

КОМПЕНСАЦИЯ ВЛИЯНИЯ РАССОГЛАСОВАНИЯ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ФИЛЬТРОВ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

Анализ калмановского подхода фильтрации переменных состояния

Как известно, фильтрация переменных состояния имеет как самостоятельное значение, например, при решении задач измерительного характера, так и для разработки оптимальных регуляторов динамических объектов при решении задач оптимального управления, как при наличии, так и при отсутствии помех. В последнем случае качество решения задач управления в значительной мере зависит от качества фильтрации переменных состояния, так как они служат информацией, на основе которой регуляторы и формирует само управление. Во многих случаях для решения задач определения оценок переменных состояния используются фильтры Калмана, которые до недавнего времени считались оптимальными. Однако, как было указано в работах первого соавтора статьи, они обладают существенным недостатком.

Указанный недостаток фильтра Калмана обусловлен некорректностью постановки задачи фильтрации, на основе которой он и синтезируется. Некорректность постановки задачи состоит в том, что она не учитывает рассогласование начальных условий переменных состояния объекта $x(0)$ с начальными состоянием их оценок $\hat{x}(0)$ на фильтре. Но так как фильтр переменных состояния представляет собой динамическую структуру, то качество оценок $\hat{x}(t)$ зависит как от вида и интенсивности помех на входе объекта $w(t)$ и выходе измерителя $v(t)$ его выходной величины $y(t)$, так и от рассогласования $\varepsilon = \overset{\circ}{x}(0) - \hat{x}(0)$ начальных условий $x(0)$ и $\hat{x}(0)$. Отсюда следует, что фильтр Калмана оптимален лишь в случае, если указанные условия одинаковы.

Как правило, начальные условия переменных состояния объекта неизвестны. Отсюда вытекает, что в общем случае отсутствует возможность установления требуемых начальных условий на фильтр для обеспечения его оптимальности. Этот факт и приводит к статистической неоптимальности фильтра Калмана.

Постановка задачи синтеза улучшенных фильтров переменных состояния

Вышеуказанное замечание приводит к необходимости осуществления более корректной постановки задач фильтрации, которая учитывала влияние рассогласования начальных условий переменных состояния

объекте и фильтра на эффективность получаемых оценок. Это можно осуществить заменой калмановского требования эффективности на суммарную дисперсию $\sigma_{\hat{x}}^2 = \sigma_{\hat{x}}^2[w(t), v(t), \varepsilon(0)]$ оценок переменных состояния. Последняя при статистической независимости аргументов примет вид $\sigma_{\hat{x}}^2 = \sigma_{\varepsilon(0)}^2 + \varepsilon_{w,v}^2$, где $\varepsilon_{w,v}^2$ - суммарная дисперсия оценок, зависящие от помех $w(t), v(t)$, а $\sigma_{\varepsilon(0)}^2$ - дисперсия оценок, обусловленная рассогласованием начальных условий $\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0)$.

С учетом отмеченного для случая белых некоррелированных помех $w(t), v(t)$ и независимости $w(t), v(t), \varepsilon(0)$ задачу фильтрации переменных состояния должна быть рассмотрена в следующей постановке:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + Bu(t) + G(t)w(t); \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)v(t); \\ M\hat{x} &= Mx(t), {}^M w(t) = 0, {}^M v(t) = 0; \\ \hat{x}^* &= \arg\left\{\frac{\min}{\hat{x}}[\sigma_{\varepsilon(0)}^2 + trP_{\varepsilon}]\right\} \\ Cov[w(t), w(\tau)] &= Q_w\delta(t - \tau), Cov[v(t), v(\tau)] = , \\ &= R_w\delta(t - \tau); \\ Cov[w(t), v(\tau)] &= 0, Cov[\hat{x}(0), \hat{x}(0)] = P(0); \\ \dot{\hat{x}}(t) &= L\hat{x}(t) + Ky(t) + B_k u(t) \end{aligned} \tag{1}$$

где \hat{x}^* – оптимальная оценка переменных состояния, $trP_{\varepsilon}(t)$ - след ковариационной матрицы $P_{\varepsilon}(t)$ ошибки $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, M, Cov – операторы математического ожидания и ковариации, δ – функция Дирака, L, K, B_k – матрицы состояния, усиления и входа улучшенного фильтра соответственно. Последнее выражение в наборе ограничений задачи (1) выражает требование линейности процедуры фильтрации переменных состояния.

При “небелых” шумах $w(t), v(t)$ в постановку задачи должны быть внесены соответствующие операторы “отбеливания”.

Алгоритм решения задачи синтеза улучшенного фильтра переменных состояния

В этой статье приводится один из возможных вариантов приближенного решения этой задачи. Идею этого варианта рассмотрено на частном примере компенсации влияния рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и фильтра на основе информации о рассогласования первых их нормальных переменных. Суть варианта состоит в следующем.

