

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭКОЛОГИЧЕСКИМ СОСТОЯНИЕМ ТЕХНОГЕННО НАГРУЖАЕМЫХ ТЕРРИТОРИЙ

Постановка проблемы

К территориям, находящимся под планируемым техногенным воздействием, можно отнести практически всю территорию Украины за исключением заповедных и рекреационных зон. Из всех техногенно нагружаемых территорий выделим те, на которых концентрации загрязняющей окружающей среды, связанные с технологической цепочкой производственного процесса, превышают ГДК настолько, что в течении заданного интервала времени они не восстанавливаются до допустимых пределов только посредством естественных природных процессов. Эти территории требуют специальных активных внешних восстановительных воздействий.

Анализ исследований по проблеме

Фундаментальные математические исследования по проблеме управления экологическим состоянием техногенно нагружаемых территорий изложены в [1,2,3]. Они базируются на зонировании территорий, построении математических моделей эволюции вектора экологического состояния зон. Эти модели, за счет расширения вектора состояния и управления, объединяются в форме разрывной системы (или системы с импульсным воздействием) в общую математическую модель эволюции вектора экологического состояния всей территории.

Принцип расширения вектора состояния и управления вследствие их доопределения на весь интервал функционирования системы позволяет ставить задачу оптимизации экологической системы как задачу оптимизации разрывной системы или системы, находящейся под импульсным воздействием [1,2,3]. С теоретической точки зрения это удобно, так как позволяет применить известные приемы поиска оптимального управления разрывными системами. Однако, учитывая, что вектор состояния экологической системы насчитывает около тысячи компонент (если рассматривать воздух, грунт, поверхностные и грунтовые воды) и тот факт, что каждая техногенно нагружаемая территория содержит как минимум от нескольких единиц до нескольких десятков технологических зон, то размер доопределенного вектора состояния возрастает в число раз равное количеству зон и может составлять до нескольких десятков тысяч компонент. С практической (вычислительной) точки зрения это не удобно. Существенное абстрагирование, дающее полезные теоретические ре-

© А.И. Лысенко, С.Н. Чумаченко, И.В. Чеканова, А.Н. Турейчук, 2002

зультаты оборачиваются трудно интерпретируемыми для практического применения выводами и предложениями. Возникает необходимость такого представления теоретических результатов, чтобы:

- эти результаты легко интерпретировались для каждой зоны и всей техногенно нагружаемой территории в целом;
- обобщенная модель техногенно нагружаемой территории легко поддавалась декомпозиции
- вычислительные процедуры были малочувствительными к неточности задания параметров процессов;
- параметры моделей возможно было идентифицировать с помощью асимптотически устойчивых оценок.

Удовлетворить указанным условиям позволяет метод ветвящихся траекторий.

Цель статьи

Статья посвящена изложению приемов применения метода ветвящихся траекторий для математической постановки задач оптимизации экологического состояния территорий, находящихся под плановым техногенным воздействием.

Метод ветвящихся траекторий является прикладным методом решения такого класса задач и ориентирован на декомпозицию задачи управления разрывной системой, на управление каждой отдельной подсистемой по участкам траектории между узлами ветвления с индивидуальным учетом взаимного влияния подсистем, если такое существует.

При этом под экологической (динамической) подсистемой понимается математическая модель эволюции во времени вектора экологического состояния каждой отдельно взятой зоны, рассматриваемой техногенно нагружаемой территории.

Базовым ключевым элементом метода ветвящихся территорий, является предположение о том, что в заданном интервале времени существования сложной динамической системы (СДС) траектории отдельных подсистем в упорядоченные по возрастанию моменты времени ответвляются от траекторий одних подсистем или присоединяются к траекториям других подсистем. Метод ветвящихся траекторий в прикладном аспекте развивает теорию разрывных систем.

Основное содержание статьи

Выполним зонирование техногенно нагружаемых территорий (см. рис. 1).

В экологических ядрах зон (рис. 1) могут быть расположены как реальные ДПИ так и виртуальные ДПИ, выходные сигналы которых получены средствами дистанционного зондирования или расчетным способом.

