

Юрій В. Коляда, Катерина А. Семашко
АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЕВОЛЮЦІЇ
ОФІЦІЙНОЇ Й НЕЛЕГАЛЬНОЇ ЕКОНОМІК

У статті розглянуто механізм взаємодії офіційної (легальної) і нелегальної (тіньової) економік, який описано площинною динамічною моделлю – системою двох нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Отримано аналітичний розв'язок цієї моделі. Сформульовано умови співіснування легальної і тіньової економік.

Ключові слова: офіційна економіка; нелегальна економіка; динамічна модель; траєкторії співіснування; коеволуція.

Форм. 12. Рис. 5. Літ. 10.

Юрий В. Коляда, Екатерина А. Семашко
АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЭВОЛЮЦИИ
ОФИЦИАЛЬНОЙ И НЕЛЕГАЛЬНОЙ ЭКОНОМИК

В статье рассмотрен механизм взаимодействия официальной (легальной) и нелегальной (теневой) экономик, описанный плоскостной динамической моделью – системой двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Получено аналитическое решение данной модели. Сформулированы условия сосуществования легальной и теневой экономик.

Ключевые слова: официальная экономика; нелегальная экономика; динамическая модель; траектории сосуществования; коэволюция.

Yurii V. Kolyada¹, Kateryna A. Semashko²
ANALYTICAL MODELLING OF OFFICIAL AND ILLEGAL
ECONOMY COEVOLUTION

The article considers the mechanism of interaction between formal and illegal economies, described by means of planar dynamic model – a system of two nonlinear ordinary differential equations. Analytic solution of the above model is provided. Conditions for coexistence of legal and shadow economies are formulated.

Keywords: official economy; illegal economy; dynamic model; trajectories of coexistence; coevolution.

Постановка проблеми. Явище тінзації економіки спостерігається у багатьох країнах, незалежно від їх суспільного устрою та рівня економічного розвитку. Тіньова економіка (ТЕ) паразитує на тілі офіційної або легальної економіки (ЛЕ), негативно впливаючи на бюджет держави. Тому дослідження взаємодії ЛЕ і ТЕ залишається актуальною проблемою сьогодення, особливо для України.

Аналіз літературних джерел. Безпосередньо до тематики дослідження відносяться праці фундаментального характеру [2; 6; 8]. Вони досить складні, оскільки для побудови представлених математичних моделей (ММ) використовується значний обсяг всебічної економічної інформації, яка не завжди доступна або достовірна. Зважаючи на роль точності вихідних даних для побудови адекватної ММ, варто зупинитись на агрегованій динамічній моделі меншої розмірності, ніж у працях [2; 6; 8].

¹ Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman, Ukraine.

² Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman, Ukraine.

У працях [1; 5; 7; 10] проаналізовано методи оцінювання тіньової економіки, стан справ в Україні та механізми запобігання розвитку тіньової економічної діяльності.

Мета дослідження полягає у розгляді механізму взаємного функціонування ЛЕ і ТЕ для українського суспільства і описі математичної динаміки цього процесу. Серед завдань дослідження: побудувати економіко-математичну модель динаміки взаємодії ЛЕ і ТЕ; отримати аналітичний розв'язок зазначеної моделі, яким описуватиметься функціональна взаємозалежність між ЛЕ і ТЕ: геометрично представити фазовий портрет співіснування різновидів економіки.

Основні результати дослідження. За своєю сутністю сектори офіційної (ЛЕ) і нелегальної (ТЕ) економік є конкуруючими або антагоністичними в сенсі свого призначення. Відтак варто скористатися відомою [6] в науці моделлю «жертва-хижак», де в ролі жертви фігуруватиме ЛЕ, а хижака – ТЕ.

Нехай змінною $x_1 = x_1(t)$ описується обсяг ЛЕ суспільства, $x_2 = x_2(t)$ – обсяг ТЕ. За відсутності нелегального сектора економіки стан офіційної економіки традиційно описується класичним логістичним рівнянням $\dot{x}_1 = x_1(a_1 - b_1 x_1)$,

де $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}$ – похідна змінної x_1 , скалярні коефіцієнти a_1, b_1 відображають

відповідно фактори зростання і вичерпаності наявних можливостей. Присутність ТЕ сприяє врахуванню не лише внутрішніх для ЛЕ можливостей, але вимагає прийняти до відома зовнішні впливи пригнічуючого для офіційної економіки характеру. Припускається, що зазначене вище пропорційне білінійному добутку $b_{12} x_1 x_2$ з коефіцієнтом пропорційності b_{12} .