В структурной схеме фильтра Калмана (рис. 1) имеется ошибка фильтрации

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{x}(t) = Cx(t) + v(t) - C\hat{x}(t), \tag{2}$$

откуда вытекает, что

$$C\hat{x}(t) + \varepsilon(t) - v(t) = Cx(t), \tag{3}$$

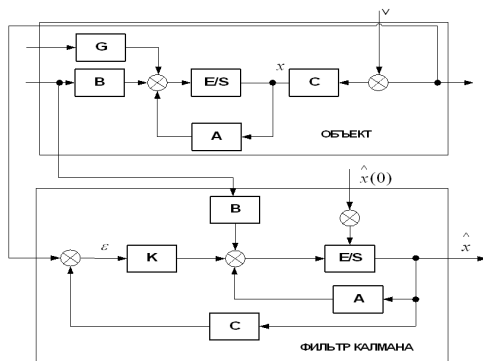


Рис. 1 – Структурная схема калмановской фильтрации

При нормальных переменных из (3) вытекает следующее

$$[10 \dots 0] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \dots \\ \hat{x}_1 \end{bmatrix}^T + \varepsilon(t) - v(t) = [10 \dots 0] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \dots \\ \hat{x}_1 \end{bmatrix}^T, \quad (4)$$

или

$$\hat{x}_1(t) + \varepsilon(t) = x_1(t) + v(t), \quad (5)$$

Выражение (5) справедливо при любом t , в том числе и при $t = 0$, т.е.

$$\hat{x}_1(0) + \varepsilon(0) = x_1(0) + v(0), \quad (6)$$

Из этого выражения, следует, что, если считать величину $x_1(0) + v(0)$ в качестве “удовлетворительной” оценки первой переменной состояния объекта, то она может быть выставлена в качестве начального значения первой координаты вектора переменных состояния фильтра. А так как согласно выражениям (5), (6) и структурной схеме значения $\hat{x}_1(0)$, $\varepsilon(0)$ имеются, то может быть определено значение $\hat{x}_1(0) + \varepsilon(0)$, которое может быть использовано для “перестройки” начальных условий в последующий момент времени $t = 0_{+0}$.

При наличии помех и в особенности помех на выходе измерителя выходной величины объекта перестройка начальных условий выполняется после некоторого этапа усреднения, зависящего от интенсивности и спектра помех.

Предложенное мероприятие значительно сужает дисперсию выбора начальных условий первой переменной состояния фильтра. А так как первая координата вектора переменных состояния фильтра, ввиду замкнутости контура фильтра, существенно влияет на эффективность оценок всех его координат, то указанное мероприятие существенно повышает общую эффективность фильтрации.

Таким образом, предложенный алгоритм фильтрации позволяет значительно уменьшить влияние рассогласования начальных условий пе-

ременных состояния и фильтра на интегральную эффективность оценок переменных состояния.

Следует отметить, что при отсутствии помех предложенный алгоритм полностью исключает влияние рассогласования начальных условий переменных состояния и фильтра эффективность оценок переменных состояния, т.е. позволяет синтезировать фильтр с идеальным быстродействием процесса определения переменных состояния.

Соответствующим образом могут быть перестроены начальные условия и остальных координат оценок вектора переменных состояния.

Экспериментальные исследования теоретических результатов

Ниже приводятся экспериментальные исследования эффективности предложенного фильтра переменных состояния, структурная схема которого приведена на рис. 2.

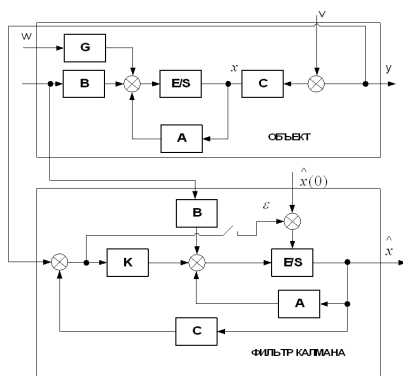


Рис. 2 – Структурная схема предложенного алгоритма фильтрации.

Экспериментальные исследования были выполнены для объекта второго порядка, описываемого векторно-матричной моделью

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + v, \end{aligned} \quad (7)$$

при $u=1$, “белых” помехах с интенсивностями $Q_w = 2, R_v = 2$ и начальных условиях переменных состояния объекта и фильтра, равными соответственно $x_1(0) = 0, \hat{x}_1(0) = 2; x_2(0) = 0, \hat{x}_2(0) = 0$.

Результаты полученных исследований приведены на рисунках 3-7. Разрывными линиями указаны переменные состояния, обычными – калмановские оценки, жирными – оценки, полученные предложенными фильтрами.

