

УДК 303.09, 303.733

Сидоров М.В.-С. °

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, факультет соціології, кандидат фізико-математичних наук, доцент

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ СОЦІОЛОГІВ: ЛОГІСТИЧНА МОДЕЛЬ ФЕРХЮЛЬСТА ІЗ ЗОВНІШНІМ ВПЛИВОМ

У роботі розглядається базова логістична модель Ферхюльста з можливістю зовнішнього впливу, який виражений через втрату частини популяції. Представлені різні випадки співвідношення коефіцієнтів рівняння, наводиться його розв'язок у явному вигляді. Зазначені відмінності у дискретному та неперервному випадках.

Ключові слова: демографічна модель, логістична модель Ферхюльста із зовнішнім впливом

В работе рассматривается базовая логистическая модель Ферхюльста с возможностью внешнего воздействия, выраженная посредством возможности потери части популяции. Представлены различные случаи соотношения коэффициентов уравнения, приводится его решение в явном виде. Обозначены различия в дискретном и непрерывном случаях.

Ключевые слова: демографическая модель, логистическая модель Ферхюльста с внешним воздействием

We consider the logistics Verhulst model with the possibility of external influence that marked with the loss of population. Various cases of coefficients are considered, given its solution in explicit form. We give differences in discrete and continuous cases.

Keywords: demographic model, logistic Verhulst model with external influence

Аналіз будь якої складної системи пов'язаний зі спробою формалізації цієї системи для опису її існування та розвитку. Модель може використовуватись як для прогнозу, так і для дослідження структури системи та взаємозв'язку її компонентів, але модель, через складність системи, часто не може повністю співпадати з самою системою. Важливим є, щоб модель була схожою до системи у тих аспектах, що цікавлять дослідника, але не обов'язково має повністю імітувати її.

Існує низка базових моделей, які можуть використовуватись при моделюванні процесів у соціології. До таких моделей відносять і моделі прогнозу обсягу популяції, розглянуті у [1] та [2] та інших. Зокрема у [2] розглядалась базова модель Ферхюльста динаміки обсягу популяції у замкненій системі. Але, очевидно, ця модель не є вичерпною для всіх випадків моделювання обсягу популяцій. Логічним розвитком такої моделі є наявність зовнішнього впливу. Це може бути, наприклад, вплив міграційного процесу на зміну населення регіонів, що на даний момент для досліджень в Україні та світі є надзвичайно **актуальним** питанням.

Метою даної роботи є аналіз математичної моделі Ферхюльста з врахуванням зовнішнього впливу, що виражається внесенням у до модель, розглянутої у [2] ще одного фактору - константи K - зменшення популяції та побудова як дискретної (різницевої) моделі, так і розв'язку у явному вигляді для диференційної.

У роботі [2] розглядалась серед інших дискретна модель

$$F_{i+1} = F_i \cdot \left(1 + r \frac{F_{\max} - F_i}{F_{\max}} \right) \text{ або} \quad (1)$$

$$F(t + \Delta t) = F(t) \cdot \left(1 + r\Delta t \frac{F_{\max} - F(t)}{F_{\max}} \right),$$

Додамо до моделі параметр K , який буде виступати фактором негативного впливу на популяцію - це може бути норма вилову риби у водоймі, для країн це може бути параметр міграційного процесу, епідемії, катаклізмів та ін.

У даній роботі вважатимемо цей фактор константою (жорстка модель), тобто, не залежно від обсягу популяції $F(t)$, її вплив є постійним. Якщо взяти за основу моделі різницеву схему (1), то модель з постійним зовнішнім впливом має вигляд

$$F_{i+1} = F_i \cdot \left(1 + r \frac{F_{\max} - F_i}{F_{\max}} \right) - K^1 \text{ або} \quad (2)$$

$$F(t + \Delta t) = F(t) \cdot \left(1 + r\Delta t \frac{F_{\max} - F(t)}{F_{\max}} \right) - K\Delta t,$$

Зазначимо, що параметр K може бути як від'ємним, так і додатним: додатній означає втрату чисельності популяції, від'ємний – набуття. Ми розглядатимемо тут додатній параметр K , тобто втрату чисельності.

Якщо значення $K\Delta t$ перевищує приріст популяції у моделі Ферхюльста (1) то популяція буде зменшуватись, якщо ні, то збільшуватись. Можна підібрати параметр K так, щоб обсяг популяції за інших умов залишався постійним.

Диференціальне рівняння, що відповідає різницевій схемі (2) має вигляд

$$\frac{dF(t)}{dt} = rF(t) - \frac{r}{F_{\max}} F^2(t) - K, \quad (3)$$

Визначимо стаціонарні стани цього рівняння, тобто $\frac{dF(t)}{dt} = 0$. Для цього прирівняємо праву сторону рівняння (3) до нуля:

$$rF(t) - \frac{r}{F_{\max}} F^2(t) - K = 0$$

Отримане квадратне рівняння має два стаціонарних значення

$$F_{1,2} = \frac{F_{\max}}{2} \pm \sqrt{\frac{F_{\max}^2}{4} - \frac{KF_{\max}}{r}}. \quad (4)$$

Треба розглянути 2 випадки $F_{\max} \geq \frac{4K}{r}$ та $F_{\max} < \frac{4K}{r}$, тобто, коли існують дійсні розв'язки рівняння (4) та не існують.

¹ У дискретному випадку параметр K – вплив за один крок.

1. ВИПАДОК $F_{\max} \geq \frac{4K}{r}$ (Рис 1).

Тоді $F_1 = \frac{F_{\max}}{2} + \sqrt{\frac{F_{\max}^2}{4} - \frac{KF_{\max}}{r}}$ та $F_2 = \frac{F_{\max}}{2} - \sqrt{\frac{F_{\max}^2}{4} - \frac{KF_{\max}}{r}}$ - корені квадратного тричлена $rF(t) - \frac{r}{F_{\max}}F^2(t) - K = 0$, $F_1 > F_2 > 0$.

Дослідимо стійкість стаціонарних станів F_1 та F_2 за методом Ляпунова.