Вочевидь, подібні міркування справедливі стосовно впливу ЛЕ на ТЕ. Як результат, отримуємо наступну нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_{12} x_2 x_1 + c_1 x_1^2 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 + b_{21} x_1 x_2 + c_2 x_2^2 \end{cases} \quad (1)$$

Це т.зв. площинна точкова математична модель (ММ) економічної динаміки (типу моделі Вольтерра-Лотки), але з урахуванням явища конкуренції [2]. По суті, має місце ще один приклад використання поняття конкуренції в реальній економіці. Саме конкуренція, будучи ознакою ринкової економіки, володіє різноманітними типами взаємодії між учасниками ринку (в нашому випадку це симбіоз, хижацтво, аменсалізм тощо), що реалізується знаками коефіцієнтів ММ (1).

Стійкість динамічної моделі (1) детермінується співіснуванням між добутками внутрішньовидових факторів c_1, c_2 зменшення і міжвидових факторів b_{12}, b_{21} пригнічуючого характеру [4]. Якщо виконується нерівність $b_{12} \times b_{21} < c_1 \times c_2$, тобто внутрішні чинники домінують (відіграють більшу роль) або мають більше значення, ніж фактори конкуренції, то на підґрунті ММ (1) динаміки стверджується таке: можливе співіснування ЛЕ і ТЕ при деякому постійному співвідношенні між коефіцієнтами моделі.

Для зручності динамічну модель (1) перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + aqx_2x_1 + apx_1^2 \\ \dot{x}_2 = \beta x_2 + bpx_1x_2 + bq x_2^2 \end{cases} \quad (1a)$$

покладаючи: $a_1 = \alpha; b_{12} = aq; c_1 = ap; a_2 = \beta; b_{21} = bp; c_2 = bq$.

Над першим рівнянням ММ (1a) виконуємо наступні перетворення:

$$\frac{d}{dt}(\ln x_1) = [a(px_1 + qx_2) + \alpha];$$

$$\ln x_1(t) \Big|_0^t = \int_0^t [a(px_1 + qx_2) + \alpha] dt \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x_1(t)}{x_1(0)} \right) = \int_0^t [a(px_1 + qx_2) + \alpha] dt. \quad (2)$$

Звідси випливає вираз

$$x_1(t) = x_1(0) \times \exp \left\{ \int_0^t [a(px_1 + qx_2) + \alpha] dt \right\}. \quad (3)$$

Аналогічним чином отримується такий самий вираз для змінної x_2

$$x_2(t) = x_2(0) \times \exp \left\{ \int_0^t [b(px_1 + qx_2) + \beta] dt \right\}. \quad (4)$$

Мають місце рівності:

$$\int_0^t [a(px_1 + qx_2) + \alpha] dt = a \int_0^t [(px_1 + qx_2)] dt + \alpha t;$$

$$\int_0^t [b(px_1 + qx_2) + \beta] dt = b \int_0^t [(px_1 + qx_2)] dt + \beta t.$$

Оскільки виконуються рівності $e^{az} = (e^z)^a$ і $\exp\{(a+b)\} = e^a \times e^b$, то справедливо записати наступне:

$$e^{a \int_0^t [(px_1 + qx_2)] dt} = \left(e^{\int_0^t [(px_1 + qx_2)] dt} \right)^a;$$

$$\exp \left\{ b \int_0^t [(px_1 + qx_2)] dt \right\} = \left(e^{\int_0^t [(px_1 + qx_2)] dt} \right)^b.$$

Тоді вирази (3) і (4) відповідно набувають вигляду:

$$x_1(t) = x_1(0) \times \exp \left\{ a \int_0^t [(px_1 + qx_2)] dt \right\} \times e^{\alpha t} \equiv x_1(0) \times \left(\exp \left\{ \int_0^t [(px_1 + qx_2)] dt \right\} \right)^a \times e^{\alpha t}; \quad 3a)$$

$$(x_1(t))^{1/a} = (x_1(0))^{1/a} \times \exp \left\{ \int_0^t [(px_1 + qx_2)] dt \right\} \times e^{\frac{\alpha}{a} t}.$$

Аналогічно

$$(x_2(t))^{1/b} = (x_2(0))^{1/b} \times \exp \left\{ \int_0^t [(px_1 + qx_2)] dt \right\} \times e^{\frac{\beta}{b} t}. \quad (4a)$$

