Тарас М. Заболоцький

МОДЕЛЮВАННЯ КОЕФІЦІЄНТА, ЩО ОПИСУЄ СТАВЛЕННЯ ІНВЕСТОРА ДО РИЗИКУ

У статті досліджено імовірнісні властивості вибіркового оцінювання коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику за класичного припущення про нормальність розподілу та неавтокорельованість дохідностей, з яких складено портфель. Знайдено точну густину вибіркового оцінювання та на прикладі щотижневих спостережень за цінами 5 акцій, що входять до індексу "Dow Jones", показано, що густина є близькою до густини нормального розподілу. Знайдено асимптотичний розподіл вибіркового оцінювання та показано, що збіжність емпіричних густин до асимптотичної є доволі швидкою. На основі асимптотичного розподілу побудовано інтервальні оцінки коефіцієнта, що описує ставлення до ризику та запропоновано статистичний тест його значення.

Ключові слова: *портфель фінансових активів; несхильність інвестора до ризику; дохідність активу; нормальний розподіл.*
Форм. 19. Рис. 2. Літ. 25.

Тарас Н. Заболоцкий

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА, ОПИСЫВАЮЩЕГО ОТНОШЕНИЕ ИНВЕСТОРА К РИСКУ

В статье исследованы вероятностные свойства выборочной оценки коэффициента, который описывает отношение инвестора к риску при классическом предположении о нормальности распределения и неавтокоррелированности доходностей, из которых составлен портфель. Найдена точная плотность распределения выборочной оценки и на примере еженедельных наблюдений за ценами 5 акций, входящих в индекс "Dow Jones", показано, что плотность близка к плотности нормального распределения. Найдено асимптотическое распределение выборочной оценки и показано, что сходимость эмпирических плотностей к асимптотической довольно быстрая. На основе асимптотического распределения построены интервальные оценки коэффициента, описывающего отношение к риску и предложен статистический тест его значений.

Ключевые слова: *портфель финансовых активов; нерасположенность инвестора к риску; доходность актива; нормальное распределение.*

Taras M. Zabolotskyy[1]

MODELLING THE COEFFICIENT OF INVESTOR RISK AVERSION

The paper studies the probabilistic properties of sample estimation of risk aversion coefficient under the classical assumption of normally distributed and unautocorrelated asset returns included in a portfolio. The exact density of the sample estimation distribution is found and using weekly observations for prices of 5 stocks included in Dow Jones it is shown that this density is close to the density of normal distribution. The asymptotic distribution is found and it is shown that convergence of empirical densities to asymptotic density is quite fast. Based on asymptotic distribution an interval estimator of risk aversion coefficient is constructed and a statistical test for the values of risk aversion coefficient is presented.

Keywords: *financial assets portfolio; investor risk aversion; asset return; normal distribution.*
Peer-reviewed, approved and placed: *15.11.2016.*

Постановка проблеми. Сучасним фінансовим ринкам притаманна доволі висока волатильність. Це багато в чому зумовлено нестабільністю світової політики та наслідками світової фінансової кризи 2008–2009 рр., негативні наслід-

[1] Ivan Franko Lviv National University, Ukraine.

ки якої дотепер остаточно не подолано. Тому головним завданням інвестора є зменшення фінансових ризиків. Одним із найвідоміших методів зниження фінансових ризиків є диверсифікація, а одним із найвідоміших методів застосування диверсифікації у фінансовій діяльності є використання портфелів.

Зазначимо, що використання диверсифікації, а отже і портфелів, є доволі широким. Диверсифікація використовується у всіх сферах економічної діяльності людини. Важливість використання диверсифікації в різних секторах економіки розглядається багатьма вченими. Зокрема, важливість диверсифікації в агропромисловому секторі, який на поточний момент є чи не найважливішим сектором економіки України, описано у [8]. Необхідність диверсифікації при формуванні місцевих бюджетів досліджено у [3]. Питання використання диверсифікації при роботі сервісних центрів досліджено у [7], а використання портфелів з найменшим рівнем ризику для організації та планування роботи банківської установи розглянуто в [5]. Більш загально питання використання диверсифікації в економічній діяльності висвітлено у [1; 6].

Через популярність та поширеність на сьогодні існує багато визначень диверсифікації як процесу. Нас цікавитиме одне з найширших означень, наведене у [10]: диверсифікація – це розподіл капіталів, що інвестуються між різними об'єктами вкладень з метою зниження ризику можливих втрат капіталу або доходів від нього.

