

Микола О. Жук

ОПТИМІЗАЦІЯ СПОЖИВАННЯ ТА ЗАОЩАДЖЕНЬ ДОМОГОСПОДАРСТВА В НЕПЕРЕРВНОМУ ЧАСІ

У статті розглянуто проблему оптимізації споживання та заощаджень домогосподарства в неперервному часі за допомогою методів теорії оптимального управління. Запропоновано економіко-математичну модель, яка враховує такі види економічної діяльності домогосподарства як споживання, заощадження, залучення кредитних коштів та робота на ринку праці. За допомогою модельних експериментів проаналізовано зміни оптимального рівня споживання та заощаджень домогосподарства під дією зміни відсоткової ставки, доходу від роботи на ринку праці та ставки часових переваг домогосподарства до споживання.

Ключові слова: домогосподарство; споживання; заощадження; теорія оптимального управління.

Форм. 12. Рис. 3. Літ. 25.

Николай А. Жук

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОТРЕБЛЕНИЯ И СБЕРЕЖЕНИЙ ДОМОХОЗЯЙСТВА В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ

В статье рассмотрена проблема оптимизации потребления и сбережений домохозяйства в непрерывном времени с помощью методов теории оптимального управления. Предложена экономико-математическая модель, которая учитывает такие виды экономической деятельности домохозяйства, как потребление, сбережение, привлечение кредитных средств и работа на рынке труда. С помощью модельных экспериментов проанализированы изменения оптимального уровня потребления и сбережений домохозяйства под действием изменения процентной ставки, дохода от работы на рынке труда и ставки временных предпочтений домохозяйства к потреблению.

Ключевые слова: домохозяйство; потребление; сбережения; теория оптимального управления.

Mykola O. Zhuk¹

HOUSEHOLD CONSUMPTION AND SAVINGS OPTIMIZATION IN CONTINUOUS TIME

The article deals with the problem of household consumption and savings optimization in continuous time using the methods of optimal control theory. The author suggests economic mathematical model, which takes into account such types of household activities as consumption, savings, use of credit funds and work at labour market. Changes in optimal levels of household consumption and savings under the influence of changes in interest rate, income from work and rate of time preferences of household to consumption are analyzed by means of simulation experiments.

Keywords: household; consumption; savings; optimal control theory.

JEL codes: C61; D91.

Постановка проблеми. Світова економічна наука розглядає домогосподарство як одну з найголовніших складових, що формує економіку будь-якої країни. Сектор домогосподарств своєю діяльністю вагомо впливає на формування внутрішнього валового продукту країни, внутрішніх валових заощаджень та інших макроекономічних показників, а також на стабільність фінансової та банківської системи.

¹ Lviv Ivan Franko National University, Ukraine.

Сукупне споживання домогосподарств країни є основою ринку збуту товарів та послуг, які виготовляють національні господарські суб'єкти. Варто відмітити, що частка споживчих витрат домогосподарств України у валовому внутрішньому продукті країни зростала з кожним роком – з 46% у 1992 р. до 73% у 2013 році. Крім цього, абсолютне значення споживчих витрат домогосподарств України зросло майже у чотири рази – з 34 млрд дол. США у 1992 р. до 129 млрд у 2013 р. [24]. Статистичні дані показують вагомість впливу споживчих витрат домогосподарств України на формування внутрішнього валового продукту країни та постійне зростання цього впливу.

Водночас домогосподарства можуть бути інвесторами, якщо їх заощадження вкладаються в розширення виробництва вже існуючих підприємств чи на створення нових. Заощадження населення можуть бути альтернативним джерелом фінансування реального сектору економіки країни. У провідних країнах світу заощадження домогосподарств є одним з основних джерел інвестицій та забезпечують ресурсами фінансові ринки. Багато українських економістів розглядають заощадження домогосподарств як важливе внутрішнє джерело інвестицій у країні [1–5].

Загалом дослідження діяльності домогосподарств є актуальним та відіграє важливу роль у розумінні динаміки сучасних економічних процесів країни.

