УДК 519.711

В.М. Мирунко, А.М. Сільвестров

ОПТИМАЛЬНЕ (НА МНОЖИНІ МОДЕЛЕЙ І МЕТОДІВ ІДЕНТИФІКАЦІЇ) ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ ПРОГНОЗУВАННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ

На множині з 15 математичних моделей часових рядів та 4 методів їх ідентифікації доведено доцільність оптимізації задачі прогнозування за відповідним критерієм якості прогнозу на розширеній методами ідентифікації множині елементів, що оптимізуються.

Критерії якості прогнозу.

Показники економіки, як функції часу, можуть мати найрізноманітнішу структуру, довжину ряду, точність, тип прихованої закономірності розвитку (зміни) у часі, кроку по часу, інтервалу прогнозу та ін. Час t представлено дискретами $t_k, k = 0, 1, 2, \ldots$ не завжди з рівномірним кроком Δtt. У випадку невідомої структури моделі ряду, перебираючи різні варіанти структур, можна підібрати найкращу (за основним критерієм I (критерієм точності прогнозу) структуру. Моделі з степеневими елементами, як правило, краще використовувати для коротких рядів, а авторегресійні – для довгих (де не так сильно впливає невизначеність початкових умов). Фізично реалізуємий показник $\hat{I}$ точності прогнозу представимо взваженою сумою часткових показників $I_i (i = 1, 2, 3)$, що відповідають за якість окремих властивостей моделі ряду. Показник I_1:

$$I_1 = \frac{1}{n} tr \left[diag \frac{\left| \hat{\beta}_i^{\Pi} - \hat{\beta}_i^{H} \right|}{\left| \hat{\beta}_i \right|} \right], \quad i = \overline{1, n}; \tag{1}$$

де – $\hat{\beta}_i^{\Pi}$, $\hat{\beta}_i^{H}$ і $\hat{\beta}_i$ оцінки i-го параметра моделі, отримані по виборці парних, непарних та всіх дискретів k часу t_k; це, так званий [1], параметричний показник регулярності. Показник :

$$I_2 = \left(\varepsilon^T \varepsilon \right) \cdot \left(x^T x \right)^{-1}, \tag{2}$$

де $\varepsilon^{\boldsymbol{E}} = [\varepsilon(1), \cdots, \varepsilon(\boldsymbol{M})]$, $\hat{x}^T = [\hat{x}(1), \cdots, \hat{x}(M)]$, $\varepsilon(k)$ – похибки апроксимації сигналу $x(k)$ відповідною $\hat{x}(k)$ моделлю в k-ій точці ряду; це, так званий [1], показник незміщеності, або точності моделювання ряду моделлю. Показник I_3 :

$$I_3 = |1 - K|, \quad K = \frac{\sum\limits_{i=1}^{L} \eta_i \left| x(M-i) \cdot \hat{x}(M-i) \right|}{\sum\limits_{i=1}^{L} \eta_i \left| x(M-i) \right| \cdot \sum\limits_{i=1}^{L} \eta_i \left| \hat{x}(M-i) \right|}. \tag{3}$$

 ISSN 1562-9945

Тут η_i – коефіцієнт розподілу бажаної точності прогнозу по L останнім точкам вибірки $x(k), k = \overline{1, M}$; $\sum\limits_{i=1}^{L} \eta_i = 1$; $\hat{x}(M-i)$ – прогнозні значення $x(M-i)$, отримані з моделі, побудованої на скороченій на L останніх точок вибірці $k = \overline{1, M-L}$. Вважається, що прогнозований ряд $x(k)$складається з прихованої детермінованої гладкої у часі складової і складової, близької до гаусівського “білого шуму”. Тому у варіаційному ряді упорядкованих по складності (мірності вектора β невідомих параметрів) моделей, показники I_1 і I_3 обмежують мірність n вектора β, в той час, як показник I_2 зі зростанням n зменшується. Залежно від мети ідентифікації задаються коефіцієнти ваги g_i взваженої суми цих трьох показників:

$$\hat{I} = \sum_{i=1}^{3} g_i I_i, \ \sum_{i=1}^{3} g_i = 1, \ g_i \geq 0. \tag{4}$$

Для задачі контролю параметрів β_i моделі відомої структури максимальна вага g_1; для задачі точної апроксимації ряду $x(k)$ моделлю $\hat{x}(k)$ – g_2; для задачі прогнозу – g_3. Сукупність показників I_1, I_2, I_3 забезпечує компроміс між стабільністю оцінок моделі, точністю апроксимації та прогнозу.

