УДК 517.98

В.І. КУЗЬМИЧ
Херсонський державний університет
М.І. ВАЛЬКО, П.М. ВАЛЬКО, Т.О. ЯКОВЕНКО
Херсонський національний технічний університет

ПРО СПІЛЬНУ ТОЧКУ ОПЕРАТОРІВ

Робота продовжує дослідження класичного принципу стискаючого відображення. Цей принцип має численні теоретичні та практичні застосування у різноманітних областях математики. Отримані результати вказують на те, що класичні результати можна розповсюдити на випадок декількох операторів, маючи на увазі існування спільної для них точки. Крім того, в окремих випадках, умову того, що оператор повинен робити стискаюче відображення, можна ослабити. Для цього його достатньо розбити на декілька простих операторів і шукати спільну точку цих операторів. Зокрема, у роботі доведена теорема про існування спільної точки двох операторів, що відображають повний метричний простір на себе. При цьому, між образами, що створюють ці оператори, повинно виконуватись певне співвідношення, яке аналогічне умові стискаючого відображення. Аналогічний результат встановлено і для випадку, коли між образами операторів виконується умова, протилежна умові стискаючого відображення.

Ключові слова: метричний простір, оператор, стискаюче відображення, нерухома точка оператора.

В.И. КУЗЬМИЧ
Херсонский государственный университет
Н.И. ВАЛЬКО, П.Н. ВАЛЬКО, Т.А. ЯКОВЕНКО
Херсонский национальный технический университет

ОБ ОБЩЕЙ ТОЧКЕ ОПЕРАТОРОВ

Работа продолжает исследования классического принципа сжимающего отображения. Этот принцип имеет многочисленные теоретические и практические применения в различных областях математики. Полученные результаты указывают на то, что классические результаты можно распространить на случай нескольких операторов, имея в виду существование общей для них точки. Кроме того, в отдельных случаях, условие того, что оператор должен делать сжимающее отображение, можно ослабить. Для этого его достаточно разбить на несколько простых операторов и искать общие точки этих операторов. В частности, в работе доказана теорема о существовании общей точки двух операторов, отражающие полное метрическое пространство на себя. При этом между образами, которые создают эти операторы, должно выполняться определенное соотношение, аналогичное условию сжимающего отображения. Аналогичный результат установлен и для случая, когда между образами операторов выполняется условие, противоположное условию сжимающего отображения.

Ключевые слова: метрическое пространство, оператор, сжимающее отображение, неподвижная точка оператора.

V.I. KUZMYCH
Kherson State University
M.I. VALKO, P.M. VALKO, T.O. YAKOVENKO
Kherson National Technical University

ABOUT THE GENERAL POINT OF OPERATORS

The work continues the study of the classical principle of contraction mapping. This principle has numerous theoretical and practical applications in various fields of mathematics. The results obtained indicate that classical results can be extended to the case of several operators, bearing in mind the existence of a common point for them. In addition, in some cases, the condition that the operator must make a contraction mapping can be weakened. To do this, it is enough to break it into several simple operators and look for common points of these operators. In particular, we prove a theorem on the existence of a common point of two operators that reflect a complete metric space on itself. In this case, between the images that these operators create, a certain relationship must be satisfied, which is analogous to the condition of the contracting mapping. A similar result is established for the case when the condition opposite to the condition of the contracting mapping is fulfilled between the images of the operators.

In applications of the method of successive approximation, a situation often arises when the operator carrying out the reflection of the total space on himself does not satisfy the classical condition for the compression operator. Sometimes you can use the inverse operator if it exists. In some cases, this inconvenience can be bypassed by conducting certain analytical transformations. In particular, majorant operators of contraction can be used. In the work, a sufficient condition is established for the use of such operators to search for a fixed point of an operator that is not a compression operator. This result can also be used in the case where the operator is not continuous. The graphic diagrams of application of the method of successive approximation in the above cases are presented in the work.

The results obtained in the work can be used to search for fixed points of individual operators, which are not compression operators, but allow for their replacement by simpler operators that or either have an inverse operator or are compression operators.

Keywords: metric space, operator, contracting map, fixed point of the operator.