Аналіз публікацій. Одним з основоположників дослідження системи домогосподарств був американський економіст Г. Беккер [7]. Хоча перші економічні дослідження домогосподарств проводились ще англійським вченим Т. Мальтусом [17], завдяки Г. Беккеру [7] вивчення домогосподарства вийшло на порядок денний сучасної економічної науки. Г. Беккер започаткував унітарний підхід до вивчення поведінки домогосподарства. Згідно з цим підходом домогосподарство діє як єдиний механізм, яким керує один лідер і єдина функція корисності визначає поведінку колективу людей, об'єднаних у домогосподарство. Рішення в домогосподарстві приймаються спільно, через що воно максимізує єдиний набір цілей для всіх його учасників.

Проте запропонований Г. Беккером [7] унітарний підхід до вивчення поведінки домогосподарства піддавали активній критиці багато вчених, зокрема, Ф. Вуллі [25] та Р. Поллак [21].

Основною проблемою більшості досліджень діяльності домогосподарства є розподіл доходу між споживанням та заощадженнями. Однією з перших спроб дослідити зв'язок споживання та заощадження з доходом домогосподарства була гіпотеза абсолютного доходу, описана Дж.М. Кейнсом [12]. Дещо пізніше інший американський економіст Дж. Дізенбері запропонував гіпотезу відносного доходу [10], яка успішно змогла пояснити парадокс Кузнеця [13]. Новий загальновідомий підхід до проблеми розподілу доходу на споживання та заощадження, який використовується в сучасних дослідженнях, запропонували Ф. Модільяні у своїй моделі життєвого циклу [20] та М. Фрідман у своїй гіпотезі перманентного доходу [11].

Багато науковців досліджують економічну діяльність домогосподарства, яка полягає в споживанні та інвестуванні заощаджених коштів. Зокрема Р. Мертон був одним із перших, хто запропонував оптимізаційні динамічні моделі щодо проблеми споживання та побудови портфеля активів домогоспо-

дарства в неперервному часі з урахуванням невизначеності [18]. З. Боді, Р. Мертон та В. Самюелсон запропонували модель оптимізації споживчих та інвестиційних рішень домогосподарства з урахуванням впливу вільного часу учасників домогосподарства та їхнього людського капіталу [8]. Натомість Д. Лав у своєму дослідженні визначив найефективніші практичні правила прийняття рішень домогосподарствами щодо споживання та визначення структури портфеля активів [16].

Крім цього, М. Бровнінг та Т. Крослі емпірично підтвердили адекватність теорії життєвого циклу для вирішення проблеми розподілу доходу між споживанням та заощадженням домогосподарствами Великої Британії та Канади [9]. Більш широкий аналіз літератури з моделювання споживання та заощадження домогосподарств здійснили О. Аттанасіо та Г. Вебер [6].

Мета дослідження полягає у вивченні проблеми визначення оптимального рівня споживання та заощаджень домогосподарства з урахуванням діяльності на ринку праці та можливості залучати кредитні кошти для збільшення споживання за рахунок майбутніх доходів.

Основні результати дослідження. Під час моделювання та аналізу оптимального рівня споживання та заощаджень домогосподарства за основу взято такі припущення.

1. На фінансовому ринку ставки за кредитами та депозитами однакові.
2. Відсутні будь-які адміністративні та трансакційні витрати.
3. Ризики, яким піддається домогосподарство у реальному житті, відсутні.
4. Домогосподарство діє як система, в якій всі учасники мають однакові бажання та цілі, тому за цим підходом єдина (унітарна) функція корисності визначає поведінку всього колективу людей, об'єднаних у домогосподарство.
5. Під час моделювання використано функцію корисності сталої еластич-

ності міжчасового заміщення
$$U(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^\lambda - 1}{\lambda}, & \lambda < 1, \lambda \neq 0, \\ \sum_{i=1}^N \ln(x_i), & \lambda = 1. \end{cases} \quad \text{з параметром}$$

$\lambda = 1$ тобто функція корисності домогосподарства набуває логарифмічної форми, така функціональна форма цільової функції була використана у багатьох дослідженнях [14; 19; 22; 23].

6. Цільова функція корисності домогосподарства залежить лише від споживання одного умовного товару $x(t)$ у момент часу t .

7. Діяльність домогосподарства розглянуто на обмеженому та короткому проміжку часу $t \in [0, T]$.