На практиці диверсифікація часто реалізується шляхом побудови портфеля фінансових активів. Теорія портфелів бере свій початок з роботи Г. Марковіца [24], в якій він вперше проаналізував алгоритм раціонального вибору структури портфеля. Незважаючи на свою популярність, методу Марковіца щодо вибору раціональної структури портфеля фінансових активів притаманні певні недоліки. Одним з них є те, що при виборі раціональної структури портфеля необхідно брати до уваги співвідношення між очікуваним доходом та ризиком, іншим – вибір дисперсії за міру ризику. Це призвело до вироблення інших критеріїв вибору раціональної структури портфеля з використанням сучасних мір ризику, таких як Value-at-Risk (VaR) та умовне Value-at-Risk (CVaR). Популярним на практиці методом вибору раціональної структури портфеля є критерій максимізації очікуваної корисності портфеля, що поєднує в собі елементи теорії портфеля та теорії корисності. Цей метод базується на максимізації функції корисності портфеля, яка залежить від коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику. Як наслідок, структура портфеля з максимальною корисністю також залежить від цього коефіцієнта. У класичній теорії портфеля припускається, що значення коефіцієнта, який описує ставлення до ризику, є відомим. Таке припущення зазнає критики на практиці. У фінансовій літературі запропоновано декілька методів визначення цього коефіцієнта, проте у всіх випадках отримана величина розглядається як константа. Такий підхід є неправильним. За нього нехтується властивість невизначеності параметрів, що може призводити до отримання недостовірної інформації та, як наслідок, до прийняття неправильного управлінського рішення, наслідки якого можуть бути доволі сумними. Оцінки невідомих параметрів необхідно розглядати як випадкові величини та використовувати їх, попередньо дослідивши їхні властивості.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Теоретичні та прикладні аспекти управління портфелем фінансових активів та аналізу основних характеристик портфеля розглядали в своїх працях як вітчизняні (В.В. Вітлінський [2], А.Б. Камінський [21], О.І. Черняк [9]), так і закордонні (Г. Александр [11], Т.Д. Боднар [15], Т. Болерслев [16], В. Шмід [25]) вчені.

Мета дослідження полягає у врахуванні невизначеності параметрів при визначенні значення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику, який входить у запис функції очікуваної корисності портфеля, а саме, дослідженні імовірнісних властивостей оцінки коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику, побудові статистичних тестів та інтервальних оцінок цього параметра. Проведене дослідження дасть інвестору можливість більш точно аналізувати та планувати основні характеристики портфеля на основі інтервальних оцінок коефіцієнта, що описує ставлення до ризику, наприклад, визначаючи песимістичні та оптимістичні сценарії розвитку подій та обчислення інтервалів довіри щодо ризику та очікуваної дохідності портфеля.

Основні результати дослідження. У класичній теорії портфеля припускається, що значення коефіцієнта, який описує ставлення до ризику, є відомим [25]. Таке припущення зазнає значної критики на практиці. З одного боку, коефіцієнт, що описує ставлення інвестора до ризику, залежить від переконань інвестора, які відповідно залежать від багатьох суб'єктивних чинників. З іншого боку, цей коефіцієнт залежить від активів, з яких формується портфель, тобто від об'єктивних чинників.

Ідея обчислення коефіцієнта, що описує ставлення до ризику (β), на основі ринкових даних розглядалася у [2; 16; 20]. У [20] коефіцієнт β обчислено на основі оцінки нейтральних до ризику та історичних імовірностей, отриманих з цін опціонів. У [16] обчислення коефіцієнта β відбувається на основі реалізованої волатильності. В [2] обгрунтовано вплив як об'єктивних, так і суб'єктивних чинників на значення коефіцієнта β. Значення коефіцієнта β, що використовуються на практиці, лежать у межах від 1 до 50, вибір значення цього коефіцієнта відбувається евристично. Ідея обчислення коефіцієнта β на основі рівня довіри для VaR вперше запропоновано в [18]. Очевидно, що зрозуміліше виразити ставлення до ризику через визначений строго статистично рівень довіри для VaR, ніж через абстрактний коефіцієнт β. Зважаючи на це, в [18] шляхом накладання умов на дохідність портфеля, коефіцієнт, що описує ставлення інвестора до ризику, визначено через порівняння VaR отриманого портфеля з бажаним рівнем ризику. У [11] розглянуто проблему визначення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику, порівнюючи розв'язки задач мінімізації VaR портфеля [12] та максимізації очікуваної корисності портфеля [25]. У [11] за припущення нормальності дохідностей з параметрами μ та Σ, з яких сформовано портфель (k – їх кількість), отримано вираз для обчислення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику:

$$\beta = \sqrt{\frac{z_{\alpha}^{2} - s}{V_{GMV}}}, \tag{1}$$

де $V_{GMV} = \frac{1}{1'\Sigma^{-1}1}$ – очікувана дохідність портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією [14]; $s = \mu' R \mu$; $R = \Sigma^{-1} - \frac{\Sigma^{-1} 1 1' \Sigma^{-1}}{1' \Sigma^{-1} 1}$; $z_\alpha = -\Phi^{-1}(1-\alpha)$; α – квантиль стандартного нормального розподілу; 1 – k-вимірний вектор, елементами якого є одиниці.