Позначимо $f(F) = \frac{dF(t)}{dt}$. Тоді

$$f'(F) = \left(rF(t) - \frac{r}{F_{\max}}F^2(t) - K \right)' = r - \frac{2rF(t)}{F_{\max}},$$

$$f'(F_1) = r - \frac{2rF_1}{F_{\max}} = r - \frac{2r \left(\frac{F_{\max}}{2} + \sqrt{\frac{F_{\max}^2}{4} - \frac{KF_{\max}}{r}} \right)}{F_{\max}} = -\frac{2r}{F_{\max}} \sqrt{\frac{F_{\max}^2}{4} - \frac{KF_{\max}}{r}} < 0,$$

$$f'(F_2) = r - \frac{2rF_2}{F_{\max}} = r - \frac{2r \left(\frac{F_{\max}}{2} - \sqrt{\frac{F_{\max}^2}{4} - \frac{KF_{\max}}{r}} \right)}{F_{\max}} = \frac{2r}{F_{\max}} \sqrt{\frac{F_{\max}^2}{4} - \frac{KF_{\max}}{r}} > 0.$$

Отже, стаціонарний стан F_1 - стійкий (незначна зміна початкових умов не приводить до змін поведінки розв'язку рівняння), а F_2 - нестійкий (незначне збурення початкових умов приводить до суттєвих змін розв'язку диференціального рівняння).

Розв'яжемо рівняння (3) при умові $F(0) = F_0$. Рівняння (3) перепишемо з використанням (4) у вигляді:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{r}{F_{\max}}(F - F_1)(F_2 - F)$$

Очевидними частинними розв'язками цього рівняння є: $F = F_1$ та $F = F_2$. Тоді

$\frac{dF(t)}{dt} = 0$, а частинними розв'язками є горизонтальні прямі $F(t) = F_1$ та $F(t) = F_2$ відповідно. Так як $t \in (-\infty; \infty)$, то ці прямі проходять через точку $t=0$, тобто через $F(0) = F_0 = F_1$ та $F_0 = F_2$ відповідно. Це означає, що якщо початкові умови задачі Коші диференціального рівняння (3) є $F_0 = F_1$ або $F_0 = F_2$, то частинним розв'язком цього диференціального рівняння будуть прямі $F(t) = F_1$ та $F(t) = F_2$. У свою чергу це означає, що значення $F(t)$ та F_0 знаходяться по одну сторону від

$F(t) = F_1$ та $F(t) = F_2$, тобто можуть існувати лише 3 варіанти при $F_{\max} \geq \frac{4K}{r}$:

а) $F(t) < F_2 < F_1$, $F_0 < F_2 < F_1$;

б) $F_2 < F(t) < F_1$, $F_2 < F_0 < F_1$;

в) $F_2 < F_1 < F(t)$, $F_2 < F_1 < F_0$;

які розглянемо нижче.

Для розв'язку (3) при $F_{\max} \geq \frac{4K}{r}$ спочатку розділяємо змінні, тобто всі функції, залежні від t переносимо у одну сторону рівняння, а всі не залежні від t – у іншу:

$$\frac{dF}{(F - F_1)(F_2 - F)} = \frac{r}{F_{\max}} dt, \tag{5}$$

Застосовуємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{1}{(F - F_1)(F_2 - F)} = \frac{a}{F - F_1} + \frac{b}{F_2 - F} \quad 1 = a(F_2 - F) + b(F - F_1) = F(-a + b) + aF_2 - bF_1.$$

Для того, щоб знайти a та b , потрібно прирівняти коефіцієнти при відповідних степенях F (тобто F у нульовій та F у першій степені):

$$\begin{matrix} F \\ F^0 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 0 = -a + b \\ 1 = aF_2 - bF_1 \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{matrix} a = b = \frac{1}{F_2 - F_1} \\ a = b = -\frac{1}{F_1 - F_2} \end{matrix}.$$

Підставляємо a та b у (5) та інтегруємо

$$\left(\frac{1}{F_2 - F_1} \right) \int \frac{dF}{F - F_1} + \left(-\frac{1}{F_1 - F_2} \right) \int \frac{dF}{F_2 - F} = \frac{r}{F_{\max}} \int dt,$$

отримуємо

$$\frac{1}{F_2 - F_1} \ln|F - F_1| + \frac{1}{F_1 - F_2} \ln|F - F_2| = \frac{r}{F_{\max}} t + \ln C.$$

Звідси

$$\frac{1}{F_1 - F_2} \ln \left| \frac{F - F_2}{F - F_1} \right| = \frac{r}{F_{\max}} t + \ln C. \tag{6}$$

Покладемо $t=0$, щоб знайти C : $\frac{1}{F_1 - F_2} \ln \left| \frac{F_0 - F_2}{F_0 - F_1} \right| = \ln C$, $C = \left| \frac{F_0 - F_2}{F_0 - F_1} \right|^{\frac{1}{F_1 - F_2}}$. Якщо

підставити це значення у (6), то отримаємо

$$\frac{1}{F_1 - F_2} \ln \left| \frac{F - F_2}{F - F_1} \right| = \frac{r}{F_{\max}} t + \frac{1}{F_1 - F_2} \ln \left| \frac{F_0 - F_2}{F_0 - F_1} \right|.$$

Множимо на $F_1 - F_2$

$$\ln \left| \frac{F - F_2}{F - F_1} \right| = \frac{r}{F_{\max}} (F_1 - F_2)t + \ln \left| \frac{F_0 - F_2}{F_0 - F_1} \right|,$$

зводимо логарифм

$$\ln \left(\left(\frac{F - F_2}{F - F_1} \right) \left(\frac{F_0 - F_1}{F_0 - F_2} \right) \right) = \frac{r(F_1 - F_2)}{F_{\max}} t$$

та потенціюємо

$$\left| \left(\frac{F - F_2}{F - F_1} \right) \left(\frac{F_0 - F_1}{F_0 - F_2} \right) \right| = e^{\frac{r(F_1 - F_2)t}{F_{\max}}} \quad (7)$$

Для того, щоб розкрити знак модуля, потрібно розглянути всі випадки $F(t) < F_2 < F_1$, $F_0 < F_2 < F_1$; $F_2 < F(t) < F_1$, $F_2 < F_0 < F_1$; $F_2 < F_1 < F(t)$, $F_2 < F_1 < F_0$, описані вище. Одночасно з розглядом цих випадків будемо досліджувати поведінку графіка інтегральної кривої розв'язку.