8. Оскільки розглядається короткостроковий період, то відсоткова ставка заробітна плата w і ціна на умовний товар p є константами.

9. Сукупний дохід домогосподарства в кожний момент часу залежить від величини заробітної плати w та стану фінансових активів домогосподарства $a(t)$. Активи домогосподарства приносять додатковий дохід з відсотковою ставкою r якщо вони додатні. У випадку, якщо активи домогосподарства

від'ємні, вони будуть джерелом додаткових витрат. Фінансові активи можуть бути збільшеними через заощадження.

10. Домогосподарству також характерне стале відношення (ставка) часових переваг ρ щодо споживання продукції в часі. Загалом домогосподарства не схильні відкладати більший рівень споживання на майбутні періоди, тому ставка часових переваг $\rho > 0$. Крім цього, американські економісти Дж. Ловенштейн та Р. Талер емпірично підтвердили, що більшість американських домогосподарств мають додатну ставку часових переваг щодо споживання [15].

11. Домогосподарство не здійснює виробничої діяльності, тому зникає необхідність враховувати людський капітал та час, витрачений домогосподарством на відпочинок і роботу.

Враховуючи усі припущення, модель для вирішення проблеми оптимізації споживання та заощаджень домогосподарства в неперервному часі набуває виду:

$$U = \int_0^T (\ln x(t)) e^{-\rho t} dt \rightarrow \max; \quad (1)$$

$$a'(t) = ra(t) + w - px(t), \quad a(0) = a_0; \quad (2)$$

$$x(t) \geq 0; \quad (3)$$

$$a(T) \geq 0. \quad (4)$$

Цільова функція (1) є міжчасовою періодичною функцією корисності домогосподарства з фактором дисконтування корисності між різними часовими періодами $e^{-\rho t}$. Вона адитивна, неперервно диференційована та задовольняє такі вимоги: $u' > 0$, $u'' < 0$.

Диференціальне рівняння (2) моделює процес нагромадження чи витрат фінансових активів домогосподарства у часі. Воно показує, наскільки та у якому напрямку змінюється вартість фінансових активів домогосподарства у часі за рахунок зміни між теперішнім доходом та споживанням, тобто не накладає обмежень на рівень споживання. У початковому періоді значення фінансових активів домогосподарства становить a_0 і може бути додатним або від'ємним. У випадку від'ємного значення фінансових активів домогосподарство має борги на початку періоду, який розглядається.

Нерівність (3) забезпечує невід'ємність рівня споживання в будь-який момент часу t .

Нерівність (4) забезпечує відсутність боргу домогосподарства в кінцевий момент часу T , тобто є обмеженням платоспроможності домогосподарства.

Модель (1)–(4) можна реалізувати за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. Алгоритм реалізації моделі включає два основні етапи:

1. Побудова функції Гамільтона:

$$H = \ln x(t) + \lambda(t)[ra(t) + w - px(t)], \quad (5)$$

де $\lambda(t)$ – змінна, спряжена до змінної стану $a(t)$, або множник Гамільтона.

2. Застосування умов оптимальності:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad -\frac{\partial H}{\partial a} = \frac{d\lambda}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{da}{dt} \quad (6)$$

та побудова на їх основі рівняння Ейлера. Для моделі (1)–(4) рівняння Ейлера має вигляд:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = r - \rho. \quad (7)$$

Рівняння Ейлера (7) для економічних задач такого виду ще також називають правилом Кейнса-Ремзі (7), яке визначає оптимальний рівень зміни споживання протягом часу. Його можна інтерпретувати таким чином:

- рівень споживання буде зростати з перебігом часу, якщо відсоткова ставка r буде вищою, ніж відношення часових переваг ρ ;
- рівень споживання буде незмінним з перебігом часу, якщо відсоткова ставка r буде дорівнювати відношенню часових переваг ρ ;
- рівень споживання буде зменшуватись з перебігом часу, якщо відсоткова ставка r буде нижчою, ніж відношення часових переваг ρ .

За цим правилом постає така логіка, що за досконалих ринкових умов при вищій ставці r та при попередньому рівні споживання будуть формуватись додаткові активи, які можна використати у споживанні.