На прикладі часового ряду, що має 43 дискрети $x(k)$ з рівномірним кроком $\Delta t = 4$ місяці (один з показників у енергетиці України), (рис. 1), розглянемо рішення задачі прогнозу $x(k)$, $k = \overline{1, 37}$, на 6 останніх точок, вважаючи їх невідомими. Така постановка задачі дослідження дає можливість реалізувати, фізично не реалізуємий при прогнозі в майбутнє, об’єктивний показник I відносної точності прогнозу на ці 6 точок, тобто відносне середньоквадратичне відхилення $\varepsilon(k) = \hat{x}(k) - x(k), \ k = \overline{38, 43}$, прогнозних значень $\hat{x}(k)$ від відомих $x(k)$.

$$I = \frac{[\varepsilon(38), \ldots, \varepsilon(43)] \cdot [\varepsilon(38), \ldots, \varepsilon(43)]^T}{[x(38), \ldots, x(43)] \cdot [x(38), \ldots, x(43)]^T} \tag{5}$$

В критерії (3) взято $\eta_i = \frac{1}{L} = \frac{1}{6}$, в узагальненому критерії (4): $g_1 = 0.9$; $g_2 = g_3 = 0.4$.

Далі слід визначити, наскільки показник (4), що реалізується, відповідає ідеальному (5), фізично не реалізуємому.

Множина математичних моделей

1. Моделі у вигляді степеневого поліному від дискретів k часу:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k, \tag{6}$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2, \tag{7}$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2 + \beta_3 k^3, \tag{8}$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k^{\frac{1}{4}} + \beta_2 k^{\frac{1}{3}} + \beta_3 k^{\frac{1}{2}} + \beta_4 k^{\frac{3}{2}}, \tag{9}$$

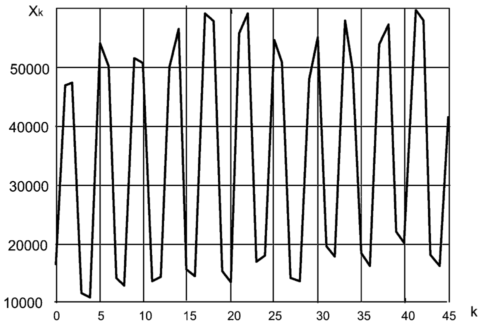

Рис. 1 – Часовий ряд.

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^{-1} + \beta_3 k^{-3}, \tag{10}$$

2. Моделі авторегресії від k з постійним та змінним кроком:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1), \tag{11}$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-2), \tag{12}$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-2) + \beta_3 x(k-3), \tag{13}$$

$$x(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-4), \tag{14}$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-2) + \beta_3 x(k-3) + \beta_4 x(k-4), \tag{15}$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-4), \tag{16}$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-4) + \beta_3 x(k-8), \tag{17}$$

3. Комбіновані поліноміально-авторегресійні моделі:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-1), \tag{18}$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-4), \tag{19}$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-1) + \beta_3 x(k-4). \tag{20}$$

Множина методів ідентифікації моделей (6–20).

1. Метод найменших квадратів (МНК). Оцінка $\hat{\beta}$ вектора β параметрів моделей (6–20) знаходиться за умови:

 ISSN 1562-9945

$$\hat{\beta} = \arg\min_{\hat{\beta}} \left[\varepsilon(1), \cdots, \varepsilon(37)\right] \cdot \left[\varepsilon(1), \cdots, \varepsilon(37)\right]^T, \qquad (21)$$

де $\varepsilon(k) = x(k) - \hat{x}(k), k = \overline{1,37}$.

2. Узагальнений МНК (УМНК). Оцінка $\hat{\beta}$ вектора β параметрів моделей (6–20) знаходиться за умови:

$$\hat{\beta} = \arg\min_{\hat{\beta}} \left[\tilde{\varepsilon}(1), \cdots, \tilde{\varepsilon}(37)\right] \cdot \left[\tilde{\varepsilon}(1), \cdots, \tilde{\varepsilon}(37)\right], \qquad (22)$$

де $\tilde{\varepsilon}(k) = \tilde{x}(k) - \hat{x}(k)$, $k = \overline{1,37}$; $\tilde{x}(k)$ – ковзне середнє значення $x(k)$; $\tilde{x}(k) = \frac{1}{5}\sum\limits_{i=k-2}^{k+2} x(k+i)$.