1.А. ВИПАДОК $F(t) < F_2 < F_1$, $F_0 < F_2 < F_1$, (Рис 1, лінія $\triangle \triangle \triangle$, $F_0 = 35$, $F_{\max} = 500$, $r=0,3$, $K=10$)

Позначимо $A = \left| \frac{F_0 - F_1}{F_0 - F_2} \right| = \frac{F_1 - F_0}{F_2 - F_0}$, $B = \frac{r(F_1 - F_2)}{F_{\max}}$. Легко бачити з (4), що $A > 0$, $B > 0$, якщо $r > 0$. У протилежному випадку, коли $r < 0$ (народжуваність менша за смертність) і, відповідно, $B < 0$ відбувається стрімке вимирання популяції. При $F_2 < F < F_1$ (7) буде $\left(\frac{F_2 - F}{F_1 - F} \right) A = e^{Bt}$. Звідси

$$F(t) = \frac{F_1 e^{Bt} - AF_2}{e^{Bt} - A}, \quad (8)$$

при умові, що $F(0) = F_0$ та $F_0 < F_2 < F_1$.

Для побудови графіку функції $F(t)$ для цього випадку потрібно дослідити:

а). $F(0) = \frac{F_1 - AF_2}{1 - A}$, при $F=0$ $t = \frac{\ln \frac{AF_2}{F_1}}{B}$.

б). При $t \rightarrow +\infty$ $F \rightarrow F_1$, тобто $F = F_1$ - горизонтальна асимптота.

$t \rightarrow -\infty$ $F \rightarrow F_2$, тобто $F = F_2$ - горизонтальна асимптота

$t = \frac{\ln A}{B}$ - вертикальна асимптота.

в). Для дослідження поведінки графіку досліджуємо першу та другу похідні

$$F'(t) = -\frac{ABe^{Bt}(F_1 - F_2)}{(e^{Bt} - A)^2} < 0$$
 - функція монотонно спадає

$$F''(t) = \frac{AB^2(F_1 - F_2)e^{Bt}(A + e^{Bt})}{(e^{Bt} - A)^3} \neq 0$$
 - функція не має перегинів.

1.Б. ВИПАДОК $F_2 < F(t) < F_1$, $F_2 < F_0 < F_1$ (Рис 1, лінія , $F_0 = 36$, $F_{\max} = 500$, $r=0,3$, $K=10$)

Позначимо $A = \left| \frac{F_0 - F_1}{F_0 - F_2} \right| = \frac{F_1 - F_0}{F_0 - F_2}$, $B = \frac{r(F_1 - F_2)}{F_{\max}}$. Легко бачити, що $A > 0$, $B > 0$ з (4) та умов випадку.

При $F_2 < F < F_1$ (7) набуде вигляду $\left(\frac{F - F_2}{F_1 - F}\right)A = e^{Bt}$. Звідси

$$F(t) = \frac{F_1 e^{Bt} + F_2 A}{A + e^{Bt}} \quad (9)$$

при умові, що $F(0) = F_0$ і $F_2 < F_0 < F_1$.

Для побудови графіку функції $F(t)$ для цього випадку потрібно дослідити:

а). $F(0) = \frac{F_1 + AF_2}{1 + A}$, $F \neq 0$ для всіх значень t

б). При $t \rightarrow +\infty$ $F \rightarrow F_1$, тобто $F = F_1$ - горизонтальна асимптота.

$t \rightarrow -\infty$ $F \rightarrow F_2$, тобто $F = F_2$ - горизонтальна асимптота


в). Для дослідження поведінки графіку досліджуємо першу та другу похідні

$$F' = \frac{BF_1 e^{Bt}(e^{Bt} + A) - Be^{Bt}(F_1 e^{Bt} + AF_2)}{(e^{Bt} + A)^2} = \frac{ABe^{Bt}(F_1 - F_2)}{(e^{Bt} + A)^2} > 0$$
 - функція монотонно зростає

зростає

$$F'' = \frac{AB^2 e^{Bt}(F_1 - F_2)(A - e^{Bt})}{(e^{Bt} + A)^3} \Rightarrow F''(t) = 0 \text{ коли } e^{Bt} = A, \text{ тобто } t = \frac{\ln A}{B} - \text{ точка перегину}$$

перегину

1.В. ВИПАДОК $F_2 < F_1 < F(t)$, $F_2 < F_1 < F_0$ (Рис 1, лінія , $F_0 = 650$, $F_{\max} = 500$, $r=0,3$, $K=10$)

Позначимо $A = \left| \frac{F_0 - F_1}{F_0 - F_2} \right| = \frac{F_0 - F_1}{F_0 - F_2}$, $B = \frac{r(F_1 - F_2)}{F_{\max}}$. Легко бачити з (4), що $A > 0$,

$B > 0$.

При $F_2 < F_1 < F$ (7) матиме вигляд $\left(\frac{F - F_2}{F - F_1}\right)A = e^{Bt}$. Звідси

$$F(t) = \frac{F_1 e^{Bt} - F_2 A}{e^{Bt} - A} \quad (10)$$

при умові, що $F(0) = F_0$ і $F_2 < F_1 < F_0$.

Для побудови графіку функції $F(t)$ для цього випадку проведемо дослідження:

а). $F(0) = \frac{F_1 - F_2 A}{1 - A}$; $F \neq 0$ $t = \frac{\ln \frac{AF_2}{F_1}}{B}$.

б). При $t \rightarrow +\infty$ $F \rightarrow F_1$, тобто $F = F_1$ - горизонтальна асимптота;

$t \rightarrow -\infty$ $F \rightarrow F_2$, тобто $F = F_2$ - горизонтальна асимптота;

$t = \frac{\ln A}{B}$ - вертикальна асимптота.