Якщо б ціни та відсоткова ставка не були константами, правило Кейнса-Ремзі мало б такий вигляд:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = r(t) - \frac{p'(t)}{p(t)} - \rho. \quad (8)$$

Правило Кейнса-Ремзі (8) показує, що при зміні відсоткової ставки споживання буде змінюватись у тому ж напрямку. При зростанні цін рівень споживання буде зменшуватись, а при зниженні цін рівень споживання буде зростати.

Правило Кейнса-Ремзі (7) можна записати у вигляді диференціального рівняння

$$x'(t) = x(t)(r - \rho). \quad (9)$$

Аналітичний розв'язок рівняння (9) має вигляд:

$$x(t) = x(0)e^{(r-\rho)t}. \quad (10)$$

Початкове значення споживання для задачі (1)–(4) таке:

$$x(0) = \frac{\rho(a_0 + \frac{w}{r})}{\rho}. \quad (11)$$

Аналітичний розв'язок диференціального рівняння (2) запишемо таким чином:

$$a(t) = (a(0) + w - \rho x(t))e^{rt}. \quad (12)$$

Відповідно, за допомогою моделі (1)–(4) проведено ряд модельних експериментів, які надають змогу оцінити ефективність можливих підходів до управління економічною діяльністю домогосподарства. У кожному експерименті економічна діяльність домогосподарства змодельована на проміжку часу тривалістю у 12 місяців. Цільова функція корисності залежить не від кількості одиниць умовного товару, спожитих домогосподарством, а від вартості спожитого умовного товару. За загальним сценарієм експериментів, значення активів домогосподарства на початку періоду досліджень становить 5000 у.о., а

в кінці — 0 у.о., тобто протягом року домогосподарство має можливість витратити усі заощадження. Заробітна плата усіх учасників домогосподарства становить 1000 у.о.

У кожному експерименті буде проаналізовано зміну оптимальної траєкторії споживання домогосподарства та зміну його активів залежно від співвідношень відсоткової ставки на фінансовому ринку r та ставки часових переваг домогосподарства ρ . Модельні експерименти реалізовано за допомогою програмної системи Mathematica 10.

У першому експерименті значення відсоткової ставки на ринку r становить 0,65, а ставка часових переваг домогосподарства ρ дорівнює 0,4, тобто $r > \rho$. Результати цього модельного експерименту зображено на рис. 1.