Постановка проблеми

Потреби практичної діяльності людини обумовили виникнення спеціальних наукових методів, основою яких є математичні. Математичні методи дослідження широко проникають у різні сфери сучасної науки – економіки, фізики, екології, соціології, прикладної лінгвістики, природознавства тощо, які розвиваються на зламі кількох наукових напрямів. Важливою, невід’ємною частиною таких досліджень є обробка експериментальних даних з використанням математичної статистики, створення математичних моделей та їх систем для опису явищ, чинників певного середовища та їх взаємодії. Одним із найефективніших методів побудови математичних моделей, що описують динаміку фізичних, хімічних, екологічних, біологічних, технологічних систем як між окремими їх елементами, так і зовнішніми факторами середовища, в якому перебувають ці елементи, є використання методів теорії диференціальних та інтегральних рівнянь. Класичними задачами такого типу є, наприклад, задачі про охолодження тіла, радіоактивний розпад, поперечні коливання натягнутої струни, швидкість розмноження бактерій, збільшення кількості ферменту, концентрацію розчину, швидкість хімічної реакції, динаміку чисельності популяції, теорію епідемій, ріст дерева та листя на ньому та багато інших.

У задачах знаходження точного або наближеного розв'язку диференціального або інтегрального рівнянь важливим етапом є доведення існування цього розв'язку. Одним із найуживаніших методів дослідження цих рівнянь на існування розв'язку є метод, що опирається на класичну теорему Каччіополлі-Банаха про оператор стискування. Цей оператор є неперервним і має єдину нерухому точку, знаходження якої проводиться методом послідовних наближень [1, С. 605-606]. Якщо оператор, який відповідає досліджуваному рівнянню, не є оператором стискування, то пошук розв'язку ускладняється. З іншого боку, диференціальне або інтегральне рівняння можна записати у вигляді рівності двох операторів, а пошук розв'язку цього рівняння привести до пошуку точки, в якій обидва оператори приймають однакове значення, тобто до пошуку спільної точки операторів. Особливо це зручно, якщо кожен з отриманих операторів простіший ніж досліджуваний оператор.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Оператори стискування широко використовуються в теоремах про існування розв'язків диференціальних та інтегральних рівнянь [1, С. 620-629], [2, С. 465-470]. Існують теореми і методи пошуку нерухомих точок оператора, які не використовують умови теореми Каччіополлі-Банаха. Це, наприклад, принцип Шаудера [1, С. 616], теорема Какутані [1, С. 630], яку використовують у теорії ігор. Однак, вони справедливі лише на компактних просторах, та істотно використовують властивості неперервності або замкнутості оператора. У роботах [3], [4] і [5] були отримані умови, що розширюють межі застосування принципу стискаючого відображення.

Мета дослідження

Метою цієї роботи є визначення умов, достатніх для існування спільної точки двох операторів, які відображають повний метричний простір на себе, а також побудова методу пошуку цієї точки.

Викладення основного матеріалу дослідження

Надалі будемо розглядати повний метричний простір X з метрикою ρ в ньому. Спільною точкою двох операторів u і v, які означені на просторі X, будемо називати таку точку x^* цього простору, в якій виконується рівність $u(x^*) = v(x^*)$.

Теорема 1. *Нехай оператори* u і v *відображають повний метричний простір* X *на себе, і для оператора* v *на цьому просторі існує обернений оператор.*

Якщо для довільних точок x' *і* x'' *простору* X *виконується нерівність*

$$\rho(u(x'); u(x'')) \le \alpha\rho\big(v(x'); v(x'')\big), \tag{1}$$

де $0 \le \alpha < 1$, *то існує єдина спільна точка операторів* u і v.

