

## **ЦЕЛЕОРИЕНТИРОВАННАЯ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АПРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ**

Опыт проведения и обработки результатов лабораторных исследований электротехнических объектов (ЭТО) основывался, как правило, на ручных методах обработки усредненных измерительными приборами измерений наблюдаемой части переменных, изменяющихся в ограниченных пределах. Число одинаковых опытов составляло 1-3, что недостаточно для применения методов математической статистики [4,5]. Бездоказательно применялись гипотезы автономности, стационарности, линейности функциональных зависимостей между переменными состояниями ЭТО. Усредненность по времени и отсутствие учета динамики существенно снижали информативность результатов эксперимента. Широкое внедрение средств вычислительной техники, ее высокая точность, большие функциональные возможности создали предпосылки для использования ЭВМ в экспериментальных исследованиях ЭТО. Поскольку основной целью проведения эксперимента является определение математической модели исследуемого объекта, то учитывая специфику электротехнических объектов – их нелинейность, проблемой является разработка такого метода определения параметров математической модели, который позволил бы по ограниченному числу данных максимально точно определить значения этих параметров.

Важную роль в получении информации об исследуемых объектах играет оптимальный выбор математической модели, планирование, проведение экспериментов и обработка полученных данных. Ниже рассмотрен один из применяемых авторами подходов при обработке экспериментальных данных, который может рассматриваться как характерный пример применения принципа целеориентации [1]. Модель объекта можно считать целеориентированной, если при ее построении учитываются те свойства объекта, которые способствуют успешному решению поставленной задачи. Целеориентированная модель называется оптимальной, если с ее помощью основная задача решается лучше, чем с любой другой моделью, взятой из множества моделей, допустимых по условиям эксперимента.

Цель обработки данных экспериментальных исследований есть получение наиболее компактной модели объекта, обнаружение и устранение сбоев в измерениях и существенное сжатие полученной информации. Результат должен представлять собой конечное число усредненных величин, связанных между собой некоторой заранее неизвестной аналитиче-

© Л.Ю. Спинул , 2004

ской зависимостью. Один из путей достижения этой цели – применение адаптивной кусочно-полиномиальной аппроксимации.

Пусть в результате эксперимента получены данные о некоторой зависимости  $f(x)$ , заданной дискретным набором пар значений  $\{x_j, y_j\}$ ,  $j = \overline{1, N}$ :

$$y_j = f(x_j) + e_j, \tag{1}$$

где  $e_j, \dots, e_n$  – реализация случайной некоррелированной стационарной последовательности  $E(j) = [E_1, \dots, E_N]$ ,  $M\{E(j)\} = 0$ ,  $D\{E(j)\} = \sigma_e^2$ . На ограниченных интервалах изменения аргумента  $f(x)$  можно представить полиномиальной моделью. **Адаптивная кусочно-полиномиальная аппроксимация** содержит два этапа.

**Первый этап** – построение локально-оптимальной полиномиальной модели на первом интервале аппроксимации. Из заданной точности  $q$  осуществляется выбор длины первого участка аппроксимации и определение коэффициентов модели. Исходным является значение минимального порядка  $K_{\min}$  ( $K_{\min} = 1 \dots 3$ ) полинома и начальная длина участка аппроксимации

$$l_0 = K_{\min} + g, \quad \text{где } g = 2 \dots 5. \tag{2}$$

Вычислим МНК-оценки  $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_k$  полинома для первых пар экспериментальных данных. Порядок полинома  $K = K_{\min}$ . Если для полученных оценок  $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_k$

$$\frac{1}{l - k - 1} \sum_{j=1}^l \left( y_j - \sum_{i=1}^k \tilde{\alpha}_i x_j^i \right)^2 \leq q, \tag{3}$$

то примем  $K_{\min}$  в качестве порядка локально оптимальной модели для первого участка и увеличим на 1 длину этого участка. Вновь найдем МНК-оценки полиномиальной модели на удлиненном участке и проверим для них выполнение неравенства (3). И так до тех пор, пока после очередного  $(g + 1)$ -го удлинения участка условие (3) окажется не выполненным. В качестве локально оптимальной модели принимается модель порядка  $K_1 = K_{\min}$  с коэффициентами, найденными при предыдущем,  $g$ -ом удлинении участка, а длина первого участка, принимается равной  $l_1 = l_0 + g$ . Если условие (3) не удовлетворяется при  $l_1 = l_0$ , то исходный порядок модели  $K_{\min}$  увеличивается на 1 и по  $l_0$  парам значений исходных данных, рассчитываются МНК-оценки  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{K_{\min}+1}$ . Увеличение порядка модели при постоянной длине  $l = l_0$  участка аппроксимации продолжается до тех пор, пока впервые не выполняется условие (3). Значение  $K$  для этого случая запоминается как порядок локально – оптимальной модели на первом участке аппроксимации, то есть  $K_1 = K > K_{\min}$ . Затем при неизменном значении  $K = K_1$  начинается поэлементное увеличение длины участка. Последовательность действий аналогична описанной. Итогом первого этапа является получение МНК-