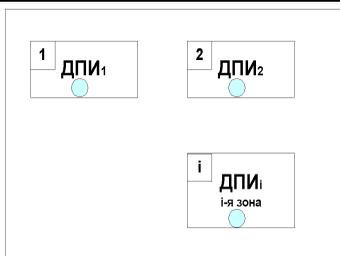


Рис. 1 – Пример зонирования техногенно нагружаемой территории: $ДПИ_1, \dots, ДПИ_i$ — датчики первичной информации, каждый из которых расположен в характерной точке выделенных зон (в дальнейшем назовем эту точку экологическим ядром зоны, поскольку она содержит ключевую информацию об экологических процессах в зоне).

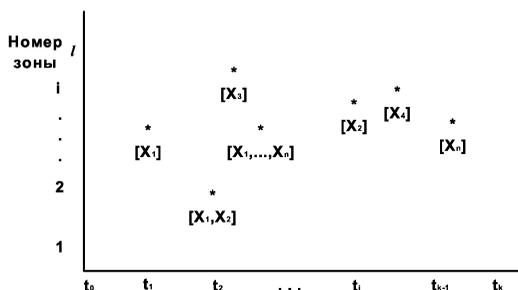


Рис. 2 – График планируемых техногенных нагрузок: t_0, t_k – время начала и конца технологического процесса; $t_j - (j = 1, 2, \dots, k - 1)$ моменты времени технологических воздействий; * - планируемое технологическое воздействие, связанное с производственным процессом, приводящее к изменению вектора экологического состояния в экологическом ядре технологической зоны, состоящем в том, что концентрация загрязнений по отдельным или всем компонентам вектора экологического состояния превосходят ГДК; в квадратных скобках указываются конкретные составляющие вектора экологического состояния зоны по которым ожидается нарушение ГДК.

Предполагается что система территориального экологического мониторинга представляет собой совокупность зональных подсистем, распределенных специальным образом по зонам и предоставляющих информацию об экологическом состоянии в экологических ядрах зон (некоторых характерных точках зон территории). Экологические ядра зон удовлетворяют следующим условиям:

- пространственной принадлежности зоне (позволяет установить одно-

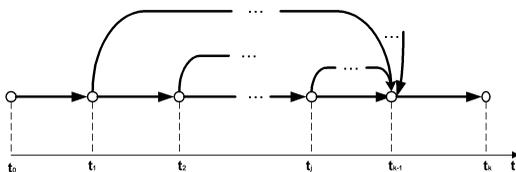


Рис. 3 – Схема ветвящейся траектории экологического состояния техногенно нагружаемой территории, построенная в соответствии с графиком экологической нагрузки, приведенным на рис. 2.

значное соответствие между первичной экологической информацией и зоной, для которой она получена);

- экологической информативности (позволяет по данным системы ДПИ получить информацию об экологическом состоянии в ограниченном пространстве вблизи пространственной точки, выбранной ядром зоны);
- прогнозируемости (позволяет выполнить с достаточной степенью точности по информации об экологическом состоянии экологических ядер зон интерполяционные или экстраполяционные оценки экологического состояния для всех точек заданной территории).

Таким образом, **экологическое ядро зоны** – это ограниченное пространство внутри зоны, обладающее свойством несения ключевой информации об экологическом состоянии зоны, достаточной для расчета, с учетом информации о состоянии экологических ядер других зон, оценки экологического состояния в заданных точках рассматриваемой территории.

В дальнейшем, говоря об экологическом состоянии территории или зоны, будем понимать под этим экологическое состояние в ядре территории или зоны.

Предположим, что экологическое состояние территории или зоны описывается n -мерным вектором $X \in R^n$, $X \in \Omega_0$ в состав которого входят подлежащие контролю концентрации составляющих векторов загрязнения воздушной среды, грунта, поверхностных и грунтовых вод.

Управление экологическим состоянием осуществляется с помощью m -мерного вектора $U \in R^m$, $U \in \Omega_n$ в состав которого включаются все активно воздействующие на окружающую природную среду факторы физические, химические и биологические.