Доведення. Візьмемо довільну точку x_0 простору X і знайдемо точку x_1 з рівняння $v(x_1) = u(x_0)$. Оскільки за умовою теореми оператор v відображає простір X на себе і для нього існує обернений оператор v^{-1}, то така точка x_1 існує, причому вона єдина і знаходиться за формулою $x_1 = v^{-1}(u(x_0))$. Аналогічно, з рівності $v(x_2) = u(x_1)$ знаходимо точку x_2: $x_2 = v^{-1}(u(x_1))$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, з рівності:

$$v(x_n) = u(x_{n-1}) \tag{2}$$

будуємо послідовність $\{x_n\}$ точок $x_n = v^{-1}\big(u(x_{n-1})\big),\ n = 1,2, \dots$. З огляду на рівність (2), з нерівності (1) послідовно отримуємо:

$$\rho\big(v(x_2);v(x_1)\big)=\rho\big(u(x_1);u(x_0)\big)\le\alpha\rho\big(v(x_1);v(x_0)\big),$$
$$\rho\big(v(x_3);v(x_2)\big)=\rho\big(u(x_2);u(x_1)\big)\le\alpha\rho\big(v(x_2);v(x_1)\big)\le\alpha^2\rho\big(v(x_1);v(x_0)\big),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho\big(v(x_n);v(x_{n-1})\big)\le\alpha^{n-1}\rho\big(v(x_1);v(x_0)\big),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ n=2,3,\ldots.$$

З цих нерівностей випливає, що послідовність $\{v(x_n)\}$ є збіжною в собі [1, С. 606], і, внаслідок повноти простору X, збігається до деякої точки x' цього простору. З рівності (2) отримуємо, що послідовність $\{u(x_n)\}$ теж збігається до точки x'.

Нехай точка x^* простору X така, що $v(x^*)=x'$. Тоді з нерівності (1) для цієї точки отримаємо нерівність:

$$\rho\big(u(x_n);u(x^*)\big)\le\alpha\rho\big(v(x_n);v(x^*)\big)=\alpha\rho(v(x_n);x').$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $n\to\infty$, отримаємо: $\rho\big(x';u(x^*)\big)\le\alpha\rho(x';x')=0$.

Таким чином, справедлива рівність: $u(x^*)=x'$ і, отже, x^* - спільна точка операторів u і v. Єдиність цієї точки можна отримати з нерівності (1), так само, як і при доведенні теореми Каччіополлі-Банаха.

Якщо в умови Теореми 1 в якості оператора v взяти одиничний оператор: $v(x)=x$ для будь-якої точки x простору X, то отримаємо вищезгадану теорему Каччіополлі-Банаха про нерухому точку оператора стискування. В цьому випадку оператор u, за теоремою Каччіополлі-Банаха, буде неперервним у кожній точці простору X.

Приклад побудови послідовних наближень, у разі, якщо $u=k_1x, v=k_2x$ $(k_1<k_2)$, показаний на рис. 1.

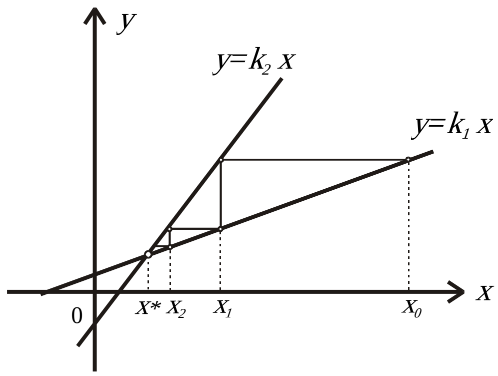

Рис. 1. Схема послідовних наближень до спільної точки.

Умова (1), взагалі кажучи, не обов'язкова для існування спільної точки двох операторів. На це вказує наступний результат.

Теорема 2. *Нехай оператори u і v відображають повний метричний простір X на себе, і для оператора v на цьому просторі існує обернений оператор.*

Якщо для довільних точок x' і x'' простору X виконується нерівність

$$\rho(u(x');u(x''))\ge\alpha\rho\big(v(x');v(x'')\big),\qquad(3)$$

де $\alpha>1$, то існує єдина спільна точка операторів u і v.