Зазначимо, що припущення про нормальність дохідностей активів, з яких складено портфель, не є критичним для обчислення β. Вираз (1) буде справедливим також і для дохідностей, що мають багатовимірний еліптичний розподіл [14] чи поводяться як довільний стаціонарний процес, для якого квантиль розподілу дохідності портфеля не залежить від ваг w [15]. У цих випадках потрібно у (1) замінити квантиль z_α^2 на квантиль, що відповідає припущенню про поведінку вектора дохідностей, з яких сформовано портфель.

Безпосередньо використати вираз (1) для β на практиці неможливо, оскільки він залежить від невідомих параметрів V_{GMV} та s, що залежать від параметрів розподілу вектора дохідностей, з яких сформовано портфель, μ та Σ. Спочатку інвестор змушений оцінити ці параметри. Ми використаємо вибіркові оцінки параметрів розподілу. З вибірки значень векторів дохідностей активів $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ми побудуємо вибіркові оцінки невідомих параметрів, тобто

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})(X_i - \hat{\mu})'. \tag{2}$$

Підставивши оцінки (2) в (1), отримаємо вибіркову оцінку коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику:

$$\hat{\beta} = \sqrt{\frac{z_\alpha^2 - \hat{s}}{\hat{V}_{GMV}}}. \tag{3}$$

У загальному випадку оцінка $\hat{\beta}$ є випадковою величиною, тому важливо дослідити її імовірнісні властивості. Зауважимо, що імовірнісні властивості розглянутої оцінки залежать від імовірнісних властивостей вектора дохідностей, з яких складено портфель. Ми припустимо, що дохідності активів, з яких складено портфель, є нормально розподіленими та неавтокорельованими.

Нехай кількість активів, які ми включаємо в портфель є відома та становить k. Зауважимо, що оцінка (3) має зміст лише за виконання умови $z_\alpha^2 \geq \hat{s}$. Імовірність виконання цієї умови досліджена в [4], де показано, що імовірність виконання такої умови є близька до 1 при $\alpha > 0{,}85$. Надалі ми розглядатимемо імовірнісні властивості оцінки $\hat{\beta}$ за виконання умови $z_\alpha^2 \geq \hat{s}$. Знайдемо спочатку стохастичне представлення оцінки $\hat{\beta}$ за умови, що оцінка параметра s є відома.

Теорема 1. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо X_t – k-вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t. Припустимо, що X_t є k-вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами μ та Σ. Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ є незалежними реалізаціями X_t, $n > k$, $\mu \neq \mu 1$ і $z_\alpha^2 \geq \hat{s}$. Тоді*

$$\left(\hat{\beta} \mid \hat{s} = s^*\right) \stackrel{d}{=} \sqrt{\frac{n-1}{V_{GMV}}} \frac{\sqrt{z_\alpha^2 - s^*}}{\sqrt{\xi_2}}, \tag{4}$$

де символ $\stackrel{d}{=}$ *означає рівність за розподілом, а випадкова величина* ξ_2 *має* χ^2 *розподіл з* $(n - k)$ *ступенями свободи.*

Доведення. Врахувавши, що розподіли вибіркових оцінок параметрів V_{GMV} та s мають вигляд [13]:

$$\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{V_{GMV}} \sim \chi^2_{n-k}, \quad \frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}\hat{s} \sim F_{k-1,n-k+1;ns}, \tag{5}$$

де через $F_{k-1,n-k+1;ns}$ позначено нецентральний розподіл Фішера з $(k - 1)$ та $(n - k + 1)$ ступенями свободи та нецентральним параметром ns, а χ^2_{n-k} – χ^2-розподіл з $(n - k)$ ступенями свободи, та випадкова величина $\hat{V}_{GMV}$ незалежна від $\hat{s}$, отримаємо твердження теореми.

Наслідок 1. *В умовах теореми 1 густина випадкової величини* $\hat{\beta} \mid \hat{s} = s^*$ *має вигляд (при* $x > 0$*):*

$$f_{\hat{\beta}|\hat{s}=s^*}(x) = \frac{1}{2^{(n-k-2)/2}\Gamma((n-k)/2)} x^{-n+k-1} a_\beta(s^*)^{(n-k)/2} e^{-a_\beta(s^*)/2x^2}, \tag{6}$$

де $a_\beta(y) = (n-1)z_\alpha^2 / V_{GMV}$; $\Gamma(\bullet)$ – гамма функція.

Доведення. Позначимо $a_\beta(y) = (n-1)z_\alpha^2 / V_{GMV}$ та розглянемо випадкову величину $\xi = \eta \times a_\beta(y)^{1/2}$, де η – випадкова величина, яка має обернений χ-розподіл з ν ступенями свободи.