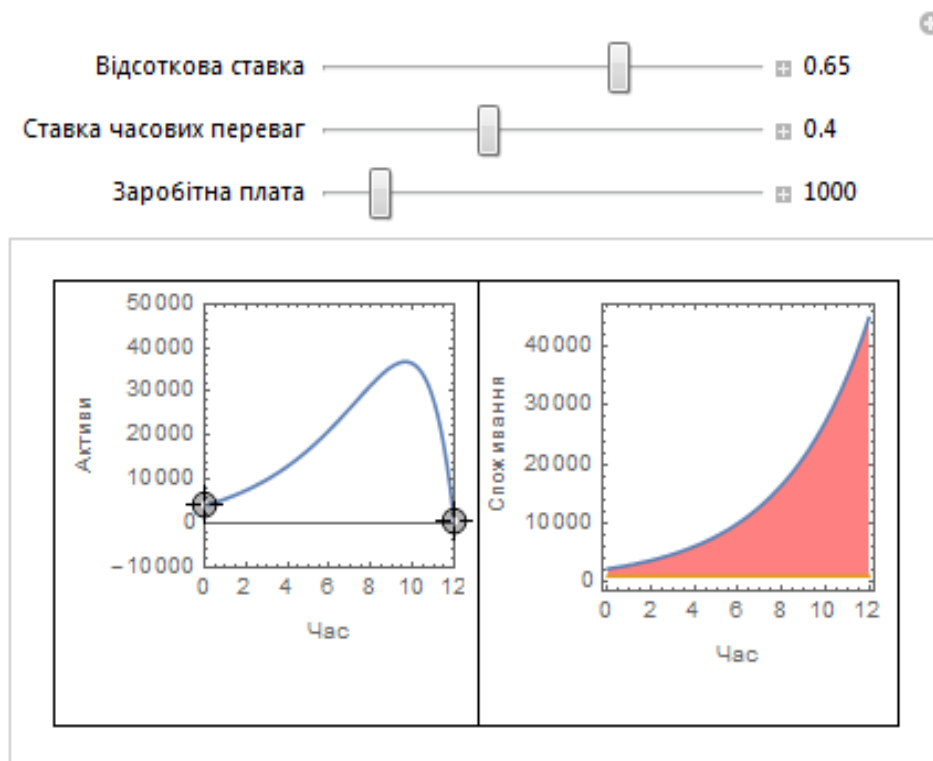


Рис. 1. Траєкторії активів та споживання домогосподарства при $r > \rho$, авторська розробка

Під час цього сценарію активи домогосподарства зростають з 5000 у.о. на початку експерименту до 36000 у.о. наприкінці десятого місяця, після чого домогосподарство активно витрачає заощадження до 0 у.о. в кінці 12-го місяця. Графік оптимальної траєкторії споживання домогосподарства (лінія 1) експоненційно зростає. Протягом усіх 12-ти місяців експерименту, завдяки високій відсотковій ставці, домогосподарство витрачає активи, що відповідає площині 2.

У другому експерименті значення відсоткової ставки на фінансовому ринку r становить 0,1, а ставка часових переваг домогосподарства ρ дорівнює 0,4, відповідно $r < \rho$. Результати цього модельного експерименту зображено на рис. 2.

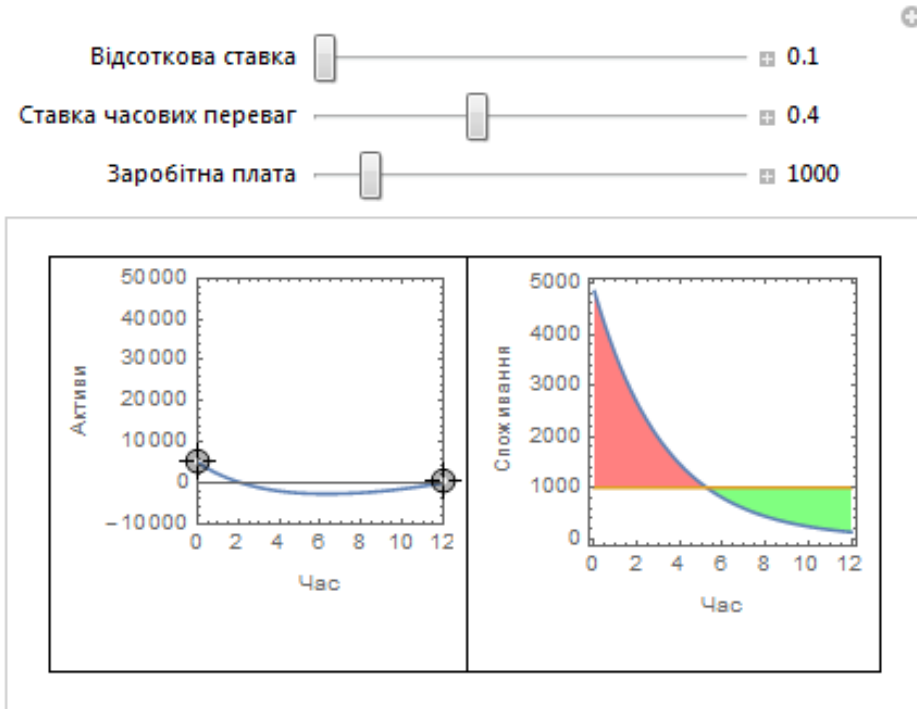


Рис. 2. Траєкторії активів та споживання домогосподарства при $r < \rho$, авторська розробка

У цьому випадку домогосподарство витрачає свої активи для споживання аж до шостого місяця. Активи домогосподарства досягають значення 0 у.о. в кінці другого місяця, знижуються і досягають свого мінімуму в шостому місяці, після чого зростають до 0 у.о. в кінці дванадцятого місяця. Графік оптимальної траєкторії споживання домогосподарства (лінія 1) експоненційно спадає. Крім цього, використання активів з метою споживання триває до шостого місяця (площина 2), після чого домогосподарство починає заощаджувати і накопичувати активи (площина 3).