в). Для дослідження поведінки графіку досліджуємо першу та другу похідні

$$F'(t) = -\frac{ABe^{Bt}(F_1 - F_2)}{(e^{Bt} - A)^2} < 0 \text{ - функція монотонно спадає}$$

$$F''(t) = \frac{AB^2(F_1 - F_2)e^{Bt}(A + e^{Bt})}{(e^{Bt} - A)^3} \neq 0, \text{ тобто функція } F(t) \text{ точки перегину не має.}$$

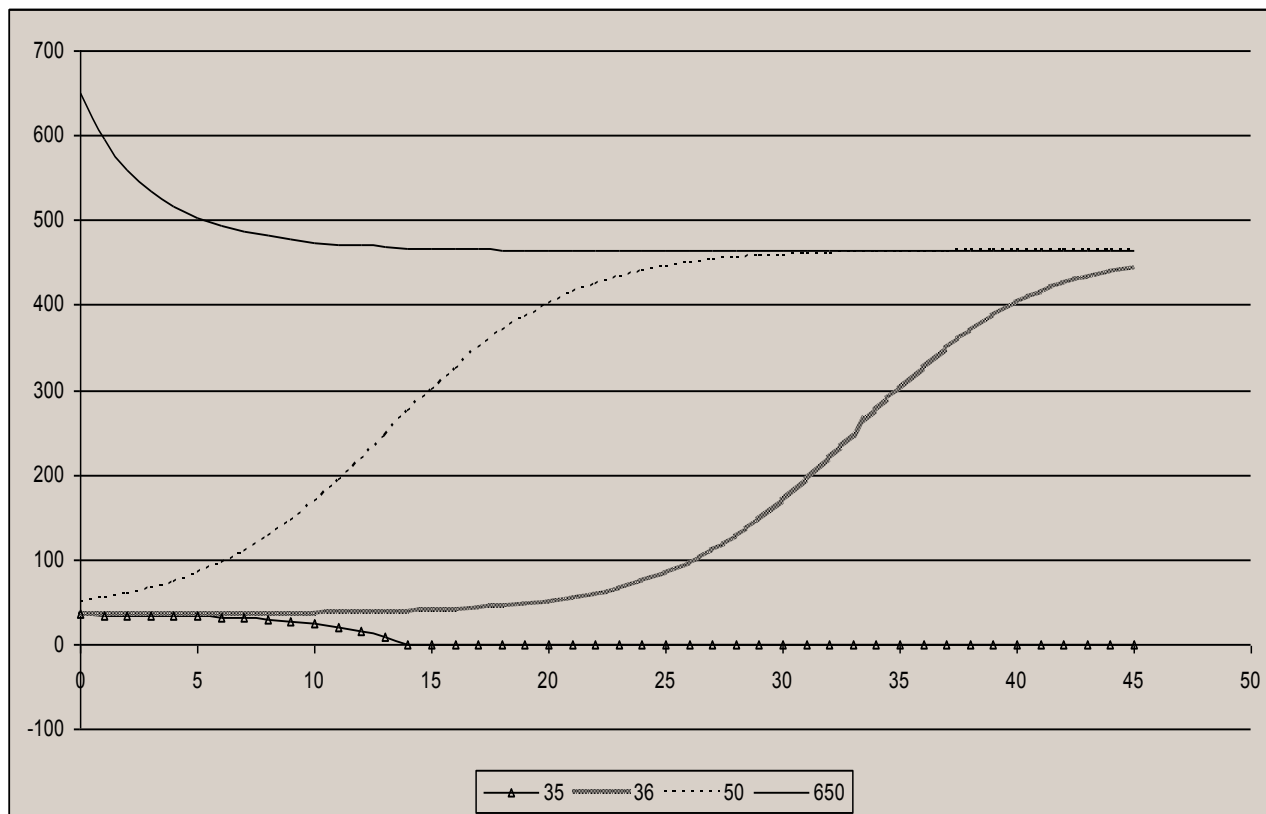


Рисунок 1.- Неперервна модель Ферхюльста із зовнішнім впливом при початковій популяції 35, 36, 50 та 650. Випадок $F_{\max} \geq \frac{4K}{r}$, $F_{\max} = 500$, $r=0,3$, $K=10$.

2. ВИПАДОК $F_{\max} < \frac{4K}{r}$.

Тут $rF(t) - \frac{r}{F_{\max}}F^2(t) - K = 0$ не має дійсних коренів. Тоді у рівнянні (3)

виділяємо повний квадрат

$$\frac{dF(t)}{-\left(\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4}\right) - \left(F(t) - \frac{F_{\max}}{2}\right)^2} = \frac{r}{F_{\max}} dt$$

або

$$\frac{dF(t)}{\left(\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4}\right) + \left(F(t) - \frac{F_{\max}}{2}\right)^2} = -\frac{r}{F_{\max}} dt$$

Проінтегрувавши останню рівність, матимемо

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{F(t) - \frac{F_{\max}}{2}}{\sqrt{\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4}}} = -\frac{rt}{F_{\max}} + C \quad (11)$$

З умови $F(0) = F_0$ знаходимо значення C :

$$C = \frac{1}{\sqrt{\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{F_0 - \frac{F_{\max}}{2}}{\sqrt{\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4}}}$$

Підставляємо цей результат у рівняння (11) і одержимо

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4}}} \left(\operatorname{arctg} \frac{F(t) - \frac{F_{\max}}{2}}{\sqrt{\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4}}} - \operatorname{arctg} \frac{F_0 - \frac{F_{\max}}{2}}{\sqrt{\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4}}} \right) = -\frac{rt}{F_{\max}} \quad (12)$$

Для отримання розв'язку перетворимо рівняння (12):

$$\begin{aligned} & \operatorname{arctg} \frac{F(t) - F_0}{\sqrt{\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4}}} = -\frac{r\sqrt{\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4}}}{F_{\max}} t, \\ & \operatorname{arctg} \frac{(F(t) - F_0)\sqrt{\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4}}}{\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4} + \left(F(t) - \frac{F_{\max}}{2}\right)\left(F_0 - \frac{F_{\max}}{2}\right)} = -\frac{r\sqrt{\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4}}}{F_{\max}} t, \\ & \frac{(F(t) - F_0)\sqrt{\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4}}}{\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4} + \left(F(t) - \frac{F_{\max}}{2}\right)\left(F_0 - \frac{F_{\max}}{2}\right)} = -\operatorname{tg} \frac{r\sqrt{\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4}}}{F_{\max}} t \end{aligned} \quad (13)$$