3. Інтегрований МНК (ІМНК). Оцінка $\hat{\beta}$ вектора β параметрів моделей (6–20) знаходиться за умови:

$$\hat{\beta} = \arg\min_{\hat{\beta}} \sum_{p=1}^{5} \left[\varepsilon(1), \cdots, \varepsilon(37-p)\right] \cdot \left[\varepsilon(p), \cdots, \varepsilon(37)\right]^T, \qquad (23)$$

тобто за умови мінімуму суми зсунутих на p дискрет Δt часу добутків $\varepsilon(k)$ на $\varepsilon(k+p)$.

4. Метод допоміжної змінної (МДЗ). Оцінка $\hat{\beta}$ вектора β параметрів моделей (6–20) визначається, як і МНК – оцінка (21), але замість функції чутливості $\frac{\partial\varepsilon}{\partial\hat{\beta}}$ взято деяку допоміжну функцію U з компонентами U_i . В нашому прикладі U_i дорівнює сигнум – функції від $\frac{\partial\varepsilon}{\partial\beta_i}$.

Числовий експеримент

На множині структур (6)–(20) моделей часового ряду (Рис. 1.) та множині методів (МНК, УМНК, ІМНК, МДЗ), перевірено ефективність використання фізично реалізуємого критерію (4) на предмет його близькості до фізично не реалізуємого бажаного критерію (5). Під ефективністю тут розуміється правильність вибору найкращого за критерієм (5) методу, вибраного по критерію (4). Результати числового моделювання для моделей (6)–(20) представлено в 15 рядках таблиці. В стовпчиках 1–10 подано:

1 – типи моделей (степеневі (6)–(10), авторегресійні (11)–(17), комбіновані (18)–(20)); 2 – відносну середньо - квадратичну похибку моделювання ряду відповідною моделлю на $k = \overline{1,37}$ при ідентифікації її по МНК; 3 – фізично не реалізуємий ідеальний критерій (5) для моделі, отриманої по МНК; 4 – фізично реалізуємий критерій (4) при ідентифікації моделі по МНК; 5 – найкращий по критерію (4) метод ідентифікації для відповідної до рядка моделі;

6 – значення ідеального критерію (5) для вибраного за реальним критерієм (4) методом і для відповідної до рядка моделі; 7 – значення критерію (4) для вибраного за ним найкращого методу ідентифікації для відповідної до рядка моделі; 8 – найкращий за ідеальним критерієм (5) метод ідентифікації відповідної до рядка моделі; 9 – значення ідеального критерію

(5) для найкращого за ним методу ідентифікації моделі відповідного рядка; 10 – значення реального критерію (4) для найкращого за критерієм (5) методу ідентифікації моделі відповідного рядка.

Аналіз результатів експерименту

1. На множині з 15-ти структур моделей і 4 методів ідентифікації для конкретного ряду (Рис.1) найкращою по ідеальному критерію (5) виявилась авторегресійна модель (17) зі змінним запізненням на $k-1$, $k-4$ і $k-8$ кроків; метод – МДЗ. За реальним критерієм (4) отримано той же результат (!). Взагалі, з 15 розглянутих випадків у 8-ми оптимальний метод ідентифікації за реальним критерієм (4) було вибрано вірно (рядки 2, 3, 6, 7, 10, 11, 12, 15 таблиці), тобто він співпав з методом, вибраним по ідеальному критерію (5). В інших 7-ми випадках (рядки 1, 4, 5, 8, 9, 13, 14) ідеальний показник (5) для методу, вибраного за реальним показником (4), несуттєво гірший за цей показник для оптимального за ідеальним показником методу (стовпчики 6 і 9).

2. По мірі ускладнення моделей (6), (7), (8), що є степеневими рядами, показник (2) (ІІ стовпчик таблиці) середньо-квадратичної похибки апроксимації ряду (Рис.1) моделями (6)–(8) зменшується, що природно витікає з теореми Вейерштраса про апроксимацію рядами Тейлора. В той же час ідеальний критерій (5) точності прогнозу при ускладненні моделей погіршується (рядки 1,2,3 третього стовпчика таблиці). Це підтверджує необ’єктивність внутрішнього апроксимативного критерію (2), некоректність його використання для задачі прогнозу.

