

## СИНТЕЗ ФИЛЬТРОВ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ НА ОСНОВЕ ОЦЕНОК РАССОГЛАСОВАНИЯ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Статья посвящена повышению эффективности фильтрации переменных состояния динамических объектов на основе использования оценок рассогласования начальных условий объекта и фильтра для компенсации их влияния на качество искомых оценок. Приведен общий подход синтеза улучшенных фильтров переменных состояния и результаты его компьютерного моделирования, демонстрирующие значительное преимущество предложенных фильтров относительно стандартных фильтров Калмана.

### Анализ калмановского подхода фильтрации переменных состояния

Как известно, в калмановской постановке задач фильтрации переменных состояния к оценкам  $\hat{x}(t)$  переменных  $x(t)$  вдвигаются требования их несмещенности и эффективности, а к процедуре фильтрации – ее линейность. На основе этих требований классическая постановка задачи фильтрации переменных состояния, разработанная Калманом, имеет следующий вид:

$$\hat{x}^* = \arg \left\{ \min_{L, K, B_\phi} \text{tr} P_\varepsilon \right. \left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t) + G(t)w(t); \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)v(t); \\ M\hat{x} = Mx(t), Mw(t) = 0, Mv(t) = 0; \\ \text{Cov}[w(t), w(\tau)] = Q_w \delta(t - \tau), \text{Cov}[v(t), v(\tau)] = \\ = R_w \delta(t - \tau); \\ \text{Cov}[w(t), v(\tau)] = 0, \text{Cov}[w(t), \hat{x}(0)] = 0 \\ \text{Cov}[\hat{x}(0), \hat{x}(0)] = P(0), \\ \dot{x}(t) = L\hat{x}(t) + Ky(t) + B_\phi u(t) \end{array} \right. , \quad (1)$$

где  $\hat{x}^*$  – оптимальная оценка переменных состояния,  $\text{tr} P_\varepsilon(t)$  – след ковариационной матрицы  $P_\varepsilon(t)$  ошибки  $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  фильтрации,  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $G(t)$  – соответствующие матрицы уравнения состояния объекта,  $C(t)$  – матрица выхода объекта,  $M$ ,  $\text{Cov}$ - операторы математического ожидания и ковариации,  $w(t)$ ,  $v(t)$  – соответственно “белые” помехи на входе и выходе объекта,  $\delta$  – функция Дирака,  $L(t)$  – матрица состояния фильтра,  $B_\phi(t)$  – матрица входа фильтра по  $u(t)$ ,  $K(t)$  – матрица входа по  $y(t)$  (матрица усиления фильтра). Последнее условие в наборе ограниченной задачи (1) выражает требование линейности процедуры фильтрации.

При “небелых” помехах  $w(t)$ ,  $v(t)$  в постановку задачи вносятся соответствующие операторы их “отбеливания”.

Как видно в указанной постановке отсутствует влияние рассогласования  $\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0)$  начальных условий переменных состояния и их оценок на качество фильтрации. Этот недостаток приводит в конечном итоге к тому, что синтезируемый на ее основе фильтр оказывается неоптимальным. Действительно, ввиду того, что фильтр Калмана представляет собой линейный оператор, наличие рассогласования начальных условий  $\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0)$  порождает в нем составляющую

$$\hat{x}_{\varepsilon(0)}(t) = e^{Lt}\varepsilon(0) = \Phi(t)\varepsilon(0) \quad (2)$$

Отметим, что эта составляющая регулярна по структуре и эффективность ее “подавления” фильтром не является оптимальной, как и эффективность подавления влияния помех  $w(t)$  и  $v(t)$ . Указанное обусловлено полной “структурной” корреляцией составляющей  $\hat{x}_{\varepsilon(0)}(t)$ .

Как известно, с “течением” времени после выхода на стационарный режим фильтр Калмана, например, для стационарных объектов представляет собой по существу фильтр Винера. Это вытекает из того, что ковариационная матрица  $P_{\varepsilon}(t)$  ошибки фильтрации, а значит и матрица  $K(t)$ , при  $t \rightarrow \infty$  становится постоянной. Аналогичный эффект имеет место и для нестационарных объектов. Отсюда вытекает, что преимущество калмановской фильтрации над винеровской должно проявляться в интервале выхода процесса фильтрации на стационарный режим. Выход же фильтра на стационарный режим имеет место после “исчезновения” влияния рассогласования начальных условий  $\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0)$  на процесс фильтрации. Отсюда вытекает, что учет рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и их оценок на фильтре представляет собой принципиальный недостаток калмановской постановки задачи фильтрации. Действительно, как показали авторы статьи в [1], фильтры, синтезируемые с учетом рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и их оценок на фильтре, обладают значительно большей эффективностью по сравнению с эффективностью фильтров Калмана.