Відношення останніх двох виразів записується

$$\frac{(x_1(t))^{1/a}}{(x_2(t))^{1/b}} = \frac{(x_1(0))^{1/a}}{(x_2(0))^{1/b}} \times \exp\left\{t \int_0^t \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b}\right) dt\right\} \Leftrightarrow \frac{x_1^{1/a}}{x_2^{1/b}} = C \times \exp\left\{\frac{(b\alpha - a\beta)t}{ab}\right\},$$

де величина C є стала інтегрування. Останній вираз піднесемо до степеня ab і отримаємо $\frac{x_1^b}{x_2^a} = C^{ab} \times \exp\{(b\alpha - a\beta)t\}$ – загальний інтеграл динамічної моделі (1a). Звідси випливає функціональна залежність рівня обсягу ЛЕ від ТЕ, яка записується

$$x_1 = x_2^{a/b} \times C^a \times \exp\left\{\left(\alpha - \frac{a}{b}\beta\right)t\right\}; \quad (5)$$

навпаки – залежність рівня обсягу ТЕ від ЛЕ має вигляд

$$x_2 = x_1^{b/a} \times C^{-b} \times \exp\left\{\left(\beta - \frac{b}{a}\alpha\right)t\right\}. \quad (6)$$

Отримані формули засвідчують наступне:

а) коли справджується нерівність $\alpha < \frac{a}{b}\beta$, то спостерігається спад виробництва (рецесія економіки) з плином часу;

б) якщо виконується нерівність $\beta < \frac{b}{a}\alpha \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} < \frac{b}{a}$ – спостерігається зменшування обсягу ТЕ у суспільстві;

с) вони дозволяють прогнозувати обсяги ЛЕ і ТЕ для довільного моменту часу t , заздалегідь вибравши числові значення коефіцієнтів динамічної моделі.

Економіко-математичне моделювання динамічного режиму значно спрощується [4], здійснивши перехід до т.зв. безрозмірної моделі. У нашому випадку заміною змінних $t = \tau/\alpha$; $x_1 = \frac{\alpha}{ap}u_1$; $x_2 = \frac{\beta}{bq}u_2$ отримується динамічна модель у безрозмірному вигляді:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1(1 - u_1 - \varepsilon_1 u_2) , \\ \dot{u}_2 = \gamma u_2(1 - u_2 - \varepsilon_2 u_1) , \end{cases} \quad (7)$$

де величини $\varepsilon_1 = \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{a}{b}$; $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$; $\varepsilon_2 = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{b}{a}$ – скалярні коефіцієнти. Остаточно

величини ε_1 і ε_2 записуються $\varepsilon_1 = \gamma \frac{a}{b}$; $\varepsilon_2 = \frac{b}{\gamma a}$. Має місце рівність $\varepsilon_1 \times \varepsilon_2 = 1$.

Зауважимо, що на відміну від початкової ММ (1a), безрозмірна динамічна модель (7) володіє лише 3 скалярами.

Перепишемо формулу (5) в безрозмірних координатах, користуючись вказаною вище заміною змінних. Після очевидних перетворень вона набуває вигляду:

$$u_1 = \frac{ap}{\alpha} \times \left(\frac{\beta}{bq} u_2 \right)^{a/b} \times C^a \times \exp\{(1 - \varepsilon_1)\tau\}.$$

Отже, обсяг офіційної економіки зростатиме за умови $\varepsilon_1 < 1$.

Аналогічно формула (6), якою оцінюється обсяг тіньової економіки, має вигляд:

$$u_2 = \frac{bq}{\beta} \times \left(\frac{\alpha}{ap} u_1 \right)^{b/a} \times C^{-b} \times \exp\left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{b}{a} \right) \tau \right\}.$$

Обсяг ТЕ зменшуватиметься, коли матиме місце нерівність:

$$\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{b}{a} \right) < 0 \Leftrightarrow a\beta < ab.$$

На рис. 1 відображено динаміку рівня тіньової економіки у % від обсягу офіційного ВВП [3].



Рис. 1. Динаміка рівня тіньової економіки за окремими методами, % від обсягу офіційного ВВП [3]

Деякі результати обчислювального експеримента за різних початкових умов та параметрів, використовуючи динамічну модель (7) взаємодії ЛЕ і ТЕ, наводяться на рис. 2–5 ($Z_{i,1}$ – час, $Z_{i,2}$ – рівень ЛЕ, $Z_{i,3}$ – рівень ТЕ). Розрахунки було проведено за допомогою "MathCad" і є авторською розробкою.