Маємо:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{a_\beta(y)^{1/2} \times \eta < x\} = P\{\eta < x / a_\beta(y)^{1/2}\} = F_\eta(x / a_\beta(y)^{1/2}), \tag{7}$$

отже:

$$f_\xi(x) = f_\eta(x / a_\beta(y)^{1/2}) / a_\beta(y)^{1/2}. \tag{8}$$

З [23], маємо

$$f_\eta(x) = \frac{1}{2^{(\nu-2)/2}\Gamma(\nu/2)} x^{-\nu-1} e^{-1/2x^2}. \tag{9}$$

Звідси та з теореми 1 отримаємо потрібне твердження.

Зрозуміло, що передбачити значення, яке прийме оцінка параметра s неможливо, тому ми зацікавлені в розподілі оцінки параметра β за виконання умови $z_\alpha^2 \ge \hat{s}$.

Теорема 2. *В умовах теореми 1 маємо:*

$$f_{\hat{\beta}|\hat{s}<z_\alpha^2} = K(z_\alpha^2) \int_0^{z_\alpha^2} f_{k-1,n-k+1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^*\right) f_{\hat{\beta}|\hat{s}=s^*}(x \mid s^*) ds^*, \tag{10}$$

де

$$K(x) = \frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \frac{1}{F_{k-1,n-k+1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}x\right)}; \tag{11}$$

$F_{a,b;\lambda}(x)$ та $f_{a,b;\lambda}(x)$ є, відповідно, функція розподілу та густина нецентрального розподілу Фішера з a і b ступенями свободи та нецентральним параметром λ, а $f_{\hat{\beta}|\hat{s}=s^*}(x|s^*)$, задана в наслідку 1 (6).

Доведення. Доведення теореми випливає з [13].

Зобразимо густину розподілу випадкової величини $(\hat{\beta}-\beta)$ графічно. Ми виберемо щотижневі спостереження за цінами 5 акцій, що входять до індексу "Dow Jones", а саме: "Microsoft" (0,091; 0,102), "Coca-Cola" (0,618; 0,892), "Walt Disney" (0,773; 0,342), "Boeing" (0,774; 0,228), "McDonald's" (0,582; 0,173) за період часу з 25.11.2013 до 28.12.2015 (110 спостережень). В дужках після назв компаній вказано p-значення тестів Колмогорова-Смірнова на нормальність розподілу дохідностей та Бокса-Пірса — на неавтокорельованість (зі зміщенням 1) дохідностей. При рівні довіри 95% для проведених тестів наше припущення про незалежність та неавтокорельованість дохідностей є коректним.

Нехай рівень довіри для VaR становить $\alpha = 0,95$. Припустимо, що точні значення параметрів розподілу вектора дохідностей μ та Σ є відомими. Значення для них ми обчислимо з вибірки вибраних дохідностей активів, тобто

$$\mu = (0,3544;\ 0,0552;\ 0,3667;\ 0,0559;\ 0,1674)';$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 11,260 & 3,158 & 4,598 & 2,353 & 2,408 \\ 3,158 & 4,729 & 1,487 & 2,434 & 1,729 \\ 4,598 & 1,487 & 7,455 & 3,460 & 1,808 \\ 2,353 & 2,434 & 3,460 & 8,820 & 2,734 \\ 2,408 & 1,729 & 1,808 & 2,734 & 3,507 \end{pmatrix}.$$

На основі цих значень обчислимо точне значення коефіцієнта β: $\beta = 1,0115$ та зобразимо густину випадкової величини $(\hat{\beta}-\beta)$ графічно при $n \in \{60; 120; 240\}$ (рис. 1).

З рис. 1 можемо зробити висновок, що при зростанні обсяґу вибірки вибіркова оцінка коефіцієнта β стає точнішою, в тому сенсі, що зменшується дисперсія оцінки. Також густина є симетричною при $n = 240$ та візуально близькою до нормального розподілу.

Густина вибіркової оцінки $\hat{\beta}$ (10) є доволі складною для обчислення та при зростанні обсягу вибірки стає подібною на густину нормального розподілу, виникає запитання: чи можна на практиці замінити густину (10) густиною нормального розподілу та наскільки добрим буде таке наближення? Ми знайдемо асимптотичний розподіл вибіркової оцінки $\hat{\beta}$ та дослідимо його точність.