оценок коэффициентов локально-оптимальной на этом этапе полиномиальной модели, определение порядка  $K_1$  этой модели и длины  $l_1$  первого участка.

**Второй этап** кусочно-полиномиальной аппроксимации – это построение локально-оптимальных моделей для второго и последующих участков аппроксимации. Для второго и любого из последующих участков процедура построения локально-оптимальной модели одинакова. Обозначим порядковый номер участка индексом  $r$ , коэффициенты модели, построенной на  $(r - 1)$ -м участке – через  $b_0, \dots, b_{K_{r-1}}$ , а граничную точку, общую для  $(r - 1)$ -го и  $r$ -го участков – через  $x_s$ . Коэффициенты  $a_0, \dots, a_k$  полиномиальной модели на  $r$ -м участке определяются из требований:

а) заданной точности:

$$\frac{1}{l_r - k_r - 1} \sum_{j=S}^{S+l-1} \left( y_j - \sum_{i=0}^k \tilde{a}_i x_j^i \right)^2 \leq q, \quad (4)$$

где  $l$  – длина  $r$ -го участка,  $k$  – порядок модели на  $r$ -м участке.

б) совпадения значений аппроксимирующих полиномов и их  $\theta$  первых производных в граничной точке  $x_s$ . При этом  $\theta$  определяется по формуле:

$$\theta = \begin{cases} K - 1, & \text{при } K \leq K_{r-1} \\ K_{r-1} - 1, & \text{при } K > K_{r-1} \end{cases}. \quad (5)$$

$\vartheta$ -я производная от степенного полинома определяется формулой:

$$\frac{d^\vartheta}{dx^\vartheta} \left[ \sum_{i=0}^k a_i x^i \right] = \sum_{i=\vartheta}^k \frac{I!}{(I - \vartheta)!} a_i x^{i-\vartheta} \quad (6)$$

Для исходной длины интервала аппроксимации  $l = l_0$  и начального порядка полиномиальной модели  $K = K_{\min}$  строится функция Лагранжа:

$$L = \sum_{j=S}^{S+l-1} \left( y_j - \sum_{i=0}^k \tilde{a}_i x_j^i \right)^2 + \lambda_1 [f_r(x_s) - f_{r-1}(x_s)] + \lambda_2 [f'_r(x_s) - f'_{r-1}(x_s)] + \dots + \lambda_{\theta+1} [f_r^{(\theta)}(x_s) - f_r^{(\theta)}(x_s)]. \quad (7)$$

Вычисляют оценки  $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_k$ , минимизирующие функцию Лагранжа: определяются и приравниваются нулю частные производные  $\partial L / \partial \tilde{a}_i, i = \overline{0, k}, \partial L / \partial \lambda_\vartheta, \vartheta = \overline{1, \theta + 1}$ . Система уравнений, решаемая относительно коэффициентов  $\tilde{a}_i, i = \overline{1, k}, \lambda_\vartheta, \vartheta = \overline{1, \theta + 1}$ , дает искомые оценки коэффициентов полиномиальной модели. Если величина погрешности аппроксимации превышает заданную точность  $q$ , следует увеличить на 1 порядок аппроксимирующего полинома, вновь рассчитывать оценки его коэффициентов, проверить точность аппроксимации для этого полинома и т.д., аналогично тому, как это делалось при оценке порядка локально оптимальной модели на первом участке аппроксимации. Далее при каждом шаге обработки данных, связанном с определением порядка  $k_r$  локально оптимальной модели длины  $l_r$   $r$ -го участка аппрокси-

мации и соответствующих оценок коэффициентов локально оптимальной модели  $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{k_r}$ , приходится заново производить формирование функции Лагранжа, находить оценки коэффициентов аппроксимирующих полиномов, анализировать полученные результаты путем проверки выполнения условия (4).