Таблиця

Результати моделювання

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	6	0,49	0,47	0,25	УМНК	0,41	0,242	МДЗ	0,363	0,26	1,3
2	7	0,484	0,593	0,26	ІМНК	0,415	0,223	ІМНК	0,415	0,223	1,43
3	8	0,476	0,883	0,41	ІМНК	0,38	0,2	ІМНК	0,38	0,2	2,32
4	9	0,485	0,593	0,27	УМНК	0,43	0,226	ІМНК	0,365	0,235	1,62
5	10	0,488	0,49	0,25	ІМНК	0,45	0,23	УМНК	0,425	0,237	1,15
6	11	0,49	0,435	0,24	УМНК	0,42	0,235	УМНК	0,415	0,235	1,05
7	12	0,62	0,58	0,28	УМНК	0,56	0,262	УМНК	0,558	0,262	1,04
8	13	0,123	0,143	0,04	МНК	0,143	0,04	МДЗ	0,096	0,048	1,49
9	14	0,133	0,1	0,03	МНК	0,1	0,03	МДЗ	0,088	0,126	1,13
10	15	0,113	0,122	0,037	МДЗ	0,092	0,03	МДЗ	0,092	0,03	1,33
11	16	0,131	0,103	0,034	МДЗ	0,091	0,031	МДЗ	0,091	0,031	1,13
12	17	0,087	0,092	0,015	МДЗ	0,063	0,011	МДЗ	0,063	0,011	1,46
13	18	0,488	0,47	0,245	МДЗ	0,489	0,225	УМНК	0,411	0,237	1,14
14	19	0,132	0,108	0,035	МНК	0,108	0,035	МДЗ	0,081	0,038	1,33
15	20	0,131	0,111	0,036	МНК	0,111	0,037	МНК	0,111	0,037	1

3. Дещо інша ситуація має місце для авторегресійних і змішаних поліноміально-авторегресійних моделей (11)–(20). Тут, внаслідок регуля-

ризуючої властивості МНК, коли змінні зашумлені, внутрішній критерій (2) середньо-квадратичної міри близькості на ділянці апроксимації і зовнішній, як ідеальний (5), так і ($k = \overline{1,37}$) реальний (4) критерії стають достатньо сильно корельованими. Тобто для цього класу моделей менш критичне використання апроксимативного критерію (2) в задачі прогнозу в точки (38–43) по зашумленим даним в точках (1–37). Тут має місце саморегуляризація. Чим складніше авторегресія, тим гірше обумовленість інформаційної матриці МНК для точних даних. Але для зашумлених некорельованою перешкодою даних діагональні елементи цієї матриці збільшуються і, як результат, зменшуються (за модулем) МНК-оцінки коефіцієнтів моделі, тим самим спрощуючи (регуляризуючи за А.М. Тихоновим [2]) модель.

4. Зіставимо значення ідеального критерію (5) для моделей, отриманих по МНК (стовпчик 3) і одному з запропонованих методів (стовпчик 6) з оптимізацією по реальному критерію (4). З 15 моделей тільки для моделі (18) показник (5) несуттєво менший. Тобто тільки тут за критерієм (4) помилково замість МНК було вибрано МДЗ. В інших чотирнадцяти випадках метод, знайдений за умови мінімуму фізично реалізуемого критерію (4) точності прогнозу, дав кращі результати, ніж МНК, або такі ж, якщо по (4) вибирався, як кращий, МНК (стовпчики 6 і 3 таблиці).

5. В межах одного методу ідентифікації, наприклад, МДЗ (стовпчик 6, рядки 10–13) розкид ідеального критерію (5) залежно від структури моделі складає від 0,063 до 0,489, що підтверджує актуальність вибору структури моделі.

В межах однієї, наприклад, оптимальної за критерієм (5) моделі (17), оптимізація рішення на множині з чотирьох методів (МНК, МДЗ, УМНК, ІМНК) дає виграш в 1,5 рази (0,092 – для МНК і 0,063 – для МДВ, як оптимального методу). Це підтверджує актуальність вибору методу ідентифікації.

6. В цілому оптимізація на множині методів і моделей дає суттєвий виграш у точності прогнозу. Визначимо цей виграш, як відношення критерію (5) для моделі з коефіцієнтами, визначеними по МНК (стовпчик 3 таблиці) до значення того ж критерію (5) для тієї ж моделі, з коефіцієнтами, визначеними оптимальним по (5) методом (стовпчик 9 таблиці). В стовпчику 11 таблиці подано це відношення, що лежить у межах від 1 до 2,32.

Література

1. Івахненко А.Г. Долгострочное прогнозирование и управление сложными системами. – К.: Техніка, 1975. – 312 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979.–286 с.