Висновки. У статті механізм взаємодії офіційної й нелегальної економік відтворено, використовуючи одну з точкових математичних моделей нелінійної динаміки. Для динамічної площинної моделі отримано аналітичний розв'язок, на підґрунті якого здійснюється прогнозування взаємозалежних обсягів ЛЕ і ТЕ у будь-який момент часу.

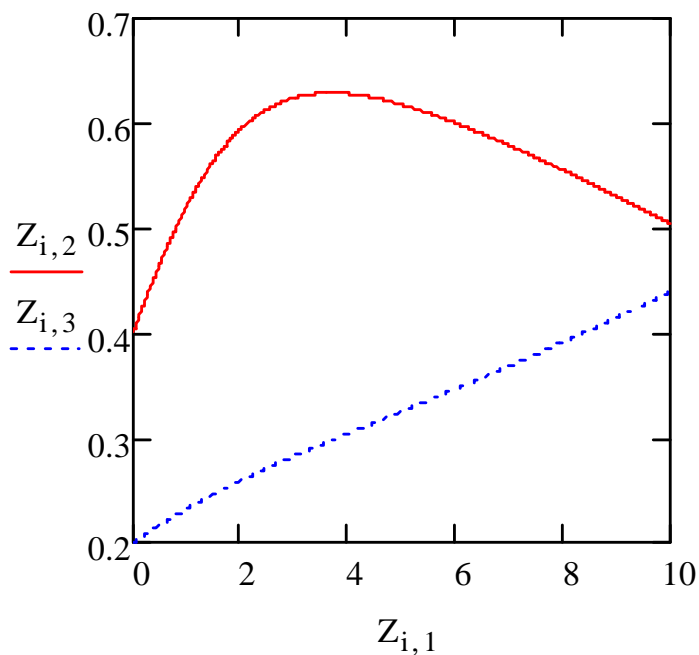


Рис. 2. Інтегральні криві ММ (7), авторська розробка

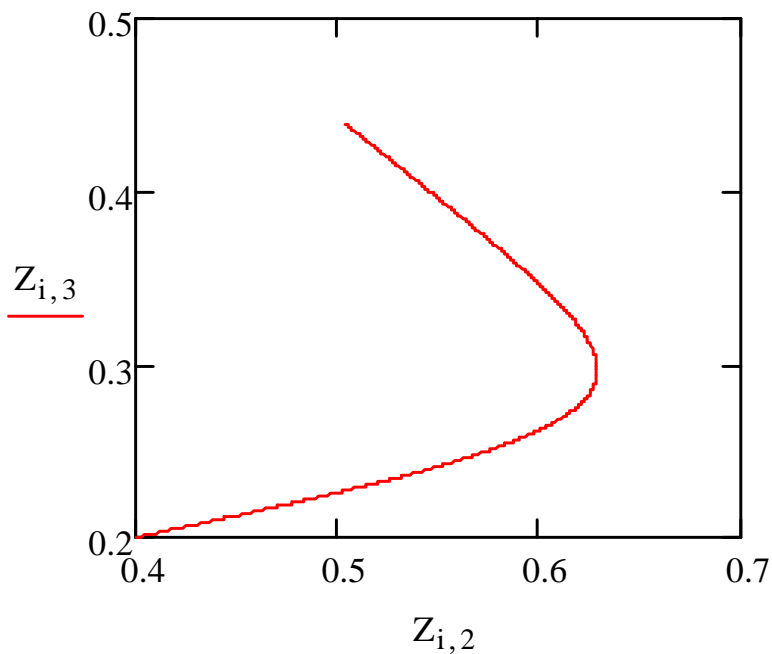


Рис. 3. Фазовий портрет ММ (7), авторська розробка

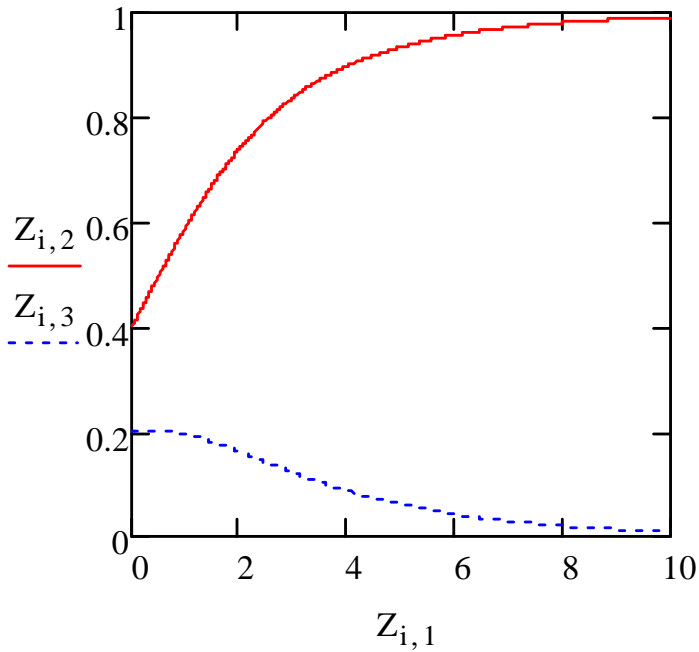


Рис. 4. Інтегральні криві ММ (7), авторська розробка

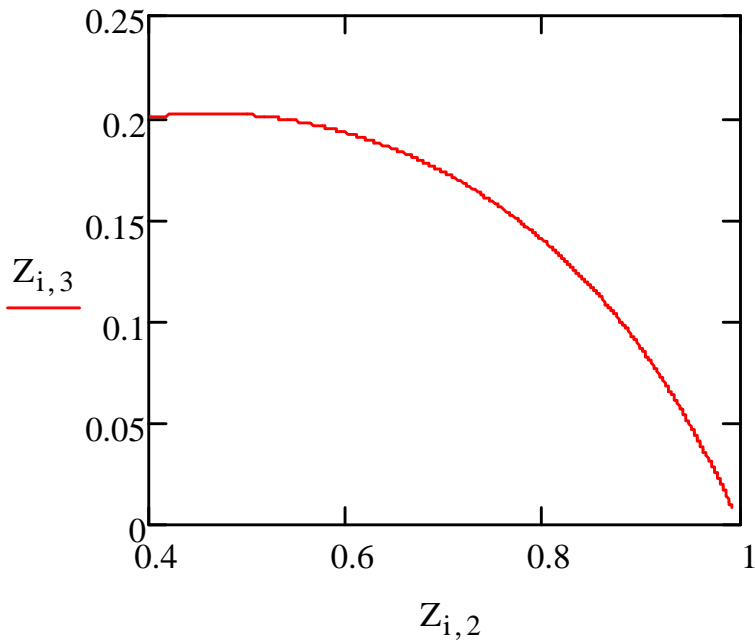


Рис. 5. Фазовий портрет ММ (7), авторська розробка

Сформульовано умови для коефіцієнтів динамічної моделі, за виконання яких відбувається зростання обсягу ЛЕ або спостерігається рецесія економіки та має місце зменшення обсягу ТЕ.

1. *Базилевич В., Мазур І.* Методичні аспекти оцінки масштабів тіньової економіки // Економіка України.– 2004.– №8. – С. 36–44.
2. *Григорків В.С., Буяк Л.М., Паучок В.К.* Моделирование взаимодействия легальной и теневой экономик на макроуровне // Кибернетика и системный анализ.– 2008.– №1. – С. 127–136.