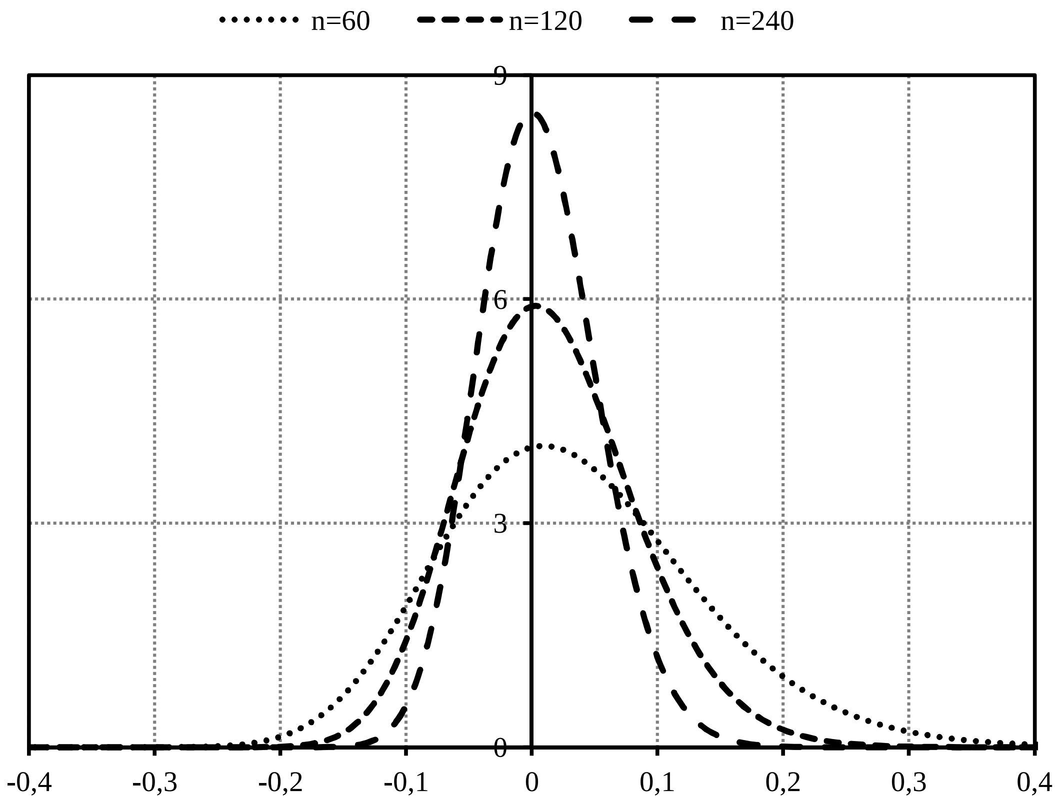

Рис. 1. **Густини розподілу випадкової величини** $(\hat{\beta}-\beta)$ **при** $n \in$ **{60; 120; 240},** *авторська побудова*

Теорема 3. *В умовах теореми 1 при* $n \to \infty$

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}-\beta) \xrightarrow{d} N(0,\sigma_\beta^2), \quad \sigma_\beta^2 = \frac{(z_\alpha^2 - s)^2 + 2s + s^2}{2(z_\alpha^2 - s)V_{GMV}}. \tag{12}$$

Доведення. Використовуючи дельта-метод [17], отримаємо

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}-\beta) \xrightarrow{d} N(0,\sigma_\beta^2), \tag{13}$$

де

$$\sigma_\beta^2 = \left(\frac{\partial\beta}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial\beta}{\partial V_{GMV}}, \frac{\partial\beta}{\partial s}\right)\Omega\begin{pmatrix}\partial\beta/\partial R_{GMV}\\ \partial\beta/\partial V_{GMV}\\ \partial\beta/\partial s\end{pmatrix}, \tag{14}$$

де $R_{GMV} = \dfrac{\mu'\Sigma^{-1}1}{1'\Sigma^{-1}1}$ – очікувана дохідність портфеля з найменшою дисперсією [14] та

$$\Omega = \begin{pmatrix} V_{GMV}(1+s) & 0 & 0\\ 0 & 2V_{GMV}^2 & 0\\ 0 & 0 & 4s+2s^2\end{pmatrix} \tag{15}$$

– асимптотична матриця коваріацій вектора оцінок параметрів ефективної множини [22].

Маємо

$$\frac{\partial\beta}{\partial R_{GMV}}=0,\ \frac{\partial\beta}{\partial V_{GMV}}=\frac{\sqrt{z_\alpha^2-s}}{2(V_{GMV})^{3/2}},\ \frac{\partial\beta}{\partial s}=-\frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}\sqrt{z_\alpha^2-s}}. \qquad (16)$$

Підставивши попередні рівності у (14), отримаємо потрібне твердження. Теорему доведено.

На практиці ми змушені використовувати оцінку дисперсії (12), тобто

$$\hat{\sigma}_\beta^2=\frac{\left(z_\alpha^2-\hat{s}\right)^2+2\hat{s}+\hat{s}^2}{2\left(z_\alpha^2-\hat{s}\right)\hat{V}_{GMV}}. \qquad (17)$$

З доведення теореми 3 та з теореми 1.14 в [19] отримаємо, що оцінка (17) є консистентною оцінкою дисперсії (12).

