{\alpha_1(1-\alpha_0)}\frac{A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}}{\lambda_0\lambda_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}}, \gamma_1 = \left(\frac{A_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}},$$
$$\gamma_2 = \left(\frac{s_2\theta_1}{s_1\theta_2}\right)\frac{A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}}{\lambda_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}\lambda_2} = \frac{\alpha_2(1-\alpha_1)}{\alpha_1(1-\alpha_2)}\frac{A_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}}{\lambda_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}\lambda_2}. \quad (34)$$

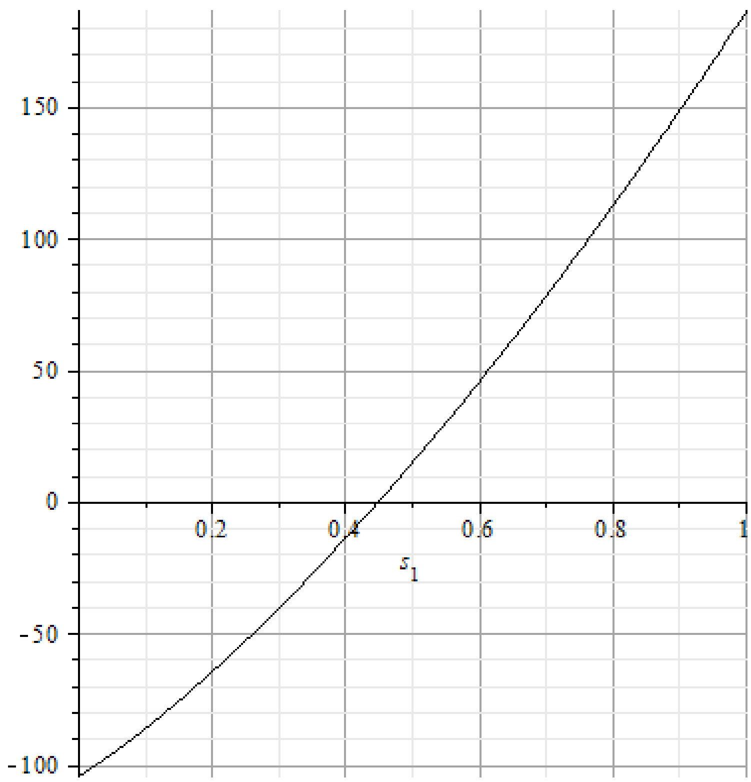

Рис. 1. **График функций** $\varphi(s_1)$**,** *авторска разработка*

Используя найденное значение параметра s_1, находим неизвестные переменные:

$$k_0 = \gamma_0 s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}; \quad (35)$$

$$k_1 = \gamma_1 s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}; \quad (36)$$

$$k_2 = \gamma_2 s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}; \quad (37)$$

$$c_3 = -\frac{(1-\alpha_2)A_2 k_2^{\alpha_2}}{(1-\alpha_0)(1-\beta_0)A_0 k_0^{\alpha_0} + (1-\alpha_2)\beta_2 A_2 k_2^{\alpha_2}}; \quad (38)$$

$$c_1 = (1-\alpha_2)(1+\beta_2 c_3)A_2 k_2^{\alpha_2}; \quad (39)$$

$$c_2 = \frac{c_1\left((\alpha_2-\alpha_0)\beta_2 c_3 + \alpha_2\right)\left(c_1 - (1-\alpha_1)\beta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} c_3\right)}{(1-\alpha_1)\left(c_1 - (1-\alpha_0)\beta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} c_3\right)}; \quad (40)$$

$$c_4 = \frac{\alpha_0 c_1 c_3\left(\beta_2 c_1 - \beta_1 A_1 k_1^{\alpha_1}\left((1-\alpha_2)\beta_2 c_3 - \alpha_2\right)\right)}{\lambda_0 k_0^2\left(c_1 - (1-\alpha_0)\beta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} c_3\right)}; \quad (41)$$

$$c_5 = -\frac{\alpha_1 c_1^2\left((\alpha_2-\alpha_0)\beta_2 c_3 + \alpha_2\right)}{(1-\alpha_1)\lambda_1 k_1^2\left(c_1 - (1-\alpha_0)\beta_1 A_1 k_1^{\alpha_1} c_3\right)}; \quad (42)$$

$$c_6 = -\frac{\alpha_2 c_1(1+\beta_2 c_3)}{\lambda_2 k_2^2}; \quad (43)$$

$$\theta_0 = -\left(\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\right)\left(\frac{c_4}{c_1}\right)\lambda_0 k_0^2; \quad (44)$$

$$\theta_1 = -\left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\right)\left(\frac{c_5}{c_1}\right)\lambda_1 k_1^2; \quad (45)$$

$$\theta_2 = -\left(\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\right)\left(\frac{c_6}{c_1}\right)\lambda_2 k_2^2; \quad (46)$$

$$s_0 = -\left(\frac{c_4}{c_2}\right)\lambda_0 k_0^2; \quad (47)$$

$$s_2 = -\left(\frac{c_6}{c_2}\right)\lambda_2 k_2^2. \quad (48)$$

Пример расчета. Задача поиска оптимального стационарного состояния исследовалась А.В. Колемаевым [2]. Он рассматривает трехсекторную модель экономики отрасли и находит стационарное состояние. Используемый в [2] классический метод множителей Лагранжа позволяет вычислить распределения трудовых ресурсов. В табл. 1 приводятся значения коэффициентов модели, для которых А.В. Колемаевым была решена задача поиска ОССК.