3. Загальні тенденції тіньової економіки у І кварталі 2012 // Міністерство економічного розвитку і торгівлі України, 2012 // www.me.gov.ua.
4. *Коляда Ю.В.* Адаптивна парадигма моделювання економічної динаміки: Монографія. – К.: КНЕУ, 2011. – 297 с.
5. Оцінка стану тіньової економіки України та методи розрахунків її обсягів / В. Бородюк та ін. – К., 1997. – 138 с.
6. *Прісняков В.Ф.* Детінізація економіки // Фінанси України.– 2005.– №3. – С. 72–81.
7. *Сколотяний Ю.* Прихований ресурс: як оцінити обсяги тіньового сектора? // Дзеркало тижня. Україна.– 17.08.2012.– №28.
8. *Скрипник А., Дудко В.* Оцінка тіньового сектора економіки України // Вісник НБУ.– 2000.– №4. – С. 16–19.
9. *Черевко О., Романів Є.* Механізм запобігання розвитку тіньової економічної діяльності у сфері фінансово-грошових відносин // Вісник Національного банку України.– 2004.– №3. – С. 20–23.
10. *Чернавский Д.С., Щербаков А.В., Зильпукаров М.-Г.М.* Модель конкуренции: Препринт. – М.: Ин-т приклад. матем., 2006. – 22 с.

Стаття надійшла до редакції 25.09.2015.