Дослідимо результати попередньої теореми. Значення параметрів виберемо на основі реальних даних, які ми розглядали раніше, отримаємо

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}-\beta)\xrightarrow{d}(0;0{,}51385) \qquad (18)$$

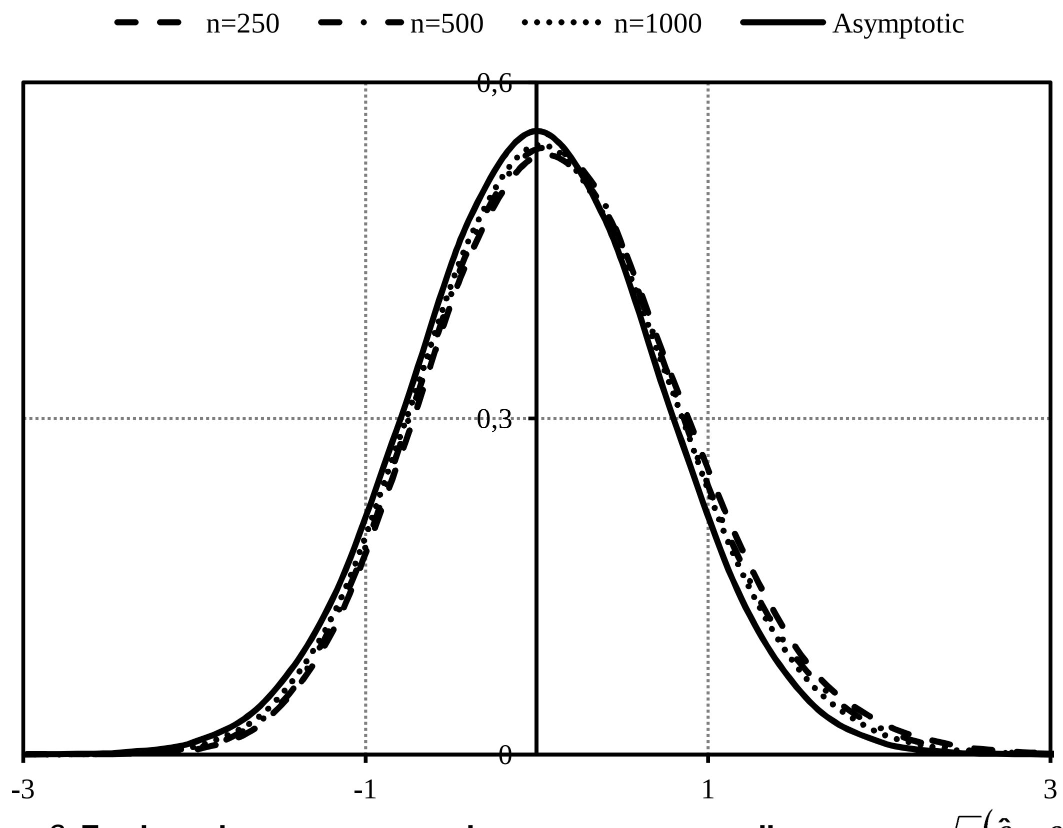

Рис. 2. **Емпіричні та асимптотичні густини випадкової величини** $\sqrt{n}\left(\hat{\beta}-\beta\right)$ **при** $n\in$ **{250;500;1000} та** k **= 5,** *авторська побудова*

На рис. 2 представлено емпіричні та асимптотичну густини випадкової величини $\sqrt{n}\left(\hat{\beta}-\beta\right)$ при $n\in$ {250;500;1000} та k = 5. Швидкість збіжності емпіричних густин до асимптотичної є швидкою, отже інвестор при управлінні портфелем фінансових активів може використовувати результати теореми 2.

Використовуючи результати теореми 3, ми маємо можливість побудувати $(1-\gamma)$ інтервали довіри для значення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику

$$\left[\sqrt{\frac{z_\alpha^2-\hat{s}}{\hat{V}_{GMV}}}-\frac{\hat{\sigma}_\beta}{\sqrt{n}}z_{1-\gamma/2};\sqrt{\frac{z_\alpha^2-\hat{s}}{\hat{V}_{GMV}}}+\frac{\hat{\sigma}_\beta}{\sqrt{n}}z_{1-\gamma/2}\right]. \tag{19}$$

Інтервал довіри (19) дозволяє провести статистичний тест, чи отримане значення оцінки коефіцієнта β суттєво відрізняються від бажаного за рівня довіри $(1-\gamma)$.

Зауваження 1. При зростанні кількості активів у портфелі спостерігається зміщення емпіричних розподілів вправо. Щоб запобігти цьому, необхідно в процесі моделювання використовувати незміщену оцінку для параметра β,

$$\hat{\beta}^*=\sqrt{\frac{n-k-2}{(n-1)\hat{V}_{GMV}}\left(z_\alpha^2-\frac{n-k-1}{n-1}\hat{s}+\frac{k-1}{n}\right)}. \tag{20}$$

Так, побудована оцінка може бути невизначеною, оскільки випадкова величина під коренем може приймати від'ємні значення з додатною імовірністю. Тому при її використанні на практиці потрібно або ігнорувати вибірки, для яких значення під коренем прийматиме від'ємні значення, або замінити отримані від'ємні значення нульовими.