Рассмотрим в качестве примера применение кусочно-полиномиальной аппроксимации как метода получения целеориентированной **модели характеристики полевого транзистора**. Данный подход предложен как метод обработки данных в новом цикле лабораторных работ по электротехнике [2].

Как управляемый элемент полевой транзистор представлен семейством ВАХ входной и выходной цепей (рис. 1).

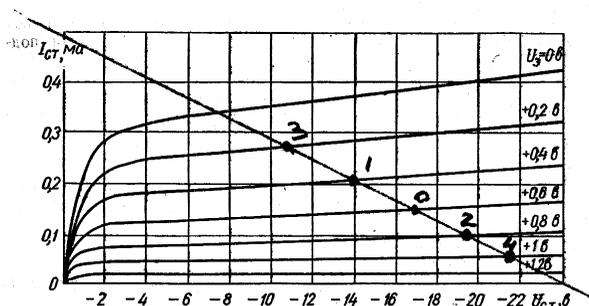


Рис. 1. Семейство стоковых вольт-амперных характеристик полевого транзистора КП102Е.

При изменении напряжения между затвором и истоком  $U_3$  от 1 до 1.2 В стоковый ток  $I_{cm}$  изменяется от 0.4 почти до нуля. Величина  $I_{cm}$  также (в диапазоне  $-2 \div -24$  В) практически линейно зависит от напряжения  $U_{cm}$  между стоком и истоком транзистора, то есть задана зависимость  $I_{cm}(U_{cm}, U_3)$ , которая в силу непрерывности может быть описана рядом в отклонениях от некоторой точки  $(U_{cm,0}, U_{3,0})$ .

Сначала построим модель, оценивания результаты эксперимента **по классической (не целеориентированной) методике**, при этом модель  $I_{CT} = f(U_{CT}, U_3)$  будет иметь вид

$$I_{CT} \cong I(-10, 0, 6) + \left. \frac{\partial I_{CT}}{\partial U_{CT}} \right|_0 \cdot \Delta U_{CT} + \left. \frac{\partial I_{CT}}{\partial U_3} \right|_0 \cdot \Delta U_3 + \left. \frac{\partial^2 I_{CT}}{\partial U_{CT} \partial U_3} \right|_0 \cdot \Delta U_{CT} \cdot \Delta U_3 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 I_{CT}}{(\partial U_{CT})^2} \right|_0 \cdot (\Delta U_{CT})^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 I_{CT}}{(\partial U_3)^2} \right|_0 \cdot (\Delta U_3)^2, \quad (8)$$

$$\frac{\partial I_{CT}}{\partial U_{CT}} = \left. \frac{\partial I_{CT}}{\partial U_{CT}} \right|_0 + \left. \frac{\partial^2 I_{CT}}{\partial U_{CT} \partial U_3} \right|_0 \cdot \Delta U_3 + \left. \frac{\partial^2 I_{CT}}{(\partial U_{CT})^2} \right|_0 \cdot \Delta U_{CT}$$

$$\frac{\partial I_{CT}}{\partial U_3} = \left. \frac{\partial I_{CT}}{\partial U_3} \right|_0 + \left. \frac{\partial^2 I_{CT}}{\partial U_{CT} \partial U_3} \right|_0 \cdot \Delta U_{CT} + \left. \frac{\partial^2 I_{CT}}{(\partial U_3)^2} \right|_0 \cdot U_3$$

Обозначим в (8) постоянные величины соответствующими коэффициентами:  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_5$ . Тогда (8) после приведения подобных примет вид степенного полинома:

$$I_{CT}(U_{CT}, U_3) = C_0 + C_1 U_{CT} + C_2 U_3 + C_3 U_{CT}^2 + C_4 U_3^2 + C_5 U_{CT} U_3, \quad (9)$$

который и является аналитическим выражением семейства ВАХ (рис. 1).