Доведення. З нерівності (3) випливає, що для оператора u на просторі X існує обернений оператор u^{-1}. Дійсно, за умовою теореми 2 оператор u відображає простір X на себе. Припустимо, що у двох різних точках x' і x'' простору оператор u приймає однакове значення: $u(x') = u(x'') = x$ і $\rho(x'; x'') \neq 0$. Тоді з нерівності (3) для цих точок отримаємо:

$$\rho\big(u(x'); u(x'')\big) = \rho(x; x) \geq \alpha\rho\big(v(x'); v(x'')\big),$$

або $\rho\big(v(x'); v(x'')\big) = 0$. Отже, оператор v в точках x' і x'' теж приймає однакове значення, що суперечить умові існування оберненого оператора. З нерівності (3) знаходимо:

$$\rho\big(v(x'); v(x'')\big) \leq \frac{1}{\alpha}\rho\big(u(x'); u(x'')\big), \tag{4}$$

Так як справедливі нерівності $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$, то, з огляду на нерівність (4), маємо, що оператори u i v задовольняють умови теореми 1, тому для них існує єдина спільна точка.

Якщо в умові Теореми 2 в якості оператора v взяти одиничний оператор, то умова (3) набере вигляду:

$$\rho(u(x'); u(x'')) \geq \alpha\rho(x'; x''). \tag{5}$$

У цьому випадку, Лема 1 роботи [4, С. 167] є частинним випадком Теореми 2. Наведемо приклад оператора, що задовольняє умову (5).

Приклад 1. Розглянемо повний метричний простір R_0^2 [6, С. 43], точками якого є упорядковані пари дійсних чисел: $x(x_1; x_2)$. Відстань між точками $x'(x_1'; x_2')$ та $x''(x_1''; x_2'')$ цього простору означається за допомогою рівності: $\rho(x'; x'') = \max\limits_{1\leq k\leq 2}\{|x_k' - x_k''|\}$.

Матричний оператор $u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ відображає простір R_0^2 на себе за правилом: $u(x) = y(y0_1; y_2)$, де $y_i = \sum_{k=1}^{2} u_{ik}\, x_k$ $(i = 1,2)$. Для того, щоб оператор u був оператором стискування, необхідно і достатньо, щоб для деякого числа $\propto$ виконувались нерівності: $\sum_{k=1}^{2}|u_{ik}| \leq \propto < 1$ $(i = 1,2)$ [6, С. 66-67].

Оператор $u = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ не задовольняє вказаній вище умові, і тому не є оператором стискування. З іншого боку, цей оператор задовольняє умову (5), якщо покласти: $\alpha = 2 > 1$. Отже, за Теоремою 2, для цього оператора існує єдина спільна точка з одиничним оператором, тобто нерухома точка оператора u.

Знайдемо нерухому точку оператора u методом послідовних наближень. Для цього використаємо обернений оператор: $u^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. Наближення розпочнемо, наприклад, з точки $x_0(1; 1)$. Застосувавши послідовно n разів обернений оператор, за правилом: $x_{n+1} = u^{-1}(x_n)$ $(n = 0,1,2,\dots)$, отримаємо послідовність $\{x_n\}$ точок $x_n = (u^{-1})^n(x_0) = (u^n)^{-1}(x_0)$. Далі будемо мати:
$u^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$, $(u^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 0 \\ 0 & 0{,}5^n \end{pmatrix}$. Тепер знаходимо елементи послідовності:

$$x_n = \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 0 \\ 0 & 0{,}5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5^n \\ 0{,}5^n \end{pmatrix}(n = 1,2,\dots)\,.$$

Перейшовши у цій рівності до границі при $n \to \infty$, отримуємо нерухому точку: $x^*(0; 0)$.

Використовуючи теореми 1 і 2, можна робити висновок про існування спільної точки трьох операторів.

Наслідок 1. *Якщо для операторів u і v, що задовольняють умови теореми 1, або теореми 2, і для оператора f, що відображає повний метричний простір X на себе, виконується рівність:*

$$\rho\big(u(x); f(x)\big) + \rho\big(f(x); v(x)\big) = \rho\big(u(x); v(x)\big) \tag{6}$$

в кожній точці x простору X, то оператори u, v і f мають єдину спільну точку.