По известному технологическому циклу, который реализуется на заданной территории, кроме ее зонирования составляется график планируемых технологических нагрузок (см. рис. 2), позволяющий сформировать схему ветвящейся траектории (см. рис. 3) и выбрать математические модели эволюции вектора экологического состояния зон и сопоставить их ветвям траектории.

В [5] приведен пример ветвящейся траектории движения составной динамической системы (СДС), содержащей моменты времени начала и окончания движения подсистем (блоков), изменения структуры правых частей дифференциальных уравнений, описывающих их движение, моменты времени группировки и разделения подсистем (блоков), а также моменты времени, когда подсистемы (блоки) начинают или оканчивают взаимодействовать между собой. Такая классификация моментов времени пригодна для детерминированных СДС и стохастических СДС с полной информацией о векторе состояния. В задаче оптимизации СДС с зашумленными измерениями вектора состояния, которая более полно и точно математически описывает динамику вектора состояния экологической системы [4,8,9], необходимо дополнительно к перечисленным моментам времени рассматривать моменты времени информационных преобразований, которые связаны с изменениями в информационном обеспечении процесса управления СДС.

Используя, введенные в [5], понятия подсистемы, блока, ветви, а также включив в состав множества моментов времени структурных преобразований моменты времени информационных преобразований, распространим на стохастические СДС с неполной информацией о векторе состояния способ представления произвольно разветвляющейся траектории в виде траектории стохастической разрывной системы с изменяющимся в точках разрыва размером вектора состояния, управления, шума, возбуждающего систему, вектора наблюдения, шума, возбуждающего вектор наблюдения и оптимизируемыми в среднем точками разрыва.

В интервале времени между структурными преобразованиями уравнение модели подсистемы (блока)

$$\begin{aligned} dx(t) = f(x(t), u(t), z(t); x^*(t), u^*(t), z^*(t); t)dt + \\ \sigma(x(t), u(t), z(t); x^*(t), u^*(t), z^*(t); t)dW(t), t \in [t_0, t_f] \end{aligned} \quad (1)$$

и уравнение модели измерений

$$\begin{aligned} dy(t) = z(t)dt = \varphi(x(t), u(t), z(t); x^*(t), u^*(t), z^*(t); t)dt + \\ \psi(u(t), z(t); u^*(t), z^*(t); t)dV(t), \\ t \in [t_0, t_f] \end{aligned} \quad (2)$$

представляют собой стохастические дифференциальные уравнения Ито [4,8,9].

Здесь $x(t) \in E^n, u(t) \in \Omega \subset E^m, z(t) \in E^r, y(t) \in E^r, x^*(t), u^*(t), z^*(t)$ — вектора, составленные соответственно из фазовых координат, управлений и измерений других подсистем (блоков) стохастической СДС, оказывающих воздействие на систему (1.), (2.); f — векторная функция размера $nx1$; σ — матричная функция размера nxL ; $W(t)$ — L -мерный сепарабельный винеровский процесс; ϕ — векторная функция размера $rx1$; ψ — матричная функция размера rxv ; $V(t)$ — v -мерный сепарабельный винеровский процесс; t_0, t_f — моменты времени начала и конца движения подсистемы (блока) по рассматриваемой ветви траектории. В интервале времени $[t_0, t_f]$ на систему (1.), (2.) накладываются непрерывно действующие ограничения

$$\int_{\Xi_z} \int_{\Xi_{z^*}} \int_{\Xi_x} \int_{\Xi_{x^*}} q_i(x(t), u(t), z(t); x^*(t), u^*(t), z^*(t); t) \times P(x, x^*, z, z^*, t) dx dx^* dz dz^* \quad (3)$$

$$\begin{cases} \leq 0, & i = \overline{1, k_q}; \\ = 0, & i = k_q + 1, N_q; \end{cases}$$

$$t_0 \leq t \leq t_f,$$

где $\Xi_z, \Xi_{z^*}, \Xi_x, \Xi_{x^*}$ – бесконечные области в евклидовом пространстве, имеющем размер, совпадающий с размером соответствующих векторов z, z^*, x, x^* , и ограничения в граничных точках