Позначимо $D = \sqrt{\frac{F_{\max}}{r}K - \frac{F_{\max}^2}{4}}$. Тоді (13) можна записати як

$$\begin{aligned} & \frac{(F(t) - F_0)D}{D^2 + \left(F(t) - \frac{F_{\max}}{2}\right)\left(F_0 - \frac{F_{\max}}{2}\right)} = -\operatorname{tg} \frac{rD}{F_{\max}} t, \\ & (F(t) - F_0)D = -\left(D^2 + \left(F(t) - \frac{F_{\max}}{2}\right)\left(F_0 - \frac{F_{\max}}{2}\right)\right) \operatorname{tg} \frac{rD}{F_{\max}} t \end{aligned}$$

$$F(t) \left(D + \left(F_0 - \frac{F_{\max}}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{rD}{F_{\max}} t \right) = F_0 D - \left(D^2 - \frac{F_{\max}}{2} \left(F_0 - \frac{F_{\max}}{2} \right) \right) \operatorname{tg} \frac{rD}{F_{\max}} t$$

Остаточно розв'язок при $F_{\max} < \frac{4K}{r}$ матиме вигляд

$$F(t) = \frac{F_0 D - \left(D^2 - \frac{F_{\max}}{2} \left(F_0 - \frac{F_{\max}}{2} \right) \right) \operatorname{tg} \frac{rD}{F_{\max}} t}{\left(D + \left(F_0 - \frac{F_{\max}}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{rD}{F_{\max}} t \right)}, \quad (14)$$

де $D = \sqrt{\frac{F_{\max}}{r} K - \frac{F_{\max}^2}{4}}$, $F(0) = F_0$.

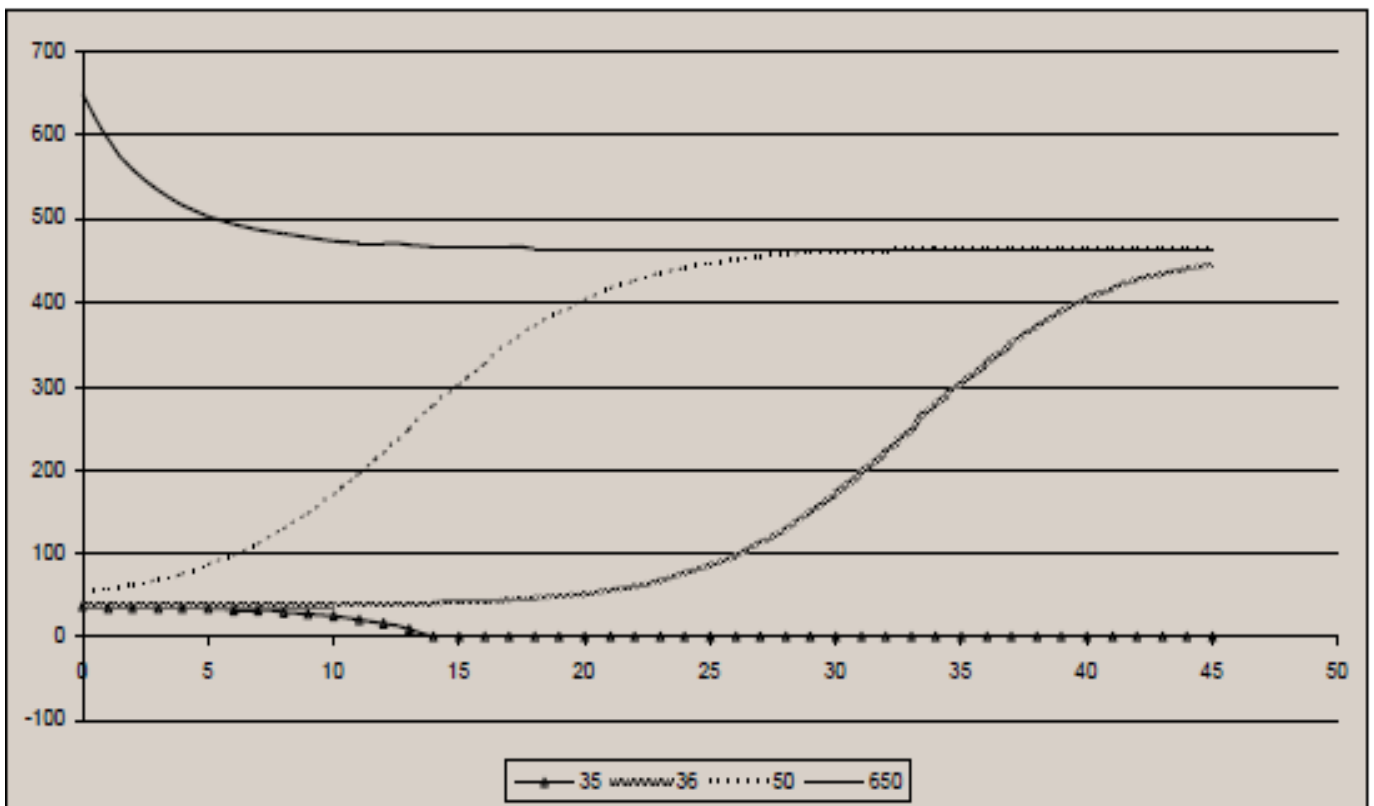


Рисунок 2. - Неперервна модель Ферхюльста із зовнішнім впливом при початковій популяції 50, 150, 300 та 1000. Випадок $F_{\max} < \frac{4K}{r}$, $F_{\max} = 500$, $r=0,03$, $K=10$.

Отже, ми повністю дослідили рівняння (3) та знайшли його розв'язок у явному вигляді для випадку додатних параметрів r та K .

Проілюструємо застосування цієї моделі на практиці. Нехай для деякої популяції $F_{\max} = 500$ біотичний потенціал $r=0,3$ параметр $K=10$. Зобразимо графіки для різницевої моделі (2) для різних значень початкового обсягу популяції (Рис 3).