В качестве плана эксперимента выбран ортогональный центральный композиционный план для двух факторов (4 точки полного факторного эксперимента, 4 “звездные” точки и 1 опыт в центре плана). Благодаря ортогональности плана все коэффициенты полинома

$$I_{CT} = C'_0 + C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_5 X_1 X_2 + C_3 X_1^* + C_4 X_2^* \quad (10)$$

вычисляются независимо:

$$C'_0 = \frac{1}{9} \sum_{j=1}^9 I_{CT}(j); \quad C_i = \frac{\sum_{j=1}^9 X_i(j) I_{CT}(j)}{\sum_{j=1}^9 X_i^2(j)}, \quad i = \overline{1, 2}$$

$$C_5 = C_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^9 X_i(j) X_k(j) \cdot I_{CT}(j)}{\sum_{j=1}^9 (X_i(j) X_k(j))^2}, \quad i \neq k$$

$$C_{ii} = \frac{\sum_{j=1}^9 X_i^*(j) \cdot I_{CT}(j)}{\sum_{j=1}^9 (X_i^*(j))^2}, \quad i, j = 3, 4;$$

$$C_0 = C'_0 - \frac{C_3}{9} \sum_{j=1}^9 X_1^2(j) - \frac{C_4}{9} \sum_{j=1}^9 X_2^2(j) \quad (11)$$

По критерию Стьюдента проверяется статистическая значимость найденных коэффициентов:  $|C_i| > \widehat{\sigma}_{C_i} \cdot t$ , где  $\widehat{\sigma}_{C'_0}^2 = \frac{1}{9} \sigma_{I_{CT}}^2$ ,  $\widehat{\sigma}_{C_0}^2 = \widehat{\sigma}_{C'_0}^2 + \frac{2}{9} \sum_{i=3}^4 \sigma_{C_{ii}}^2 \cdot \sum_{j=1}^9 X_i(j)$ ,

$$\widehat{\sigma}_{C_i}^2 = \frac{\widehat{\sigma}_{I_{CT}}^2}{\sum_{j=1}^9 (X_i(j))^2}, \quad i \neq 0; \quad \widehat{\sigma}_{C_{ik}}^2 = \frac{\widehat{\sigma}_{I_{CT}}^2}{\sum_{j=1}^9 (X_i(j) \cdot X_k(j))^2}, \quad i \neq k;$$

Среднее значение  $I_{cm0}$  равно 0.156. Оценка дисперсии  $\sigma_{I_{CT0}}^2 = 8.27 \cdot 10^{-3}$ . Результаты вычисления  $\widehat{C}_i, \widehat{\sigma}_{C_i}^2, \sigma_{C_i} \cdot t$  где  $t$  для 8-ми степеней свободы равно 2.31, сведены в таблицу 1.

$i$	$\widehat{C}_i$	$\widehat{\sigma}_{C_i}^2$	$\widehat{\sigma}_{C_i}^2 \cdot t$	$\text{sign} \left\{  C_i  - \widehat{\sigma}_{C_i}^2 \cdot t \right\}$
0	0.138	$9 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	+1
1	$-1.67 \cdot 10^{-3}$	$1.38 \cdot 10^{-3}$	$3.18 \cdot 10^{-3}$	-1
2	-0.103	$1.38 \cdot 10^{-3}$	$3.18 \cdot 10^{-3}$	+1
3	$3.1 \cdot 10^{-3}$	$4.14 \cdot 10^{-3}$	$9.5 \cdot 10^{-3}$	-1
4	0.023	$4.13 \cdot 10^{-3}$	$9.5 \cdot 10^{-3}$	+1
5	-0.013	$2.07 \cdot 10^{-3}$	$\cdot 10$	+1

Незначимы здесь  $C_1$  и  $C_3$ . Полином (10) без  $C_1$  и  $C_3$  имеет вид

$$I_{CT} = 0.138 - 0.103 \frac{U_3 - 0.6}{0.4} + 0.023 \left( \frac{U_3 - 0.6}{0.4} \right)^2 - 0.013 \frac{U_{CT} + 10}{6} \cdot \frac{U_3 - 0.6}{0.4}.$$

Оценка  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$  дисперсии ошибки  $\varepsilon$  аппроксимации равна  $1.013 \cdot 10^{-3}$ . Критерий Фишера  $F = \widehat{\sigma}_\varepsilon^2 / \widehat{\sigma}_{I_{CT}}^2$ , что для трех степеней свободы числителя и шести – знаменателя существенно меньше табличного значения 4.76, то есть данная модель адекватно описывает зависимость  $I_{CT}(U_3, U_{CT})$ .

Построим теперь **целесоориентированные** на рабочую область кусочно-полиномиальные модели в виде ряда (8) для нескольких областей. Возьмем 5 точек на линии нагрузки (рис.1), точки 0, 1, 2 являются центрами областей (1,2), (3,0) и (0,4) соответственно, запишем линейные модели и вычислим первые производные ряда (8).