$$\int_{\Xi_z} \int_{\Xi_{z^*}} \int_{\Xi_x} \int_{\Xi_{x^*}} g_i(x(\tau), u(\tau), z(\tau); x^*(\tau), u^*(\tau), z^*(\tau); \tau) \times P(x, x^*, z, z^*, \tau) dx dx^* dz dz^* \quad (4)$$

$$\begin{cases} \leq 0, & i = \overline{1, k_g}; \\ = 0, & i = k_g + 1, N_g; \end{cases}$$

$$\tau = [t_0, t_f].$$

Эффективность управления стохастической СДС оценивается минимумом функционала

$$I_p = M[\Pi + \rho_\Sigma] \rightarrow \min, \quad (5)$$

где Π – терминальная составляющая критерия, зависящая от фазовых координат подсистем (блоков) и результатов измерений в моменты времени структурных преобразований СДС и самих моментов времени; ρ_Σ – интегральная составляющая критерия, состоящая из суммы частных интегральных составляющих типа

$$\rho = \int_{t_0}^{t_f} h(x(t), u(t), z(t); x^*(t), u^*(t), z^*(t); t) dt, \quad (6)$$

$M[\dots]$ – символ операции, требующий вычисления математического ожидания от выражения стоящего в скобках, посредством усреднения по множеству всех возможных реализаций случайного процесса движения СДС и измерений или вычисления кратного интеграла в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ от выражения, стоящего в скобках, и умноженного на совместную плотность вероятности вектора фазового состояния и вектора измерения в соответствующий момент времени.

Так же, как и в [5,6] или [7], решение задачи (1)-(6) выполняется в три этапа: на первом осуществляется переход от стохастической СДС к разрывной стохастической системе с изменяющимися в точке разрыва размерами векторов состояния, управления, шума, возбуждающего систему, измерения, шума измерительной системы; затем, на втором этапе выполняется оптимизация разрывной стохастической системы при неполной информации о векторе состояния с оптимизируемыми точками разрывов; и, наконец, на третьем этапе происходит возврат к терминам исходной постановки задачи.

Сохранив для стохастической СДС с неполной информацией о векторе состояния методику преобразования СДС к разрывной динамической системе, изложенную в [5] учтем, что в стохастической задаче с неполной информацией о векторе состояния (1)-(6) в точках разрыва происходит изменение размера не только векторов состояния и управления, но и векторов измерения, шума, возбуждающего систему, и шума измерения. В результате приходим к следующей постановке задачи оптимизации разрывной стохастической системы при неполной информации о векторе состояния:

$$J(U, T) = \sum_{i=1}^N \left\{ M [S_i (iX, iZ, t_{i-1})] + M [S_i (iX, iZ, t_i)] + \int_{t_{i-1}}^{t_i} M [\Phi_i (iX, iU, iZ; t)] dt \right\} \rightarrow \inf_{U, T} \quad (7)$$

$$J_j^G = \sum_{i=1}^N \{ M [iS_j (iX, iZ, t_{i-1})] + M [iG_j (iX, iZ, t_i)] \} \begin{cases} \leq 0, & j = \overline{1, K_G}; \\ = 0, & j = \overline{K_G + 1, N_G}; \end{cases} \quad (8)$$

$$iJ_j^{\psi x} = i\Psi_{xj} (iX(t_i), iZ(t_i), t_i) - {}_{i+1}X_j(t_i) = 0 \quad (j = \overline{1, n_{\Sigma i+1}}; i = \overline{1, N-1}) \quad (9)$$

$$iJ_j^{\psi z} = i\Psi_{zj} (iX(t_i), iZ(t_i), t_i) - {}_{i+1}Z_j(t_i) = 0 \quad (j = \overline{1, n_{\Sigma i+1}}; i = \overline{1, N-1}); \quad (10)$$

$$iJ_j^Q = M [iQ_j (iX(t), iZ(t), iU(t), t)] \begin{cases} \leq 0, & j = \overline{1, K_{Q_i}}; \\ = 0, & j = \overline{K_{Q_i} + 1, N_{Q_i}}; \end{cases} \quad (11)$$