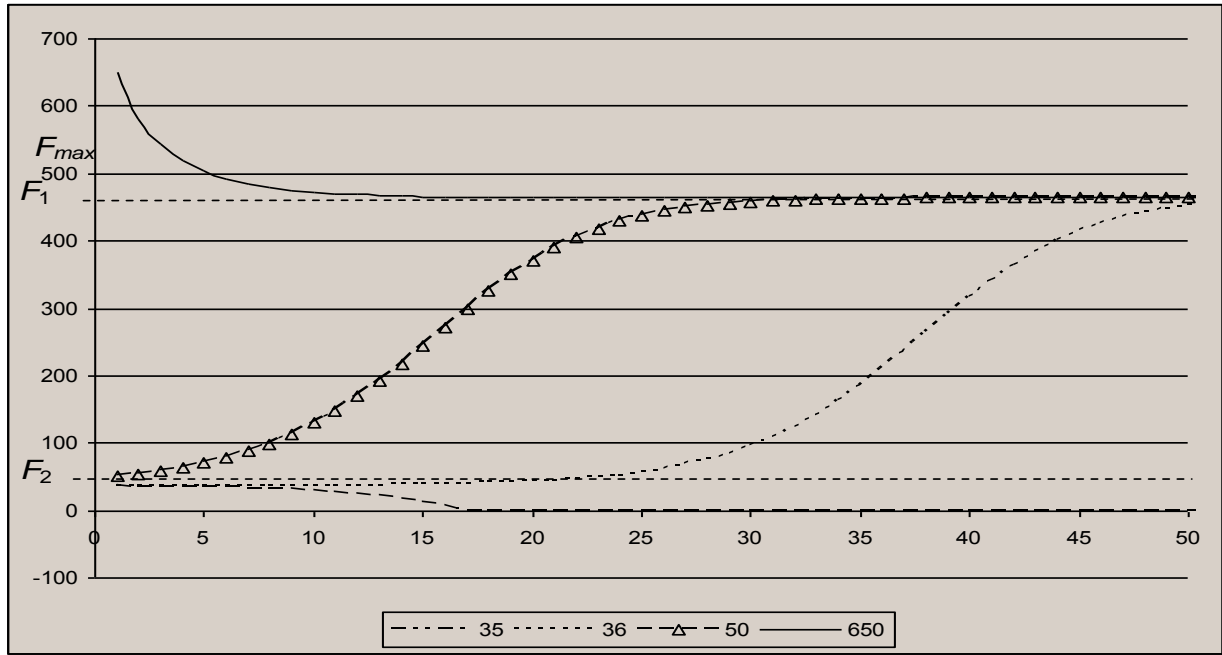


Рисунок 3. - Дискретна модель Ферхюльста із зовнішнім впливом при початковій популяції 35, 36, 50 та 650. Випадок $F_{\max} \geq \frac{4K}{r}$, $F_{\max} = 500$, $r=0,3$, $K=10$.

Якщо рівень біотичного потенціалу є досить великим, наприклад $r=2,15$, то при тих самих значення $F_{\max} = 500$ та $K=10$ отримаємо значення стійкого стаціонарний стану $F_1=495,3047$ та нестійкого $F_2=4,695254$ Рис 4.

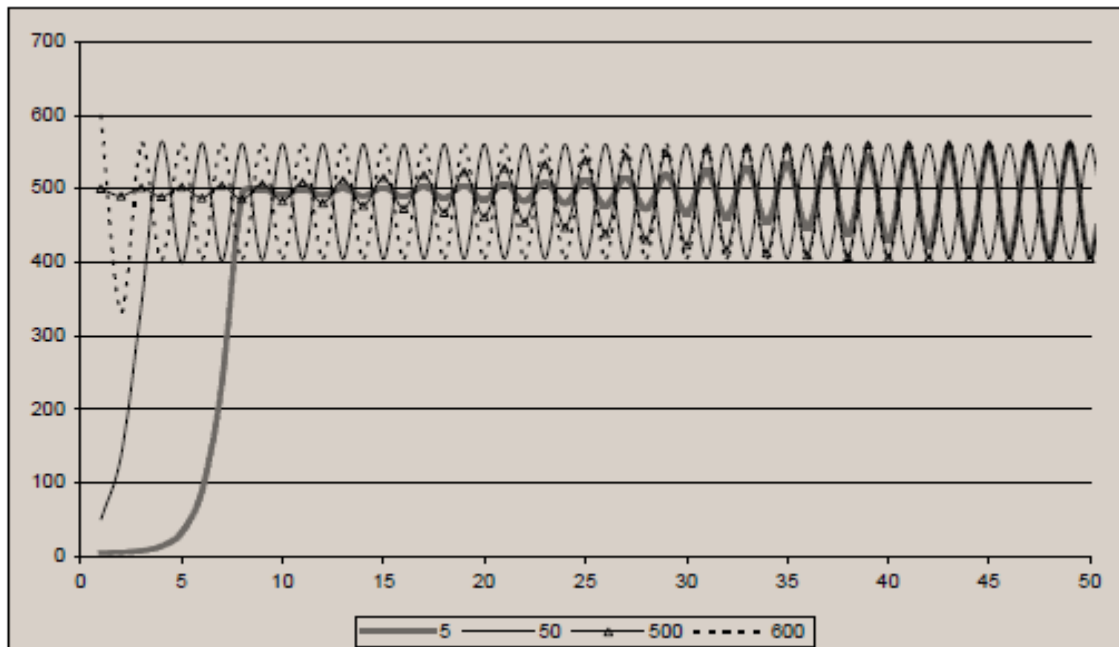


Рисунок 4. - Дискретна модель Ферхюльста із зовнішнім впливом при початковій популяції 5, 50, 500 та 600. Випадок $F_{\max} \geq \frac{4K}{r}$, $F_{\max} = 500$, $r=2,15$, $K=10$.

При рівні біотичного потенціалу більше за 3,04 при тих самих значення $F_{\max} = 500$ та $K=10$ у дискретній моделі отримаємо повне вимирання популяції не залежно від початкових умов. Наприклад для $r=3,045$ значення стійкого

стаціонарний стану $F_1=496,6941$ та нестійкого $F_2=3,305931$ отримаємо графік на Рис 5.

