УДК 681.5

А.Е. Архипов, С.А. Архипова, С.А. Носок

ЭНТРОПИЙНЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНИВАНИЮ СОГЛАСОВАННОСТИ СУЖДЕНИЙ ЭКСПЕРТОВ

Введение

Применение логико-математических методов для анализа сложных систем, в частности, социальных явлений может оказаться заведомо проигрышным из-за неадекватности и упрощенности подобных формализованных подходов применительно к исследованию объектов высокой сложности, плохо согласующихся с описаниями в виде суперпозиции простых причинно-следственных отношений. В этой ситуации более удачным оказывается способ познания и осмысления сложных систем, во главу которого ставится изучение и понимание в целом понятийной среды, в которой функционируют исследуемые объекты, использование интуиции специалиста с опорой на его опыт и знания.

Приведенным требованиям в полной мере удовлетворяют экспертные методы исследования сложных систем. При этом в литературе большое внимание уделяется рассмотрению и описанию так называемых сложных комплексных экспертиз [1], процедура проведения которых обеспечивает получение экспертных оценок относительно высокой точности. Однако стоимость подготовки и осуществления подобных процедур достаточно высоки, гораздо менее дорогостоящими являются [1,2] простые опросные методики групповых (коллективных) экспертиз. Необходимая точность итоговых результатов экспертизы в этом случае достигается за счет применения методов математической обработки экспертных данных. Важное место в этой обработке занимает оценка степени согласованности суждений экспертов, непосредственно связанной с достоверностью результатов экспертизы. Последний тезис опирается на предположение, что согласованность мнений экспертов гарантирует достоверность выставленных ими оценок. Наиболее часто для проверки согласованности используется коэффициент конкордации [2,3], вычисление которого требует предварительного ранжирования данных экспертизы. Если исходные данные были представлены в интервальной шкале, их ранжирование ведет к существенным потерям информации. Поэтому интерес представляет разработка метода оценивания уровня согласованности результатов групповой экспертизы, представленных в количественной форме, без их предварительного ранжирования.

Постановка задачи

Предположим, что экспертному оцениванию подлежит комплекс параметров (свойств, качеств) $X_1, X_2, \ldots, X_M$, характеризующих исследуемую сложную систему. Каждый параметр описывается непрерыв-

 ISSN 1562-9945

ным множеством состояний, однако результаты экспертизы представляются в общей для всех параметров дискретной L-балльной шкале $\{0, 1, 2, \ldots, l_{\max}\}, L = l_{\max} + 1$. В экспертизе участвует N экспертов: $Э_1, Э_2, \ldots, Э_N$, полученные в ней данные представлены матрицей вида

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \ldots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \ldots & z_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{M1} & z_{M2} & \ldots & z_{MN} \end{bmatrix} = [z_{ij}] \tag{1}$$

где оценка z_{ij}, выставленная экспертом $Э_j$ по i-ому параметру X_i, представляет собой сумму неизвестного истинного значения параметра x_i, индивидуальной погрешности эксперта e_{ij} и погрешности квантования ξ_{ij}, обусловленной применением дискретной шкалы оценивания:

$$z_{ij} = x_i + e_{ij} + \xi_{ij},\ i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N} \tag{2}$$

В простейшем случае можно предположить, что индивидуальные погрешности j-ого эксперта, входящие в состав каждой из оценок $z_{ij}, i = \overline{1, M}$ и образующие вектор $e_j = [e_{1j}, e_{2j}, \ldots, e_{Mj}]$, представляют собой значения некоторой случайной величины E_j, характеризующей уровень компетентности эксперта $Э_j$. Достаточно распространенным является предположение о симметричности и несмещенности распределения этой погрешности. Последнее, в частности, означает отсутствие систематических ошибок в суждениях экспертов: $\mu\{E_j\} = 0$, $j = \overline{1, N}$, где $\mu\{.\}$ – операция вычисления математического ожидания. Очевидно, что одним из возможных показателей уровня компетентности эксперта может быть энтропия H_j его оценок, определяемая исключительно видом распределения погрешности E_j. Полагая ошибки экспертов независимыми, в качестве меры несогласованности суждений экспертов можно принять общую энтропию системы случайных величин $(E_1, E_2, \ldots, E_N)$:

$$H_0 = \sum_{j=1}^{N} H_j \tag{3}$$

К сожалению, для проверки правильности сделанных выше предположений о свойствах индивидуальной погрешности эксперта, в частности, о возможности ее представления некоторой случайной величиной $E_j, j = \overline{1, N}$, необходимо выделить и проанализировать векторы значений индивидуальных погрешностей $e_j, j = \overline{1, N}$, что с практической точки зрения не представляется возможным. Реально осуществимо получение некоторого оценочного значения $\tilde{x}_i$ экспертируемого параметра $X_i, i = \overline{1, M}$ и, как следствие, вычисление невязок $\varepsilon_{ij} = z_{ij} - \tilde{x}_i$, $i = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, N}$ являющихся по сути оценками суммарной погрешности $e_{ij} + \xi_{ij}$.