Доведення. За Теоремою 1 або 2 оператори u і v мають єдину спільну точку x^* в просторі X. Тобто, справедлива рівність: $u(x^*) = v(x^*)$. Для цієї точки рівність (6) набуде вигляду:
$\rho\big(u(x^*); f(x^*)\big) + \rho\big(f(x^*); v(x^*)\big) = \rho\big(u(x^*); v(x^*)\big)$, або $\rho\big(v(x^*); f(x^*)\big) = 0$. Тому справедлива рівність: $v(x^*) = f(x^*)$, і точка x^* є спільною точкою операторів v і f, а отже, і операторів u, v і f.

Наслідок 1, по аналогії з властивістю границі проміжної послідовності, можна було б назвати властивістю спільної точки проміжного оператора.

Наслідок 2. *Якщо оператор стискування u і оператор f, що відображають повний метричний простір X на себе, задовольняють рівність:*

$$\rho\big(u(x); f(x)\big) + \rho\big(f(x); x\big) = \rho\big(u(x); x\big) \tag{7}$$

для будь-якої точки x простору X, то оператор f має єдину нерухому точку.

Доведення. Цей наслідок отримуємо з Наслідку 1, вибравши в якості оператора v одиничний оператор: $v(x) = x$.

Наслідок 2 цікавий тим, що оператор f не обов'язково повинен бути оператором стискування, або мати обернений оператор. Однак, якщо припустити неперервність оператора u в нерухомій точці, то можна зробити висновок і про неперервність оператора f у цій точці.

Теорема 3. *Нехай оператор u і оператор f відображають повний метричний простір X на себе. Нехай, крім того, оператор u має нерухому точу x^* у просторі X, і є неперервним у цій точці.*

Якщо у кожній точці простору X виконується рівність (7)*, то оператор f є неперервним у точці x^*, і вона є для нього нерухомою точкою.*

Доведення. Нехай точка x^* є нерухомою точкою оператора u. У цьому випадку буде виконуватись рівність: $u(x^*) = x^*$. Підставивши це значення у рівність (7), будемо мати:

$$\begin{aligned}\rho\big(u(x^*); f(x^*)\big) + \rho\big(f(x^*); x^*\big) = \rho\big(x^*; f(x^*)\big) + \rho\big(f(x^*); x^*\big) = \\ = 2\rho\big(x^*; f(x^*)\big) = \rho\big(u(x^*); x^*\big) = \rho(x^*; x^*) = 0.\end{aligned}$$

Звідси отримуємо рівність: $\rho\big(x^*; f(x^*)\big) = 0$, а це означає, що точка x^* є нерухомою точкою оператора f.

Для доведення неперервності оператора f у точці x^* візьмемо довільну послідовність $\{x_n\}$ точок простору X, що збігається до точки x^*. Для довільного елемента x_n цієї послідовності виконується рівність (7):

$$\rho\big(u(x_n); f(x_n)\big) + \rho\big(f(x_n); x_n\big) = \rho\big(u(x_n); x_n\big).$$

З цієї рівності знаходимо:

$$\rho(f(x_n); x_n) = \rho(u(x_n); x_n) - \rho\big(u(x_n); f(x_n)\big) \le \rho(u(x_n); x_n).$$

Перейшовши у цій нерівності до границі при $n \to \infty$, і використовуючи неперервність оператора u в точці x^*, будемо мати:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f(x_n); x_n) \le \lim_{n\to\infty} \rho(u(x_n); x_n) = \rho(x^*; x^*) = 0.$$

Використаємо нерівність трикутника: $\rho(f(x_n); x^*) \le \rho(f(x_n); x_n) + \rho(x_n; x^*)$. Перейшовши у цій нерівності до границі при $n \to \infty$, і використавши при цьому попередню нерівність, будемо мати:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f(x_n); x^*) \le \lim_{n\to\infty} \rho(f(x_n); x_n) + \lim_{n\to\infty} \rho(x_n; x^*) = 0.$$

Оскільки відстань є невід'ємною величиною, то отримана нерівність означає справедливість рівності: $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f(x_n); x^*) = 0$, а це, внаслідок збіжності послідовності $\{x_n\}$ до точки x^*, означає неперервність оператора f у цій точці.