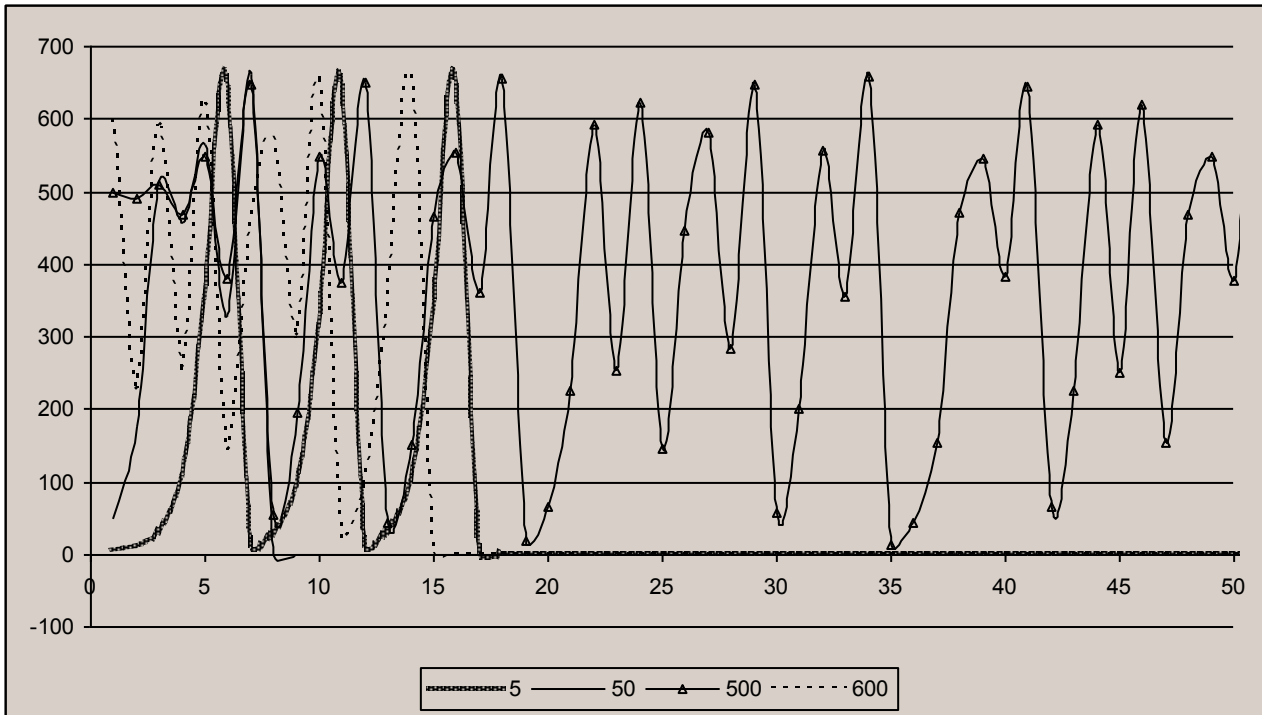


Рисунок 5. - Дискретна модель Ферхюльста із зовнішнім впливом при початковій популяції 5, 50, 500 та 600. Випадок $F_{\max} \geq \frac{4K}{r}$, $F_{\max} = 500$, $r=3,045$, $K=10$.

Саме у дискретній версії моделі допускається перетин стаціонарних станів через те, що значення обсягу популяції на кожному кроці визначається за обсягом на попередньому кроці, а приріст, як і втрати мають стрибкоподібну дискретну природу.

Якщо ж взяти параметри так, щоб $F_{\max} < \frac{4K}{r}$, наприклад $F_{\max} = 500$ біотичний потенціал $r=0,03$ параметр $K=10$, то графік розвитку популяції за дискретною моделлю (2) має вигляд, зображений на Рис. 6.

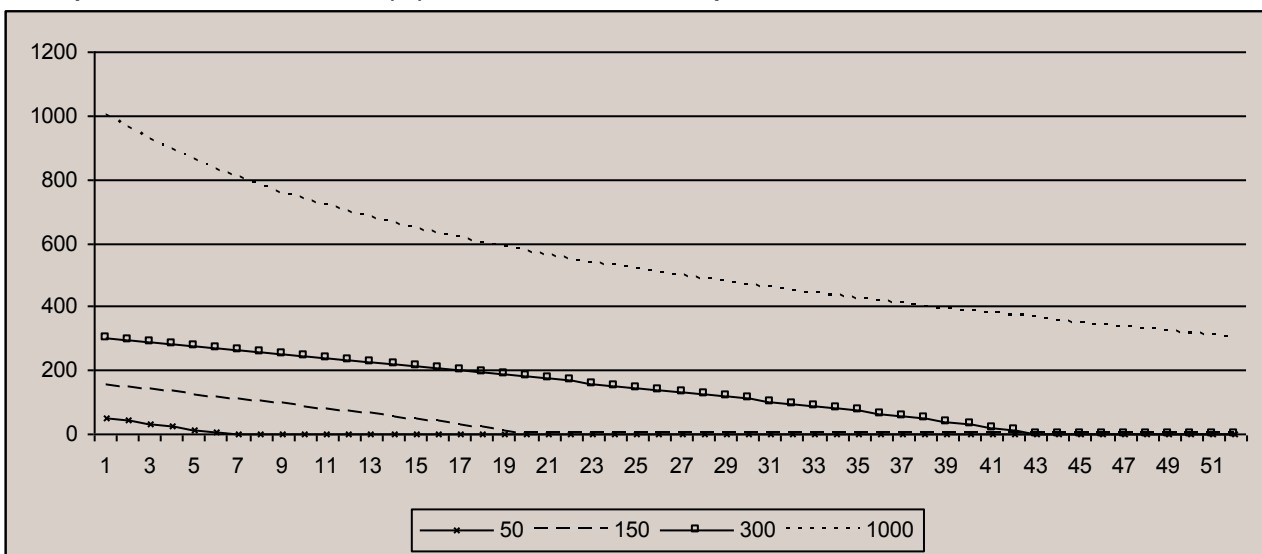


Рисунок 6. - Дискретна модель Ферхюльста із зовнішнім впливом при початковій популяції 50, 150, 300 та 1000. Випадок $F_{\max} < \frac{4K}{r}$, $F_{\max} = 500$, $r=0,03$, $K=10$.

Тут добре видно спадання чисельності всіх популяцій не залежно від початкового значення.