$$d_i X(t) = iF (iX(t), iZ(t), iU(t), t) dt + iD (iX(t), iZ(t), iU(t), t) d_i W(t), \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad (12)$$

$$\begin{aligned} d_i Y(t) &= iZ(t)dt = iA (iX(t), iZ(t), iU(t), t) dt + iB (iZ(t), iU(t), t) d_i V(t), \\ t &\in [t_{i-1}, t_i], iX(t) \in E^{n_{\Sigma i}}, \\ iU(t) &\in \Omega \subset E^{m_{\Sigma i}}, iZ(t) \in E^{r_{\Sigma i}}, iW(t) \in E^{L_{\Sigma i}}, iV(t) \in E^{\nu_{\Sigma i}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь t – время; $T = (t_0, \dots, t_N)$; t_0, \dots, t_N – моменты времени разрыва, удовлетворяющие неравенствам $t_0 < t_1 < \dots < t_N$; $iX(t)$ – расширенный вектор фазового состояния разрывной стохастической системы; iU – расширенный вектор управляющих воздействий, каждая составляющая которого принадлежит классу кусочно-непрерывных функций; $iZ(t)$ – расширенный вектор измерений; $iW(t)$ – расширенный вектор стандартного винеровского процесса $(iW(t_{i-1}) = 0, M [iW(t)] = 0, M [iW(t) iW^T(t)] = I_{L_i} t, t \in [t_{i-1}, t_i])$

I_{L_i} – единичная матрица, $i = \overline{1, N}$), некоррелированный с $iV(t)$, действующий на систему (12); $iV(t)$ – расширенный вектор стандартного винеровского процесса

$$({}_i V(t_{i-1}) = 0, M [{}_i V(t)] = 0, M [{}_i V(t) {}_i V^T(t)] = I_{\nu_i} t, t \in [t_{i-1}, t_i])$$

I_{ν_i} – единичная матрица, $i = \overline{1, N}$,

воздей-

ствующий на наблюдаемый процесс (13);

$$\begin{aligned} {}_i F &: E^{n_{\Sigma i}} \times E^{r_{\Sigma i}} \times \Omega_i \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow E^{n_{\Sigma i}}; \\ {}_i D &: E^{n_{\Sigma i}} \times E^{r_{\Sigma i}} \times \Omega_i \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow E^{n_{\Sigma i} L_{\Sigma i}}; \\ {}_i A &: E^{n_{\Sigma i}} \times E^{r_{\Sigma i}} \times \Omega_i \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow E^{r_{\Sigma i}}; \\ {}_i B &: E^{r_{\Sigma i}} \times \Omega_i \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow E^{r_{\Sigma i} \nu_{\Sigma i}}; \end{aligned}$$

индекс i слева внизу означает принадлежность к i -му участку разрывной траектории.

Задача состоит в том, чтобы в классе всех допустимых управлений (U, T) найти такие, при которых критерий (7) принимает наименьшее значение.

Функции ${}_i U(t), t \in [t_{i-1}, t_i] (i = \overline{1, N})$ будем называть допустимым управлением, если компоненты вектора ${}_i U(t)$ в момент времени t не зависят от будущих значений ${}_i Z(t)$ и задаются функционалами

$${}_i U(t) = \alpha_i(t; {}_1 Z_{t_0}^t, {}_2 Z_{t_1}^t, {}_3 Z_{t_2}^t, \dots, {}_i Z_{t_{i-1}}^t), t \in [t_{i-1}, t_i], \quad (14)$$

где запись Z_a^b обозначает совокупность значений наблюдаемого процесса в интервале

$$[a, b], \text{ т.е. } Z_a^b = \{Z(t); t \in [a, b]\} \quad (15)$$

Компоненты вектора T удовлетворяют условиям

$$t_i \in \theta_i (i = \overline{0, N}), \theta_{i-1} \cap \theta_i = \Phi, t_{i-1} < t_i (i = \overline{1, N}).$$