С помощью описанного метода для поставленной задачи из табл. 1 найдено решение задачи поиска ОССК ТЭМК. Результаты представлены в табл. 2.

Как можно заметить, значения распределения трудового фонда (θ_i – табл. 2) совпадают с данными, полученными А.В. Колемаевым (табл. 1). С помощью предлагаемого метода можно определить распределение инвестиционных ресурсов (s_i) и фондовооруженность секторов (k_i).

Выводы. В данной работе была исследована математическая модель трехсекторного экономического кластера, заданная в виде дифференциальных и алгебраических уравнений. При решении задачи были использованы множители Лагранжа специального вида и разработан новый алгоритм нахождения оптимальных стационарных точек фондовооруженности секторов и распределения трудовых и инвестиционных ресурсов между секторами. Разработанный алгоритм дает возможность определить распределение капитала в закрытой ТЭМК.

Таблица 1. **Данные параметров и решения,** *найденные А.В. Колемаевым* [2]

i	0	1	2
Коэффициенты модели			
α_i	0,46	0,68	0,49
β_i	0,39	0,29	0,52
λ_i	0,05	0,05	0,05
A_i	6,19	1,35	2,71
Решение			
θ_i	0,4	0,25	0,35

Таблица 2. **Результаты расчета оптимального стационарного состояния ТЭМК предлагаемым методом,** *авторская разработка*

i	0	1	2
θ_i	0,3944	0,2562	0,3494
s_i	0,2763	0,4476	0,2761
k_i	966,56	2411,61	1090,17
Значение целевой функции			
x_2	29,1544		

Для выполнения вычислений по данному алгоритму использовался программный пакет MAPLE. Следует отметить, что разработанный алгоритм является более эффективным при поиске стационарных состояний, чем ранее разработанные. Полученное решение задачи нелинейного программирования для определения стационарного состояния является первоначальным этапом решения задачи оптимального управления с закрепленными концами траекторий [3] в трехсекторной экономической модели кластера.

1. *Джусупов А.А., Калимолдаев М.Н., Малишевский Е.В., Мурзабеков З.Н.* Решение задачи стабилизации трехсекторной модели отрасли // Проблемы информатики (Новосибирск, ИВММГ СОРАН).– 2011.– №1. – С. 20–27.

2. *Колемаев В.А.* Экономико-математическое моделирование. – М.: ЮНИТИ, 2005. – 421 с.

3. *Мурзабеков З.Н.* Оптимизация управляемых систем. – Алматы: АТУ, 2009. – 216 с.

4. *Портер М.* Конкуренция / Пер. с англ. – М.: Вильямс, 2005. – 608 с.

5. *Azhimetova, G.* (2010). Current state of the cotton and textile industry in Kazakhstan. Perspectives of Innovations. Economics & Business, 5(2): 37–40.

6. *Dasterdi, R.B., Isfahani, R.D.* (2011). Equity and economic growth, a theoretical and empirical study: MENA zone. Economic Modelling, 28: 694–700.

7. *De, S.* (2014). Intangible capital and growth in the "new economy": Implications of a multi-sector endogenous growth model. Structural Change and Economic Dynamics, 28: 25–42.

8. *Dumitru, O., Loretti, D., Mihaela, N.* (2013). Deterministic and Stochastic Three-Sector Dynamic Growth Model with Endogenous Labour Supply. Economic record, 89(284): 99–111.

9. *Eitzen, H.C.* (2012). Dilemmas of Diversification: Regional Economic Development and Business-Industrial Clusters in China and Kazakhstan. Journal of Emerging Knowledge on Emerging Markets (JEKEM), 4: 26–25.

10. *Sen, P.* (2013). Capital accumulation and convergence in a small open economy. Review of International Economics, 21(4): 690–704.

11. *Xue, M., Zhou, Sh.* (2007). A model of optimal allocations of physical capital and human capital in three sectors. WUJNS, 12(6): 997–1002.

12. *Zhang, J.S.* (2011). The analytical solution of balanced growth of non-liner dynamic multi-sector economic model. Economic Modeling, 28: 410–421.

Стаття надійшла до редакції 17.11.2014.