Эффективная фильтрация переменных состояния необходима как при решении задач определения оценок переменных состояния, так и для синтеза оптимальных регуляторов объектов при неизвестных переменных состояниях и наличии помех. В последнем случае использование фильтров Калмана приводит к неоптимальности регуляторов и в теоретическом плане - к несправедливости известной теоремы разделения.

### **Корректная постановка задачи фильтрации переменных состояния**

Вышеприведенный анализ калмановского решения задачи фильтрации показывает, что для улучшения качества оценок переменных состояния необходима более корректная, чем калмановская, постановка задач

фильтрации, которая при тех же требованиях к оценкам в наборе ограничений учитывала бы влияние рассогласования начальных условий переменных состояния объекте и фильтра. Подобная постановка была предложена в [1] и имеет следующий вид:

$$\hat{x}^* = \arg \left\{ \min_{L, K, B_\phi} [\sigma_{\varepsilon(0)}^2 + \text{tr} P_\varepsilon] \right. \left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t) + G(t)w(t); \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)v(t); \\ M\hat{x} = Mx(t), Mw(t) = 0, Mv(t) = 0; \\ \text{Cov}[w(t), w(\tau)] = Q_w \delta(t - \tau), \text{Cov}[v(t), v(\tau)] = \\ = R_w \delta(t - \tau); \\ \text{Cov}[w(t), v(\tau)] = 0, \text{Cov}[w(t), \hat{x}(0)] = 0 \\ \text{Cov}[\hat{x}(0), \hat{x}(0)] = P(0), x(0) - \text{не известно,} \\ \dot{x}(t) = L\hat{x}(t) + Ky(t) + B_\phi u(t) \end{array} \right. \quad (3)$$

где  $\sigma_{\varepsilon(0)}^2$  – дисперсия оценок, обусловленная рассогласованием начальных условий  $\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0)$ .

Как и в калмановской постановке, если помехи  $w(t), v(t)$  “не белые”, то в постановке должны быть внедрены соответствующие операторы отбеливания.

### Алгоритм решения задачи фильтрации переменных состояния на основе предложенной ее постановке

В работе [1] был рассмотрен вариант решения указанной задачи на основе компенсации влияния рассогласования  $\varepsilon_1(0) = x_1(0) - \hat{x}_1(0)$  только начальных условий первых наиболее важных составляющих  $x_1(0), \hat{x}_1(0)$  векторов переменных состояния и их оценок. При этом в качестве информации о значении  $x_1(0)$  была использовано его оценка, равная  $\hat{x}_1(0) = y(0)$ . В указанной работе было показано, что такой подход позволяет значительно улучшить эффективность искомых оценок переменных состояния.

В данной работе предлагается вариант компенсации рассогласования начальных условий всех компонент векторов переменных состояния и их оценок. При этом в качестве информации значениях  $x_i(0), i \in \overline{1, n}$  предлагается использовать их оценки  $\hat{x}_i(0)_{\Delta t}, i \in \overline{1, n}$ , полученные на основе информации, содержащейся в реализации  $y(t)_{\Delta t}$  в интервале времени  $[0, \Delta t]$ . При этом оценки  $\hat{x}_i(0)_{\Delta t}, i \in \overline{1, n}$  могут быть получены любым статистическим методом, например, методом наименьших квадратов, сглаживающей фильтрации определенного порядка и др.

Структурная схема предложенного подхода фильтрации переменных состояния представлена на рис. 1, где БООНУПСО – блок определения оценок начальных условий переменных состояния объекта, БПНУПСФ – блок перестройки начальных условий переменных состояния фильтра.

**Таким образом, процедура синтеза фильтра переменных состояния на основе предложенного подхода содержит следующие этапы:**

1. Синтез стандартного фильтра Калмана на основе постановки задачи фильтрации (1);
2. Синтез блока определения оценок начальных условий переменных состояния объекта на основе выбранной процедуры оценивания.
3. Синтез блока перестройки начальных условий переменных состояния фильтра.

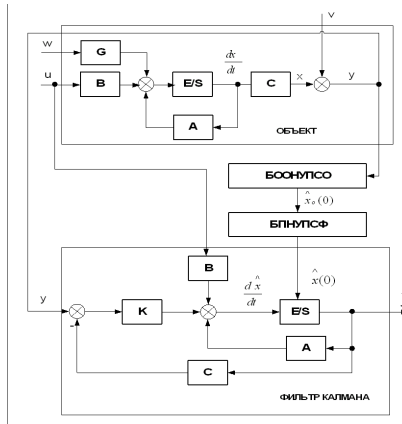


Рис. 1 – Структурная схема системы фильтрации

### Экспериментальные исследования теоретических результатов

Экспериментальные исследования теоретических результатов предложенного подхода синтеза фильтров переменных состояния были выполнены путем их компьютерного моделирования в стандартной среде *MathCAD 13*.