Якщо ж побудувати графіки неперервної моделі (Рис 1), то такі випадки є неможливими, про що розглядалось вище. З графіку функції видно наявність двох горизонтальних асимптот – стаціонарних станів стійкого $F_1=464,0872$ та нестійкого $F_2=35,91279$

Неперервна модель, навіть за великих значень біотичного потенціалу, не допускає можливості перетину кривими асимптот, за їх наявності (тут ми маємо на увазі той факт, що за умови $F_{\max} < \frac{4K}{r}$ асимптоти взагалі відсутні). Дійсно при для $r=3,045$ значення стійкого стаціонарний стану $F_1=496,6941$ та нестійкого $F_2=3,305931$ при початковій популяції 5, 50, 500 та 600, та $F_{\max} = 500$, $K=10$ прямують до асимптот, не перетинаючи їх (Рис 7).

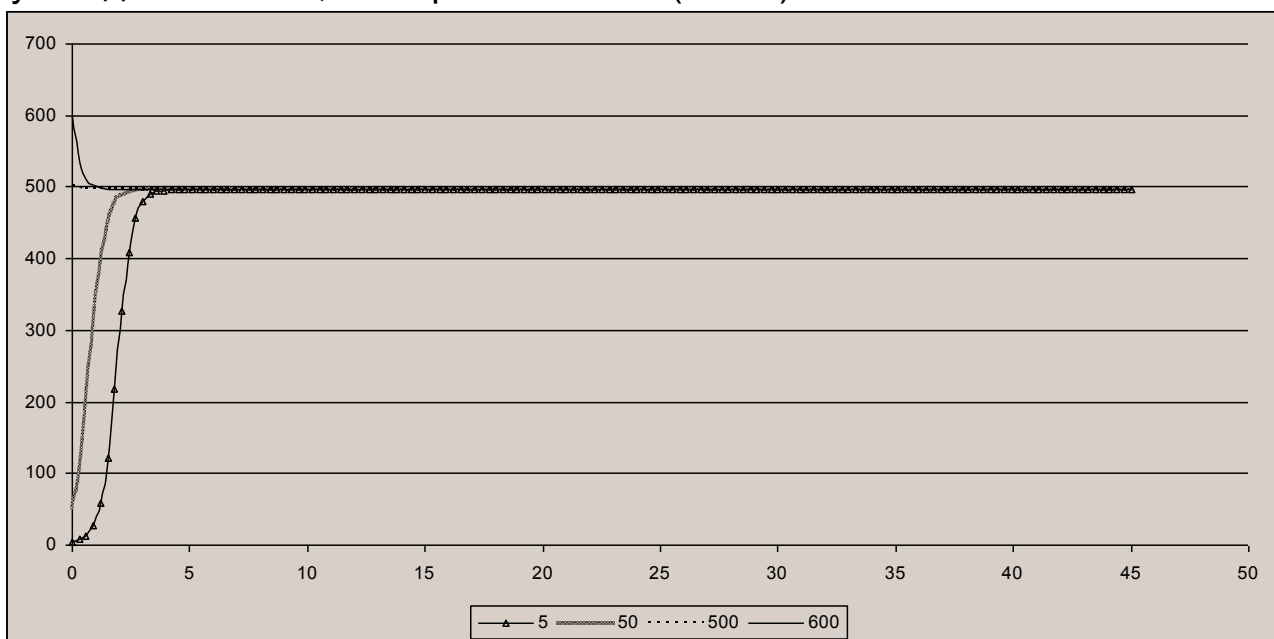


Рисунок 7. - Неперервна модель Ферхюльста із зовнішнім впливом при початковій популяції 5, 50, 500 та 600. Випадок $F_{\max} \geq \frac{4K}{r}$, $F_{\max} = 500$, $r=3,045$, $K=10$.

Висновки. У даній роботі ми отримали розв'язок диференціального рівняння для неперервної моделі Ферхюльста з зовнішнім впливом у явному вигляді. У цій моделі (Рис 1) та (Рис 7) видна наявність асимптот, до яких прямує чисельність популяції, але на графіках ці функції не перетинають жодну з них навіть при великих значеннях t , сам обсяг популяції у кожен момент часу обчислюється з вихідних параметрів і не залежить від значення у попередній момент.

З одного боку це зменшує похибку обчислення, але примітивізує саму модель, принаймні не допускає впливу випадкових збурень на зміну тренду та не дозволяє обсягу популяції перетнути жодну з асимптот. Реальний процес динаміки популяції цілком може перетинати ці асимптоти, більше того, можуть мінятись самі асимптоти з часом. Дискретна ж модель побудована таким чином, що на кожному кроці обсяг популяції залежить від її обсягу на минулому кроці. З

одного боку це породжує накопичення похибок на кожному кроці, навіть на заокругленні результату протягом багатьох кроків, сама модель є неточною, так як виміри здійснюються у дискретні моменти часу і ми не можемо контролювати поведінку функції між цими моментами.

Ще однією проблемою є поведінка функцій для дискретної та неперервної моделей при екстремальних значеннях параметрів r та K . Як видно з Рис 4 та Рис 5 при деяких параметрах біотичного потенціалу та K поведінка дискретної моделі сильно відрізняється від неперервної і має коливальний характер, перетинаючи асимптоти. Крім того, наявність періодичної функції тангенса у розв'язку рівняння для неперервної моделі дає обмеження на аргумент, а саме

$$\frac{r \sqrt{\frac{F_{\max}}{r} K - \frac{F_{\max}^2}{4}}}{F_{\max}} t \in \left(\pi n - \frac{\pi}{2}; \pi n + \frac{\pi}{2} \right), n \in Z.$$

Ці всі обмеження потребують інтерпретації з боку реальних процесів, а також детального аналізу відмінностей цих обмежень для дискретного та неперервного випадків.

Список використаних джерел

1. Сидоров М.В.-С. Основи математичного моделювання для соціологів: демографічні базові моделі зростання популяції без зовнішнього впливу та конкуренції. //Сидоров М.В.-С./ [Текст].– К.:Логос, Актуальні проблеми соціології, психології, педагогіки: Збірник наукових праць. вип.1(22), 2014, ст.74-81
2. Сидоров М.В.-С. Основи математичного моделювання для соціологів: використання логістичної моделі Ферхюльста для прогнозу розвитку популяції без зовнішнього впливу. //Сидоров М.В.-С./ [Текст].– К.:Логос, Актуальні проблеми соціології, психології, педагогіки: Збірник наукових праць. вип.1(26), 2015, ст.

Отримано 10.05.2015 р.