Кроме того, допустимое управление обеспечивает выполнение ограничений (8)-(13). Отметим, что случайный процесс ${}_i X(t) (i = \overline{0, N})$, являющийся решением стохастического уравнения (12), не будет марковским, поскольку входящие в правую часть (12) управляющие функции ${}_i U(t)$ в данном случае имеют вид функционалов (13), зависящих от предистории. Случайный процесс ${}_i Z(t) (i = \overline{1, N})$ не будет марковским по двум причинам: первая состоит в том, что в правую часть (13) также входит функция ${}_i U(t)$, зависящая от предыстории, а вторая - в том, что сумма даже марковских процессов не является марковским процессом [10], не говоря уже о том, что в (12) суммируются немарковские процессы. Поэтому в данном случае решить задачу синтеза оптимального уравнения, используя методы и подходы второго раздела, т.е. принцип оптимальности в среднем, метод стохастического динамического программирования, стохастический метод Кротова В.Ф., можно только в том случае, если удастся подобрать для критерия (7) и ограничений (8)-(13), такие новые фазовые переменные ${}_i X^*(t) (i = \overline{1, N})$ которые, с одной стороны были бы достаточны для вычисления минимума критерия и проверки соблюдения ограничений (8)-(13), а с другой стороны, случайный процесс ${}_i X^*(t), t_{i-1} \leq t \leq t_i (i = \overline{1, N})$ был бы марковским.

Достаточные координаты

Для задачи (7)-(13) такие достаточные координаты существуют и ${}_i X^*(t) \in [t_{i-1}, t_i]$ ($i = \overline{1, N}$) представляет собой совокупность мгновенных значений наблюдаемого процесса ${}_i Z(t)$ и апостериорной плотности вероятности $P_{it}({}_i X) = P_i({}_i X(t) = {}_i X \mid {}_1 Z_{t_0}^{t_1}, \dots, {}_i Z_{t_{i-1}}^t)$ наблюдаемого вектора ${}_i X(t)$ ($i = \overline{1, N}$) [10]

$${}_i X^*(t) = ({}_i Z(t), P_{it}({}_i X)) (i = \overline{1, N}) \quad (16)$$

С учетом новых фазовых переменных (16) задача (7)-(13) может быть переформулирована к виду:

$$\begin{aligned} J(u, t) = & \sum_{i=1}^N \left\{ M : {}_1 Z_{t_0}^{t_1}, \dots, {}_i Z_{t_{i-1}}, M : {}_i X_{t_{i-1}} \mid {}_1 Z_{t_0}^{t_1}, \dots, \right. \\ & {}_i Z_{t_{i-1}} [J_i({}_i X, {}_i Z, t_{i-1})] + M : {}_1 Z_{t_0}^{t_1}, \dots, \\ & {}_i Z_{t_{i-1}}^t M : {}_i X_{t_i} \left| \begin{array}{l} {}_1 Z_{t_0}^{t_1}, \dots, {}_i Z_{t_{i-1}}^t [S_i({}_i X, {}_i Z, t_i)] + \int_{t_{i-1}}^{t_i} M : {}_1 Z_{t_0}^{t_1}, \dots, \\ {}_i Z_{t_{i-1}}^t M : {}_i X_t \mid {}_1 Z_{t_0}^{t_1}, \dots, {}_i Z_{t_{i-1}}^t [\Phi_i({}_i X, {}_i U, {}_i Z, t)] dt \end{array} \right. \rightarrow \inf_{U, T} ; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} J_j^G = & \sum_{i=1}^N \left\{ M : {}_1 Z_{t_0}^{t_1}, \dots, {}_i Z_{t_{i-1}}, M : {}_i X_{t_{i-1}} \mid {}_1 Z_{t_0}^{t_1}, \dots, {}_i Z_{t_{i-1}} [J_i({}_i X, {}_i Z, t_{i-1})] + M : {}_1 Z_{t_0}^{t_1}, \dots, \right. \\ & {}_i Z_{t_{i-1}}^t M : {}_i X_{t_i} \mid {}_1 Z_{t_0}^{t_1}, \dots, {}_i Z_{t_{i-1}}^t [{}_i G_i({}_i X, {}_i Z, t_i)] \left. \right\} \begin{cases} \leq 0, j = \overline{1, K_G}; \\ = 0, j = \overline{K_G + 1, N_G}; \end{cases} \quad (18) \end{aligned}$$