В останньому модельному експерименті значення відсоткової ставки на фінансовому ринку r становить 0,4, а ставка часових переваг домогосподарства ρ дорівнює 0,4, відповідно $r = \rho$. Результати цього модельного експерименту зображено на рис. 3.

У цьому випадку домогосподарство витрачає наявні активи протягом усього часу (з 5000 у.о. на початку експерименту і до 0 у.о. в кінці експерименту). Графік оптимальної траєкторії споживання домогосподарства (лінія 1) стабільний і становить 3000 у.о., тобто вся заробітна плата (лінія 3) та активи

домогосподарства витрачаються ним на споживання, що відображено площинною 2 на рис. 3.

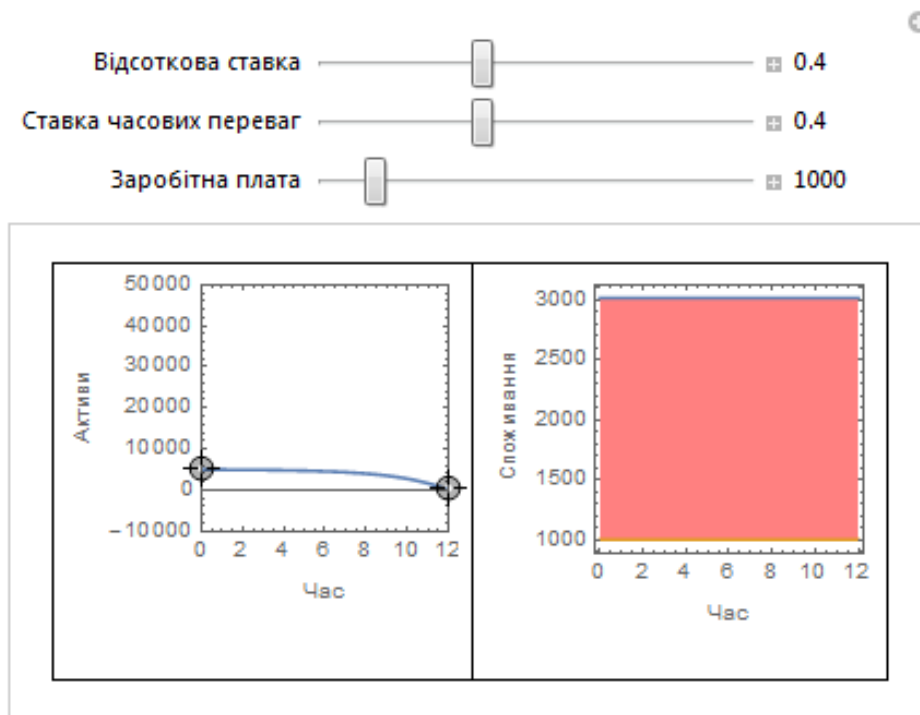


Рис. 3. Траєкторії активів та споживання домогосподарства при $r = \rho$, авторська розробка

Висновки та перспективи подальших досліджень. На підставі проведених модельних експериментів із запропонованою моделлю отримано такі висновки:

- рівень споживання домогосподарства буде зростати з перебігом часу, якщо відсоткова ставка на фінансовому ринку r буде вищою, ніж відношення часових переваг домогосподарства до споживання ρ ;
- рівень споживання домогосподарства буде незмінним з перебігом часу, якщо відсоткова ставка на фінансовому ринку r буде дорівнювати відношенню часових переваг домогосподарства до споживання ρ ;
- рівень споживання домогосподарства буде зменшуватись з перебігом часу, якщо відсоткова ставка на фінансовому ринку r буде нижчою, ніж відношення часових переваг домогосподарства до споживання ρ .

На практиці за допомогою оптимізаційної моделі (1)–(4) можна досліджувати зміни функціонування домогосподарства через зміну відсоткових ставок та заробітної плати. Результати досліджень будуть корисні для осіб, що приймають рішення щодо імплементації різних видів економічної політики держави, оскільки таким чином вони зможуть оцінити вплив своїх рішень на поведінку домогосподарств.