Висновки. Прийняття управлінських рішень в економічній діяльності відбувається в умовах невизначеності. Одним з головних завдань в такій ситуації є мінімізація ризиків. На практиці для досягнення цієї мети часто використовується диверсифікація, тобто розподіл капіталу між різними об'єктами. Така стратегія повністю відповідає основним принципам теорії портфеля. Проте порівняння різних портфелів, навіть складених з однакових об'єктів, є питанням нетривіальним, оскільки інвестор зацікавлений у таких, як правило, обернено пропорційних, характеристиках портфеля, як очікувана дохідність та ризик. Одним з найвідоміших методів порівняння портфелів є їхня очікувана корисність. Функція очікуваної корисності портфеля залежить від коефіцієнта, що описує ставлення до ризику. Часто припускається, що такий коефіцієнт є незмінним в часі. Таке припущення зазнає нищівної критики. Існує декілька методів визначення цього коефіцієнта. Одним з найпростіших та найкраще статистично обґрунтованим є метод, описаний в [11], в якій авторами знайдено значення коефіцієнта, що описує ставлення до ризику, на основі рівня довіри до міри ризику VaR та імовірнісних властивостей дохідностей об'єктів, включених до портфеля. Авторами запропоновано використовувати точкову оцінку знайденої величини для управління портфелем. Такий підхід не є універсально правильним, оскільки в цьому випадку нехтується властивість невизначеності параметрів. Доцільнішим є підхід, за якого отриману оцінку розглядають як випадкову величину, а найкращим інструментом для опису властивостей випадкової величини є її розподіл. Зважаючи на це, робота присвячена дослідженню імовірнісних властивостей вибіркової оцінки коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику, побудованої на основі результатів, отриманих в [11]. За припущення нормальності та неавтокорельованості дохідностей, з яких сформовано портфель фінансових активів, ми знайшли точний та асимптотичний розподіли цієї оцінки. З'ясувалося, що при обсягу вибірки історичних значень, більшому за 250, густина точного розподілу є симетричною та подібною на густину нормального розподілу. Крім того, швидкість збіжності емпіричних густин до асимптотичної є доволі швидкою і незначно зміщеною. Цей недолік можливо виправити використанням незміщеної оцінки. Отримані результати дають змогу інвестору побудувати інтервальну оцінку для коефіцієнта, що описує ставлення до ризику, та перевірити статистично, чи портфель істотно відрізняється від класичного портфеля з найменшою дисперсією, врахувати песимістичні та оптимістичні сценарії розвитку подій та побудувати інтервали довіри для ризику та очікуваної дохідності портфеля. Крім того, інвестор отримує можливість швидко реагувати на зміни економічної ситуації та перебудувати свій портфель відповідно до нових умов (використавши, наприклад, контрольні карти для характеристик коефіцієнта, що описує ставлення до ризику), що є надзвичайно важливо в умовах сучасної нестабільності. Також, інвестор, що надає перевагу класичній теорії портфеля, може дослідити характеристики свого портфеля в умовах новітньої теорії і вибрати структуру таким чином, щоб його ризик був мінімальним, а очікувана дохідність дорівнювала наперед заданому значенню.

1. *Вітлінський В.В.* Аналіз, оцінка і моделювання економічного ризику. — К.: Деміур, 1996. — 212 с.

Vitlinskyi V.V. Analiz, otsinka i modeliuvannia ekonomichnoho ryzyku. — K.: Demiur, 1996. — 212 s.

2. *Вітлінський В.В.* Урахування об'єктивно-суб'єктивної структури ризику в моделюванні економічних систем // Моделювання та інформаційні системи в економіці.— 2010.— Вип. 81. — С. 12—21.

Vitlinskyi V.V. Urakhuvannia obiektyvno-subiektyvnoi struktury ryzyku v modeliuvanni ekonomichnykh system // Modeliuvannia ta informatsiini systemy v ekonomitsi.— 2010.— Vyp. 81. — S. 12—21.

3. Диверсифікація доходів місцевих бюджетів: Монографія / І.О. Луніна, О.П. Кириленко, А.В. Лучка та ін.; За ред. І.О. Луніної. — К.: НАН України; Ін-т екон. та прогнозув., 2010. — 320 с.

Dyversyfikatsiia dokhodiv mistsevykh biudzhetiv: Monohrafiia / I.O. Lunina, O.P. Kyrylenko, A.V. Luchka ta in.; Za red. I.O. Luninoi. — K.: NAN Ukrainy; In-t ekon. ta prohnozuv., 2010. — 320 s.

4. *Заболоцький Т.М.* Оцінка ваг валютного портфелю з найменшим рівнем VaR // Вісник Національного банку України.— 2011.— №8. — С. 31—33.