Погрешности квантования в общем случае предполагаются распределенными равномерно, а их конкретные значения определяются разностью суммы $x_i + e_{ij}$ и ближайшей дискреты балльной шкалы [4,5].

При отсутствии индивидуальных погрешностей в оценках экспертов наличие погрешности квантования не влияет на уровень согласованности суждений экспертов, т.е. при $e_{ij} = 0$ получаем:

$$z_{ij} = x_i + \xi_i = z_i,$$

где z_i соответствует ближайшему к x_i балльному значению шкалы оценок и, следовательно, оценки всех экспертов совпадают.

Очевидно, что единственным источником количественных сведений, дающим объективную информацию о качестве получаемых экспертных данных, в частности, о степени согласованности суждений экспертов, является матрица невязок

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1N} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{M1} & \varepsilon_{M2} & \dots & \varepsilon_{MN} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Каждый столбец этой матрицы – вектор оценок суммарных погрешностей суждений соответствующего эксперта по экспертируемым параметрам. Следуя изложенному выше, можно попытаться оценить общую энтропию матрицы невязок (4), использовав полученное количественное значение для характеристики степени согласованности суждений экспертов. Очевидно, что в случае полной согласованности, т.е. при совпадении суждений экспертов по оцениваемому параметру $X_j, j = \overline{1, N}$, матрица (4) заполнена исключительно нулями, её энтропия $H_{\varepsilon\min} = 0$. В реальной ситуации значение общей энтропии матрицы невязок (4) отлично от нуля и зависит от вида и формы распределения погрешностей суждений экспертов. Оценочное максимальное значение энтропии $H_{\varepsilon\max}$ легко получить из общетеоретических соображений, полагая, что невязки в (4) распределены равномерно в диапазоне $[-l_{\max}, l_{\min}]$. В этом случае $H_{\varepsilon\max} = \ln 2l_{\max}$. Полученные значения $H_{\varepsilon\min}$, $H_{\varepsilon\max}$ являются предельными оценками, при нахождении которых никак не учитывались реальные механизмы образования погрешностей экспертирования. Поэтому актуальной является задача уточнения предельных оценок энтропии, в частности, объективного определения их значений с учетом структурных особенностей погрешностей экспертирования, обусловленных природой возникновения этих погрешностей.

Уточненная модель погрешностей количественных экспертных оценок

Как показывает анализ экспериментально полученных данных, гипотеза однородности погрешностей экспертизы, позволяющая представить их совокупностью $\{\varepsilon_{ij}\}$, $i = \overline{1, M}$ значений некоторой случайной величины ε_j, не является состоятельной. Значения ε_{ij} оказываются зависящими от оцениваемого параметра X_i (его природы, семантического содержания, уровня восприятия экспертом и т.п.). В целом, рассматривая j-ого эксперта как некоторый измерительный преобразователь, точность

 ISSN 1562-9945

получаемых с его помощью измеренных значений z_{ij}, $i = \overline{1, M}$ можно характеризовать некоторой средней по множеству измерений дисперсией σ_j^2, $j = \overline{1, N}$. При этом дисперсия каждого отдельного измерения имеет свое конкретное значение, которое в общем случае отличается от среднего. Поэтому, если для описания погрешности эксперта используется модель в виде некоторой случайной величины ε, распределенной по закону (плотности вероятности) $f_j(\varepsilon)$, то параметры этого распределения сами будут случайными величинами, флуктуирующими в пределах некоторого (конечного или бесконечного) диапазона возможных значений. Отмеченная нестабильность параметров распределения погрешности экспертирования характерна для любого эксперта, поэтому в целом для невязки ε следует говорить о возможности ее представления моделью в виде случайной величины со случайными параметрами. Подобные модели рассматривались в [6,7]. В частности, если полагать распределение $f(\varepsilon)$ центрированным нормальным, что является распространенным предположением относительно погрешности эксперта, то это распределение окажется зависимым лишь от единственного случайного параметра – дисперсии, и будет иметь вид [7]:

$$f(\varepsilon, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right], \tag{5}$$