В качестве критерия эффективности фильтрации использована усреднённая сумма квадратов отклонений переменных состояний от их оце-

нок. Интервал усреднения был выбран с учетом ширины существенного значения переходных процессов в объекте и в фильтре, так как в дальнейшем фильтры Калмана вырождаются в обычные фильтры Винера.

В качестве критерия эффективности оценок, полученных предложенным фильтром $Q1Y, Q2Y$ по отношению к калмановским оценкам $Q1K, Q2Y$ использованы их отношения $\frac{QK}{QY}$.

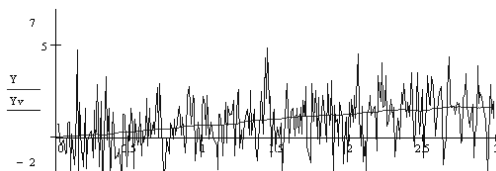


Рис. 3 – Выходная величина объекта без и с помехой.

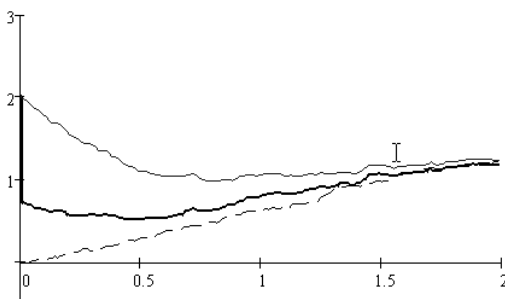


Рис. 4 – Графики первой переменной состояния, её калмановской оценки и улучшенной оценки без “усреднения”

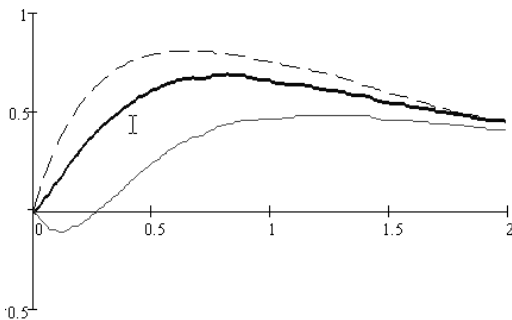


Рис. 5 – Графики второй переменной состояния, её калмановской оценки и улучшенной оценки без “усреднения”

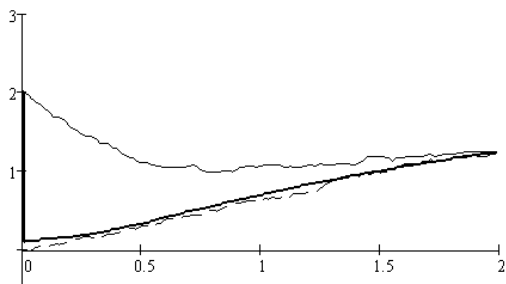


Рис. 6 – Графики первой переменной состояния, её калмановской оценки и улучшенной оценки с “усреднением”

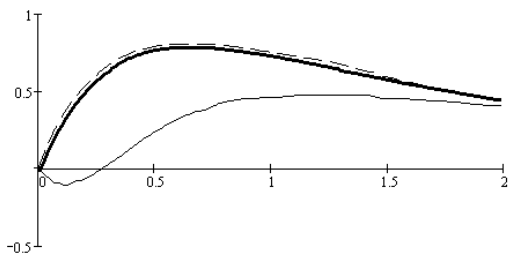


Рис. 7 – Графики второй переменной состояния, её калмановской оценки и улучшенной оценки с “усреднением”

Названные критерии эффективности имеют следующие полученные значения

$$Q1K = 1.275, Q1Y = 0.178, \frac{Q1K}{Q1Y} = 7.166; Q1YY = 0.045, \frac{Q1K}{Q1YY} = 28.303$$
$$Q2K = 0.264, Q2Y = 0.033, \frac{Q2K}{Q2Y} = 8.116; Q2YY = 0.0164, \frac{Q2K}{Q2YY} = 160.527$$

Выводы

На основе полученных результатов могут быть сделаны следующие убедительные выводы:

1. Предложенный подход синтеза фильтров переменных состояния приводит к значительно более эффективным оценкам по сравнению с существующими фильтрами Калмана.
2. Даже фильтры, синтезируемые без элемента “усреднения”, существенно эффективнее, чем фильтры Калмана.
3. Перестройка начальных условий переменных состояния фильтра с внедрением этапа “усреднения” приводит к значительному улучшению эффективности по сравнению с отсутствием последнего.

Литература

1. Kalman R.E. The theory of Optimal Control and the Calculus of Variations. Mathematical Optimization Techniques // University of California Press , Berkeley – 1963.
2. Кикю А.Г., Бурлаков В.М., Аглоктова О.С Улучшение калмановской фильтрации переменных состояния // Адаптивные системы автоматического управления.-2003.- 6 (26).