Zabolotskyi T.M. Otsinka vah valiutnoho portfeliu z naimenshym rivnem VaR // Visnyk Natsionalnoho banku Ukrainy.— 2011.— №8. — S. 31—33.

5. *Заболоцький Т.М., Цихтор А.І., Коркуна І.І.* Моделювання управління активними операціями банку в кризовий та посткризовий періоди // Актуальні проблеми економіки.— 2014.— №8. — С. 428—435.

Zabolotskyi T.M., Tsyktor A.I., Korkuna I.I. Modeliuvannia upravlinnia aktyvnymy operatsiiamy banku v kryzovyi ta postkryzovyi periody // Aktualni problemy ekonomiky.— 2014.— №8. — S. 428—435.

6. *Корінько М.Д.* Диверсифікація: теоретичні та методологічні основи: Монографія. — К.: ННЦ ІЕА, 2007. — 488 с.

Korinko M.D. Dyversyfikatsiia: teoretychni ta metodolohichni osnovy: Monohrafiia. — K.: NNTs IEA, 2007. — 488 s.

7. *Мулярчук В.М.* Методичні засади ефективної реалізації диверсифікації сервісних підприємств // Вісник Львівської комерційної академії.— Серія економічна.— 2012.— Вип. 39. — С. 33—37.

Muliarchuk V.M. Metodychni zasady efektyvnoi realizatsii dyversyfikatsii servisnykh pidpryiemstv // Visnyk Lvivskoi komertsiinoi akademii.— Seriia ekonomichna.— 2012.— Vyp. 39. — S. 33—37.

8. *Ткачук В.І.* Диверсифікація аграрного підприємництва: Монографія. — Житомир: ЖНАЕУ, 2011. — 268 с.

Tkachuk V.I. Dyversyfikatsiia ahrarnoho pidpryiemnytstva: Monohrafiia. — Zhytomyr: ZhNAEU, 2011. — 268 s.

9. *Черняк О.І., Пешко О.В.* Визначення оптимального портфеля цінних паперів і методи врахування ретроспективних даних // Банківська справа.— 1997.— №4. — С. 58—61.

Cherniak O.I., Peshko O.V. Vyznachennia optymalnoho portfelia tsinnykh paperiv i metody vrakhuvannia retrospektyvnykh danykh // Bankivska sprava.— 1997.— №4. — S. 58—61.

10. *Эванс Дж., Берман Б.* Маркетинг. — М.: Экономика, 1990. — 350 с.

Evans Dzh., Berman B. Marketing. — M.: Ekonomika, 1990. — 350 s.

11. *Alexander, G.J., Baptista, A.M.* (2011). Portfolio selection with mental accounts and delegation. Journal of banking and finance, 35: 2637—2656.

12. *Alexander, G.J., Baptista, M.A.* (2002). Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: a comparison with mean-variance analysis. Journal of economic dynamics & control, 26: 1159—1193.

13. *Bodnar, T., Schmid, W.* (2009). Econometrical analysis of the sample efficient frontier. The European journal of finance, 15: 317—335.

14. *Bodnar, T., Schmid, W., Zabolotskyy, T.* (2013). Asymptotic behavior of the estimated weights and of the estimated performance measures of the minimum VaR and the minimum CVaR optimal portfolios for dependent data. Metrica, 76: 1105—1134.

15. *Bodnar, T., Zabolotskyy, T.* (2017). How risky is the optimal portfolio which maximizes the Sharpe ratio? ASTA — Advances in Statistical Analysis, 101(1): 1—28 = DOI 10.1007/s10182-016-0270-3.

16. *Bollerslev, T., Gibons, M., Zhou, H.* (2011). Dynamic estimation of volatility risk premia and investor risk aversion from option-implied and realized volatilities. Journal of econometrics, 160(1): 235—245.

17. *Brockwell, P.J., Davis, R.A.* (2006). Time series: theory and methods. New York: Springer Science+Business Media. 600 p.

18. *Das, S., Markowitz, H., Scheid, J., Statman, M.* (2010). Portfolio optimization with mental accounts. Journal of financial and quantitative analysis, 45: 311—334.

19. *DasGupta, A.* (2008). Asymptotic theory of statistics and probability. New York: Springer. 722 p.

20. *Jackwerth, J.C.* (2000). Recovering risk aversion from option prices and realized returns. Review of financial studies, 13: 433—451.

21. *Kaminsky, A.B.* (2015). Portfolio management. Kyiv: Znannia. 214 p.

22. *Kan, R., Smith, D.R.* (2008). The distribution of the sample minimum-variance frontier. Management, 54: 1364—1380.

23. *Lee, P.M.* (2012). Bayesian statistics: an introduction. Chichester, UK: Wiley. 486 p.

24. *Markowitz, H.* (1952). Portfolio selection. Journal of finance, 7: 77—91.

25. *Okhrin, Y., Schmid, W.* (2006). Distributional properties of optimal portfolio weights. Journal of econometrics, 134: 235—256.