где σ – некоторая случайная величина, дифференциальный закон плотности вероятностей которой задается выражением $\varphi(\sigma)$. Для функции $\varphi(\sigma)$ должны выполняться условия:

$$\int_0^\infty \varphi(\sigma) d\sigma = 1, \ \int_0^\infty \sigma\varphi(\sigma) d\sigma = \sigma_0, \ 0 \leqslant \sigma_0 < \infty \tag{6}$$

Относительно формы распределения функции плотности вероятностей $\varphi(\sigma)$ можно сделать следующие предположения:

а) если экспертиза осуществляется группой высококалифицированых экспертов, средние дисперсии погрешностей их оценок малы, близки друг к другу и общей средней дисперсии σ_0^2. Диапазон высоковероятных значений σ узок, график функции $\varphi(\sigma)$ вытянут по ординате (рис. 1, кривая а);

б) в группе экспертов присутствуют как высококвалифицированные, так и низкоквалифицированные специалисты. Последнее обусловило смещение среднего значения вправо относительно моды (рис. 1, кривая б). Форма распределения $\varphi(\sigma)$ асимметрична;

в) в случае полного совпадения суждений экспертов, т.е. при $H_\varepsilon = H_{\varepsilon\min} = 0$ график распределения $\varphi(\sigma)$ вырождается в дельта-функцию: $\varphi(\sigma) = \delta(0)$.

В рамках сформированной в конце постановочного раздела задачи об объективном задании предельного значения энтропии $H_{\varepsilon\max}$ возникает вопрос о виде функции $\varphi(\sigma)$, обращающей в максимум энтропию

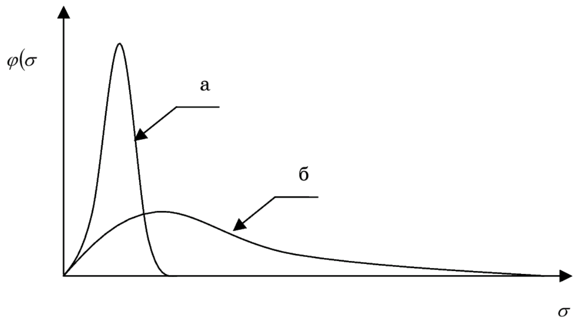

Рис. 1 – Варианты форм распределения $\varphi(\sigma)$ в зависимости от уровней компетенции экспертов, задействованных в ходе экспертизы

$$H_\varepsilon = -\int\limits_{\infty}^{\infty} f^*(\varepsilon) \ln f^*(\varepsilon) d\varepsilon, \tag{7}$$

где плотность распределения невязки $f^*(\varepsilon)$ определяется осреднением множества функций $f(\varepsilon, \sigma)$ вида (5):

$$f^*(\varepsilon) = \int\limits_{\infty}^{\infty} f(\varepsilon, \sigma)\varphi(\sigma) d\sigma, \tag{8}$$

В [7] показано, что максимум энтропии (8) достигается при условии, что плотность вероятности $\varphi(\sigma)$ имеет распределение релеевского вида:

$$\varphi(\sigma) = \frac{2}{\lambda^2} \sigma e^{-\frac{\sigma^2}{\lambda^2}}, \tag{9}$$

где $\lambda = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{\pi}}$. При этом, во-первых, выполняются условия (6):

$$\int\limits_0^\infty \varphi(\sigma) d\sigma = \frac{2}{\lambda^2} \int\limits_0^\infty \sigma e^{-\frac{\sigma^2}{\lambda^2}} = 1, \tag{10}$$

$$\int\limits_0^\infty \sigma\varphi(\sigma) d\sigma = \frac{2}{\lambda^2} \int\limits_0^\infty \sigma^2 e^{-\frac{\sigma^2}{\lambda^2}} d\sigma = \frac{2}{\lambda^2} \lambda^3 \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \lambda \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma_0, \tag{11}$$

во-вторых, после подстановки (5), (9) в формулу (8), получаем аналитическое выражение для плотности вероятности невязки [7]:

$$f^*(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\lambda^2} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2} \frac{\sigma^2}{\lambda^2}} d\sigma = -\frac{1}{2\Lambda} e^{-\frac{|\varepsilon|}{\Lambda}}, \tag{12}$$

где $\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma_0}{2\sqrt{\pi}}$.