$${}_i J_j^{\Psi^x} = {}_i \Psi_{xi}({}_i X(t_i), {}_i Z(t_i), t_i) - {}_{i+1} X_j(t_i) = 0 (j = \overline{1, n_{\sum_{i+1}}}, i = \overline{1, N-1}) \quad (19)$$

$${}_i J_j^{\Psi^z} = {}_i \Psi_{zj}({}_i X(t_i), {}_i Z(t_i), t_i) - {}_{i+1} Z_j(t_i) = 0 (j = \overline{1, r_{\sum_{i+1}}}, i = \overline{1, N-1}) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} {}_i J_j^Q = & M : {}_1 Z_{t_0}^{t_1}, \dots, {}_i Z_{t_{i-1}}^t M : {}_i X_t \mid {}_1 Z_{t_0}^{t_1}, \dots, {}_i Z_{t_{i-1}}^t [{}_i Q_j({}_i X(t), {}_i Z(t), \\ & {}_i U(t), t)] \left\{ \begin{array}{l} \leq 0, j = \overline{1, K_{Q_i}}; \\ = 0, j = \overline{K_{Q_i} + 1, N_{Q_i}}; t \in [t_{i-1}, t_i] (i = \overline{1, N}); \end{array} \right. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} dP_{it}({}_i X) = & -\frac{\partial^T}{\partial {}_i X} [{}_i F({}_i X, {}_i Z, {}_i U(t), t) P_{it}({}_i X)] dt + \\ & + \frac{1}{2} tr \left\{ \frac{\partial}{\partial {}_i X} \frac{\partial^T}{\partial {}_i X} [{}_i D_i D^T({}_i X, {}_i Z, {}_i U(t), t) P_{it}({}_i X)] \right\} dt + \\ & + \left\{ [{}_i A^T({}_i X, {}_i Z, {}_i U(t), t) - {}_i \overline{A}^T] P_{it}({}_i X) \right\} [{}_i B_i B^T({}_i Z, {}_i U(t), t)]^{-1} \times \\ & \times (d{}_i Y - {}_i \overline{A} dt), t \in [t_{i-1}, t_i] (i = \overline{1, N}) \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь символ $M : X_i \mid Z_{t_0}^t [\dots]$ обозначает операцию вычисления математического ожидания от выражения, стоящего в квадратных скобках посредством усреднения по множеству значений векторного случайного процесса X в момент времени t при условии, что реализация наблюдаемого процесса $Z_{t_0}^t$ известна и фиксирована,

$${}_i D_i D^T({}_i X, {}_i Z, {}_i U(t), t) = {}_i D({}_i X, {}_i Z, {}_i U(t), t) {}_i D^T({}_i X, {}_i Z, {}_i U(t), t); \quad (23)$$

$${}_i B_i B^T({}_i Z, {}_i U(t), t) = {}_i B({}_i Z, {}_i U(t), t) {}_i B^T({}_i Z, {}_i U(t), t); \quad (24)$$

$${}_i \bar{A} = M : {}_i X_t \mid {}_1 Z_{t_0}^{t_1}, \dots, {}_i Z_{t_{i-1}}^{t_i} [{}_i A({}_i X, {}_i Z, {}_i U(t), t)] = \int_{{}_i X} {}_i A({}_i X, {}_i Z, {}_i U(t), t) P_{it}({}_i X) d{}_i X; \quad (25)$$

${}_i U(t)$ — функционал (14) от наблюдаемого случайного процесса ${}_1 Z_{t_0}^{t_1}, \dots, {}_i Z_{t_{i-1}}^{t_i}$, который при любом фиксированном α_i и известном ${}_1 Z_{t_0}^{t_1}, \dots, {}_i Z_{t_{i-1}}^{t_i}$ является известным вектором, от которого параметрически зависят ${}_i F, {}_i D, {}_i A, {}_i B$ в (12), (13), что позволяет считать процесс ${}_i X^*(t)$ (16) марковским; $d{}_i Y - {}_i \bar{A} dt = ({}_i Z - {}_i \bar{A}) dt$ ($i = \overline{1, N}$) дифференциал обновляющего процесса с интенсивностью $M [{}_i B_i B^T({}_i Z, {}_i U, t)]$ [10].