За допомогою запропонованого підходу змодельовано досить широкий набір функцій економічної діяльності домогосподарства в неперервному часі: споживання, заощадження, залучення кредитних коштів, робота на ринку праці. Побудована оптимізаційна модель дає можливість аналізувати зміни оптимального управління економічною діяльністю домогосподарства під дією різноманітних чинників. Майбутні дослідження цієї проблеми можуть полягати в моделюванні таких додаткових видів економічної діяльності домогосподарства, як виробництво в домогосподарстві та розвиток людського капіталу. Крім цього, в наступних дослідженнях варто врахувати те, що в реальному житті кредитні ставки на фінансовому ринку перевищують депозитні.

1. *Кізима Т.* Прагматика та перспективи трансформації заощаджень домогосподарств у інвестиції // *Економіка, фінанси, право.*— 2010.— №10.— С. 22–26.
2. *Ключник Л.* Заощадження домашніх господарств як джерело інвестиційних ресурсів економіки України // *Економічні науки.*— Серія: Облік і фінанси.— 2012.— №9.— С. 159–166.
3. *Крупа В.* Формування заощаджень домогосподарств та їх вплив на соціально-економічний розвиток країни // *Вісник ОНУ імені І. І. Мечникова.*— 2013.— №1.— С. 178–182.
4. *Рамський А.* Фінанси домогосподарств і їх роль у забезпеченні попиту та пропозиції на ринку інвестицій // *Бізнес Інформ.*— 2013.— №12.— С. 136–144.
5. *Стенанова А., Удод Є.* Заощадження домогосподарств як важливий інвестиційний ресурс країни // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка.*— Серія: Економіка.— 2012.— №136.— С. 45–49.
6. *Attanasio, O., Weber, G.* (2010). Consumption and saving: models of intertemporal allocation and their implications for public policy. National Bureau of Economic Research Working Paper No. 15756.
7. *Becker, G.* (1965). A Theory of the Allocation of Time. *Economic Journal*, 299: 493–508.
8. *Bodie, Z., Merton, R., Samuelson, W.* (1992). Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Life Cycle Model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 16(3–4): 427–249.
9. *Browning, M., Crossley, T.* (2001). The life-cycle model of consumption and saving. *Journal of Economic Perspectives*, 15(3): 3–22.
10. *Duesenberry, J.S.* (1952). *Income, Saving and the Theory of Consumer Behavior.* Cambridge: Harvard University Press.
11. *Friedman, M.* (1957). *A Theory of the Consumption Function.* Princeton: Princeton University Press.
12. *Keynes, J.M.* (1936). *The General Theory of Employment, Interest and Money.* London: Macmillan.
13. *Kuznets, S.* (1946). *National Product Since 1869* (assisted by L. Epstein and E. Zents). New York: National Bureau of Economic Research.
14. *Leland, H.* (1968). Savings and uncertainty: The precautionary demand for savings. *Quarterly Journal of Economics*, 82: 465–473.
15. *Loewenstein, G., Thaler, R.* (1989). Anomalies: Intertemporal choice. *Journal of Economic Perspectives*, 3: 181–193.
16. *Love, D.* (2013). Optimal rules of thumb for consumption and portfolio choice. *The Economic Journal*, 123: 932–961.
17. *Malthus, T.R.* (1798). *An Essay on the Principle of Population.* London: St Paul's Church Yard.
18. *Merton, R.* (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 3(4): 373–413.
19. *Miller, B.* (1974). Optimal consumption with stochastic income stream. *Econometrica*, 42: 253–266.
20. *Modigliani, F.* (1966). The life-cycle hypothesis of saving, the demand for wealth and the supply of capital. *Social Research*, 33(2): 160–217.
21. *Pollak, R.* (2003). Gary Becker's Contributions to Family and Household Economics. *Review of Economics of the Household*, 1(1): 111–141.
22. *Sandmo, A.* (1970). The effect of uncertainty on savings decisions. *Review of Economic Studies*, 37: 353–360.

23. *Skinner, J.* (1988). Risky income, life cycle consumption, and precautionary savings. *Journal of Monetary Economics*, 22: 237–255.
24. The World Bank // www.worldbank.org.
25. *Woolley, F.* (1996). Getting the Better of Becker. *Feminist Economics*, 2(1): 114–120.

Стаття надійшла до редакції 3.09.2015.