Сутність Теореми 3 можна графічно продемонструвати на прикладі функції $u(x) = kx$ $(k > 1)$, та функції $f(x)$, що задовольняє нерівності: $x < f(x) < u(x)$ (рис. 2).

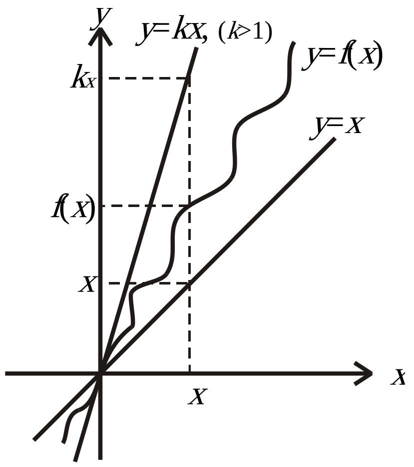

Рис. 2. Властивість спільної точки проміжного оператора.

У цьому випадку, за метрикою простору R^1, рівність (7) буде мати вигляд:

$$\rho\big(u(x); f(x)\big) + \rho(f(x); x) = |kx - f(x)| + |f(x) - x| = |kx - x| = \rho(u(x); x).$$

Таким чином, рівність (7) виконується, і отже функція $f(x)$ має, як і функція $u(x) = kx$, нерухому точку $x = 0$.

Висновки

При дослідженні існування розв'язку диференціальних та інтегральних рівнянь відповідні оператори, у випадку, якщо вони не є операторами стискування, можна розбивати на декілька більш простих операторів і шукати їхню спільну точку. Якщо оператор f не є неперервним і не має оберненого, то можна шукати такий оператор стискування u, щоб вони обидва задовольняли рівність (6), а потім шукати нерухому точку оператора u. За Наслідком 1 ця точка буде нерухомою точкою оператора f.

У подальшому важливо, використовуючи результати роботи, отримати нові умови існування і єдиності розв'язків конкретних типів диференціальних та інтегральних рівнянь.

Список використаної літератури

1. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
2. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
3. Кузьмич В.И. Дополнение к теореме Банаха об операторе сжатия / В.И. Кузьмич // Труды XII международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". – Харьков-Херсон, 2005. – С. 189-192.
4. Кузьмич В.И. О неподвижной точке оператора / В.И. Кузьмич // Вісник Харківського національного університету. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. Харків, 2005. – № 661. – Вип. 4. – С. 167-173.
5. Кузьмич В.И. Об общей точке операторов / В.И. Кузьмич // Математическое моделирование в образовании, науке и промышленности Сб. науч. тр. – СПб.: Санкт – Петербургское отделение МАН ВШ, 2005. – С. 58-61.
6. Колмогоров А.М. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу / А.М. Колмогоров, С.В. Фомін. – К.: Видавниче об'єднання "Вища школа", 1974. – 456 с.

References

1. Kantorovich L.V., Akilov G.P. (1977). *Funktsionalnyi analiz*. M.: Nauka (in Russ.)
2. Natanson I.P. (1974). *Teoriia funktsii veshchestvennoi peremennoi*. M.: Nauka (in Russ.)
3. Kuzmich V.I. (2005). Dopolnenie k teoreme Banakha ob operatore szhatiia. *Trudy XII mezhdunarodnogo simpoziuma "Metody diskretnykh osobennostei v zadachakh matematicheskoi fiziki", 189-192*. Kharkov-Kherson (in Russ.)
4. Kuzmich V.I. (2005). O nepodvizhnoi tochke operatora. *Visnuk Kharkivskogo natsionalnogo universytetu. Seriia: Matematychne modeliuvannia. Informatsiini tekhnologii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia, **666(4)**, 167-173* (in Russ.)
5. Kuzmich V.I. (2005). Ob obshchei tochke operatora. *Matematicheskoe modelirovanie v obrazovanii, nauke i promyshlennosti. Sbornik nauchnykh trudov, 58-61.* SPb.: Sankt-Peterbyrgskoe otdelenie MAN VSH (in Russ.)
6. Kolmogorov A.M., Fomin S.V. (1974). *Elementy teorii funktsii i funktsionalnogo analizu*. K.: Vyshcha shkola (in Ukr.)