Уравнение (22) представляет собой нелинейное стохастическое интегро-дифференциальное уравнение относительно апостериорной плотности $P_{it}({}_i X)$ ($i = \overline{1, N}$). В начальный момент t_0 $P_{1t}({}_1 X)$ представляет собой условную плотность величины ${}_1 X_{t_0}$ относительно ${}_1 Z_{t_0}$. Это служит начальным условием для (22) при $i = 1$. Вычисления начальных условий для уравнения (22) при $i = \overline{2, N}$ производится по результату решения (22) на предыдущем интервале с использованием соотношений (19), (20) [10].

Вывод

Уравнение (22) представляет собой стохастическое уравнение Ито, так как для его вывода использовалась формула для стохастического дифференциала Ито [10]. Таким образом, для решения задачи (17)-(22), где ${}_i X^*(t) = ({}_i Z(t), P_{it}({}_i X))$ ($i = \overline{1, N}$) является марковским процессом, применим любой метод стохастической оптимизации управления СДС при полной информации о векторе состояния [7,11]. Однако, следует отметить, что непосредственное использование уравнения (22) в качестве уравнения состояния от СДС требует вычисления функциональной производной гамильтониана, функции Беллмана или функции Кротова в зависимости от того, какой из методов [7,11] будет применяться, что обычно затрудняет фактическое решение задачи. Кроме того, для формирования управляющего воздействия ${}_i U(t) = {}_i U({}_i Z(t), P_{it}({}_i X), t)$ ($i = \overline{1, N}$) необходимо решить уравнения (22) для апостериорной плотности вектора состояния ${}_i X$ ($i = \overline{1, N}$) после получения результатов наблюдений (${}_1 Z_{t_0}^{t_1}, \dots, {}_i Z_{t_{i-1}}^{t_i}$). Но методов точного решения уравнения (22) в общем случае пока не существует. Численное решение этих уравнений в задачах практики тоже невозможно, так как для этого требуется много времени, а решать их необходимо каждый раз после получения результатов наблюдений. Поэтому практически удобнее вместо апостериорной плотности $P_{it}({}_i X)$ ($i = \overline{1, N}$) рассматривать некоторую эквивалентную ей систему параметров. Переходя к эквивалентной системе параметров, заменяющей

уравнение (22), следует помнить, что к этой же системе параметров необходимо привести критерий (17), граничные условия (18), ограничения (21) и учесть соотношения между значениями эквивалентных параметров в точках разрыва, которые вытекают из (19) и (20). Изложению различных подходов к формированию эквивалентных систем параметров будут посвящены последующие исследования.

Литература

1. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. - Новосибирск: Наука, 1986. - 226 с.
2. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. -К.: Вища школа, 1987. - 288 с.
3. Згуровский М.З , Новиков А.Н. Анализ и управление односторонними физическими процессами. - К.: Наукова думка, 1996. - 328 с.
4. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології – К.: Вид. дом “КІ Академія”, 2002. –203 с.
5. Лысенко А.И. Оптимальное управление детерминированными составными динамическими системами. -К...: НИЦ ГШ , 1995. - 52 с.
6. Лысенко А.И. Оптимальные квазиветвящиеся траектории динамических систем. - К...: НИЦ ГШ , 1995. - 36 с.
7. Лысенко А.И. Стохастический принцип расширения для составных динамических систем. -К...: НИЦ ГШ , 1995. -36 с.
8. Системний аналіз і методи математичного моделювання в екології: Збірник наукових праць / НАН України. Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова. - К.,1990. - 89 с.
9. Технічні і системні засоби екологічного моніторингу: Збірник наукових праць / НАН України. Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова. - К., 1998. - 83 с.
10. Пугачев В.С. Сеницын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. - М.. Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1965. -560 с.
11. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. Оптимальное управление системами. - М.: Радио и связь, 1982. - 392 с.

Получено: 26.07.2002