 ISSN 1562-9945

Выражение (12) соответствует лапласовскому распределению плотности вероятностей, энтропия которого, соответствующая максимуму энтропии H_ε, рассчитывается по формуле [8]:

$$H_{\varepsilon\max} = \ln 2e\Lambda = \ln\frac{2e\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} = 1 - \frac{1}{2}\ln 2\pi + \ln 2 + \ln\sigma_0 = 0.7742 + \ln\sigma_0 \quad (13)$$

Применение уточненной модели погрешностей экспертных данных для оценки уровня согласованности результатов экспертизы

Предельные значения энтропии невязок, рассчитанные исходя из гипотезы равномерной плотности распределения значений невязок, дают неоправданно завышенные оценки. Значения $H_{\varepsilon\max}$, найденные по формуле (13), гораздо более адаптированы к условиям практики. При определении уровня согласованности мнений экспертов значение $H_{\varepsilon\max}$, рассчитанное по конкретной матрице невязок, сопоставляется с выборочной оценкой энтропии H_ε этой же матрицы.

Отношение $\frac{H_{\varepsilon\max}}{H_\varepsilon}$ может служить мерой согласованности суждений экспертов. Равенство этого отношения 1 говорит о приемлемом уровне согласованности, в противном случае наблюдается рост H_ε. Нахождение предельного значения $H_{\varepsilon\max}$ по формуле (13) требует знания среднеквадратического отклонения σ_0, в качестве которого используется его выборочная оценка:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N(M-1)}\sum_{i-1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_{ij}^2} \quad (14)$$

Расчет осуществляется по формуле:

$$H_\varepsilon = \sum_{k=1}^{2l_{\max}}\frac{\omega_k}{MN}\ln\frac{\omega_k}{MN}, \quad (15)$$

где ω_k – абсолютная частота распределения значений невязок на системе интервалов варьирования $I_1, I_2, \ldots, I_{2l_{\max}}$, границы которых заданы по следующему правилу:

$$\begin{aligned} &I_1 = [-l_{\max}, -l_{\max}+1), I_2 = [-l_{\max}+1, -l_{\max}+2), \ldots, \\ &I_{l_{\max}} = [-1, 0), \ldots, I_{2l_{\max}} = [l_{\max}-1, l_{\max}) \end{aligned} \quad (16)$$

Основной проблемой, возникающей при практическом применении этого подхода к оценке согласованности мнений экспертов, является проблема получения несмещенных оценок $\tilde{x}_i$, по которым рассчитываются соответствующие векторы значений невязок: $\varepsilon_{ij} = z_{ij} - \tilde{x}_i, j = \overline{1, N}$.

Данные экспертизы, полученные от экспертов с низким уровнем компетентности, могут содержать ненормально большие (аномальные) ошибки, которые, при вычислении $\tilde{x}_i$ с помощью обычного усреднения, могут привести к существенным смещениям среднего. Поэтому нахождение $\tilde{x}_i$

должно осуществляться робастными методами, устойчивыми к возможным аномалиям в исходных данных экспертизы. Учитывая гипотезу лапласовости распределения значений невязки ε, наиболее эффективным в сложившейся ситуации является нахождение $\tilde{x}_i$ методом медианного среднего.

Заключение

Энтропийный подход к оценке уровня согласованности суждений экспертов позволяет сформировать эту оценку без потерь информативности, которые имеют место при применении распространенного на практике рангового показателя согласованности – коэффициента конкордации [2,3]. Применение энтропийного подхода к обработке реальных данных базируется на уточненной модели погрешностей экспертных данных, предполагающей лапласово распределение этих погрешностей, что, в частности, позволяет рассчитать возможные предельные значения энтропии погрешностей, необходимые для оценки уровня согласованности суждений экспертов.

Литература

1. Дубровский С.А. Использование экспертных оценок в задачах предварительной алгоритмизации. – М.:ЦНИИ “Электроника”, 1984. – 35с.
2. Гранатуров В.М. Экономический риск: сущность, методы измерений, пути снижения. – М.: “Дело и Сервис”, 1999. – 112с.
3. Грабовецький Б.Є. Економічне прогнозування і планування. – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 188с.
4. Советов Б.Я. Теория информации. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1977. – 184с.
5. Толстова Ю.Н. Измерение в социологии. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 224с.
6. Архипов А.Е. Об одном методе оценки погрешности, обусловленной влиянием сухого трения//Вестн. Киевского политехнического ин-та, Технич. кибернетика, 5, 1981. – с.21-25.
7. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений. – М.: Сов. радио, 1976. – 192с.
8. Орлов В.А., Филиппов Л.И. Теория информации в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1976. – 136с.
9. Архипов А.Е., Архипова С.А., Носок С.А., Пишко И.В. Применение методов классификации в задаче обработки данных экспертного опроса // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2003. - 2(10). – с. 104-108

 ISSN 1562-9945