Область (1,2):  $I_{CT}(j) - 0.15 = \left. \frac{\partial I_{CT}}{\partial U_{CT}} \right|_0 (U_{CT}(j) + 17) + \left. \frac{\partial I_{CT}}{\partial U_3} \right|_0 (U_3(j) - 0.6), j = 1.2.$

Область (3,0):  $I_{CT}(j) - 0.21 = \left. \frac{\partial I_{CT}}{\partial U_{CT}} \right|_1 (U_{CT}(j) + 14) + \left. \frac{\partial I_{CT}}{\partial U_3} \right|_1 (U_3(j) - 0.4), j = 3.0.$

Область (0,4):  $I_{CT}(j) - 0.1 = \left. \frac{\partial I_{CT}}{\partial U_{CT}} \right|_2 (U_{CT}(j) + 19.5) + \left. \frac{\partial I_{CT}}{\partial U_3} \right|_2 (U_3(j) - 0.8), j = 0.4.$

Значения  $I_{CT}(j), U_3(j), U_{CT}(j)$  даны в табл. 2.

Таблица 2

$j$	0	1	2	3	4	5
$I_{CT}$	0.15	0.21	0.1	0.27	0.055	0.34
$U_3$	0.6	0.4	0.8	0.2	1	0
$U_{CT}$	-17	-14	-19.5	-10.8	-21.5	-7.5

Подставив численные значения и решив системы  $2 \times 2$ , найдем значения первых производных. Далее найдем значения вторых производных, причем смешанная производная находится дважды и результат усре-

дняется. Подставим оценки производных в ряд (8) и приведем модель к полиномиальному виду (9):

$$I_{CT}(U_{CT}, U_3) = -1.8 - 0.505 \cdot U_{CT} - 0.825 \cdot U_{CT} \cdot U_3 - 0.0725 \cdot U_{CT}^2 - 0.03 \cdot U_{CT}^2 - 5.625 \cdot U_3^2$$

Во втором случае дисперсия ошибки аппроксимации  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 3.067 \cdot 10^{-3}$ , среднеквадратическое отклонение равно  $\hat{\sigma}_\varepsilon = 0.055$ . Увеличение  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  для данного метода по сравнению с МНК для ЦКП-планирования объясняется приближенностью представления соответствующих производных разностями I-го и II-го порядков. Ликвидировать эту погрешность можно, “притянув” по МНК коэффициенты данной модели. В результате получим модель с  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 6 \cdot 10^{-7}$ , и СКО=7.8 · 10<sup>-4</sup>. Дальнейшая рационализация структуры модели осуществлена на основе эвристического подхода к тихоновской регуляризации — метода гребневой регрессии [3]:

$$\widehat{C} = [X^T X + a \cdot I]^{-1} X^T Y. \tag{12}$$

Увеличивая  $a$  от 0 до 20, прослеживаем поведение компонент  $\widehat{C}_i(a)$ .  $\Rightarrow C_i(a)$  вектора  $\widehat{C}$ . Отбрасываются, в частности, компоненты, быстро убывающие до нуля при увеличении параметра  $a$ . Такой компонентой в данном случае оказалась  $C_4$ . Укороченный на  $C_4$  полином  $\widehat{I}_{CT}(U_3, U_{CT})$  дает достаточно хорошую аппроксимацию опытных данных, оценка дисперсии ошибки при этом  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 6.6 \cdot 10^{-6}$ , СКО = 0.0026. Не целеориентированная на рабочую область модель ЦКП на этих же точках имеет  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 2.7 \cdot 10^{-4}$ , и СКО = 0.016, что существенно хуже целеориентированной.

Приведенные данные дисперсии и СКО позволяют сделать вывод о практической эффективности принципа целеориентации и метода адаптивной композиции полной модели (10) по частным кусочно-полиномиальным моделям.

### Литература

1. Сильвестров А.Н., Чинаев П.И. Идентификация и оптимизация автоматических систем.-М.:Энергоиздат, 1983.-2000 с.
2. Лабораторные работы по электротехнике (системотехнический подход):Методическое пособие/В.А. Бойкова, А.Н. Гуржий, В.Н. Резниченко.-К:ВПОЛ, 2000.-65 с.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.– М.: Наука, 1979.-286 с.
4. Гроот Н. Оптимальные статистические решения.-М.:Мир,1974-431с.
5. Пухов Г.Е., Хатиашвили Ц.С. Критерии и методы идентификации объектов.-К.:Наукова думка,1979.-190с.