Экспериментальные исследования были выполнены для объекта второго порядка, описываемого векторно-матричной моделью

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + v \end{aligned} \quad (4)$$

при  $u(t) = 1(t)$ , “белых” помехах  $v(t)$ ,  $w(t)$  с интенсивностями  $Q_w = 2$ ,  $R_v = 2$  и начальных условиях переменных состояния объекта и фильтра, равными соответственно  $x_1(0) = 0$ ,  $\hat{x}_1(0) = 2$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $\hat{x}_2(0) = -2$ . Рассогласование  $\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0)$  принадлежало нормальному центрированному распределению вероятности с дисперсией  $\sigma_{\varepsilon(0)}^2 = 4$ . При выполнении экспериментальных исследований были использованы выборки объема  $N = 100$ .

Результаты полученных исследований приведены на рисунках 2–4. Обычными линиями указаны переменные состояния, калмановские оценки, пунктирными – оценки, полученные предложенными фильтрами.

Рисунок 3 относится к первой переменной состояния и её оценке. Рисунок 4 относится ко второй переменной состояния и её оценке.

На рисунках а) приведены результаты, полученные при компенсации рассогласования начальных условий на всём интервале фильтрации, на рисунках б) - при интервале компенсации, равном [0,1], на рисунках с) – при интервале компенсации, равном [0,0.1].

В качестве критерия эффективности оценок, полученных предложенным фильтром использованы отношения  $\frac{Q_K^i}{Q_Y^i}$ ,  $i = 1, 2$ , где  $Q$  – усреднённая сумма квадратов отклонений переменных состояний от их оценок,  $Q_Y, Q_K$  – значения критерия эффективности улучшенной по отношению к калмановской фильтрации,  $i$  – индекс координат вектора переменных состояния. Некоторые результаты экспериментальных исследований приведены на рис 2–4.

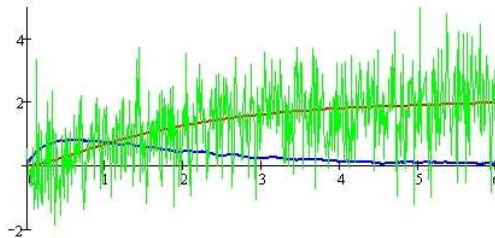
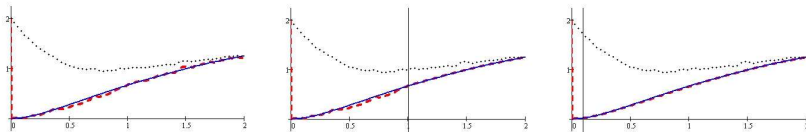


Рис. 2 – Выходная величина объекта без и с помехой

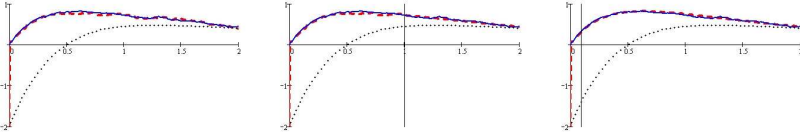


$$a) \left(\frac{Q_K^1}{Q_Y^1} = \frac{1.169}{0.12} \approx 9.74\right) \quad б) \left(\frac{Q_K^1}{Q_Y^1} = \frac{1.169}{0.055} \approx 21.25\right) \quad с) \left(\frac{Q_K^1}{Q_Y^1} = \frac{1.169}{0.054} \approx 21.65\right)$$

Рис. 3 – Графики первой переменной состояния, её калмановской оценки и улучшенной оценки

### Выводы

На основе полученных результатов могут быть сделаны следующие убедительные выводы:



$$a) \left(\frac{Q_K^2}{Q_Y^2} = \frac{1.152}{0.111} \approx 10.38\right) \quad б) \left(\frac{Q_K^2}{Q_Y^2} = \frac{1.152}{0.046} \approx 25.04\right) \quad в) \left(\frac{Q_K^2}{Q_Y^2} = \frac{1.152}{0.045} \approx 25.6\right)$$

Рис. 4 – Графики второй переменной состояния, её калмановской оценки и улучшенной оценки

1. Стандартные фильтры Калмана неоптимальны.
2. Неоптимальность фильтров Калмана обусловлена некорректностью калмановской постановки задачи фильтрации, которые не позволяют учитывать влияние рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и фильтра.
3. Учёт влияния рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и фильтра в постановке задачи фильтрации позволяет синтезировать более эффективные, чем калмановские фильтры переменных состояния.
4. Предложенный подход синтеза фильтров переменных состояния приводит к значительно более эффективным оценкам по сравнению с эффективностью оценок, полученных стандартными фильтрами Калмана.

### Литература

1. Kalman R.E. The theory of Optimal Control and the Calculus of Variations. Mathematical Optimization Technigues // Univercity of California Press , Berkeley – 1963.
2. А.Г.Кику. Улучшение калмановской фильтрации переменных состояния // Адаптивные системы автоматического управления.-2003.- 6 (26).
3. А.Г.Кику, Е.Ю.Рева. Компенсация влияния рассогласования начальных условий фильтров переменных состояния // Адаптивные системы автоматического управления.-2006.- 9 (29).