

ОЦЕНИВАНИЕ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ GERT-СЕТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Предложен подход к оцениванию пропускной способности GERT-сети с помощью характеристических функций. Результатом применения такого подхода является возможность получить аналитическое выражение плотности распределения случайной величины параметра стохастической сети.

Введение

Рыночные отношения предъявляют высокие требования к производителям товаров и услуг, и компании, которые пытаются сохранить свои конкурентные преимущества, вынуждены сокращать расходы времени и других ресурсов на производство. Это требует, в свою очередь оптимального планирования и хорошей координации всех этапов производства.

Известен ряд методов оптимального планирования на основе сетевых моделей [1,2,3,5,6], имеющие приложения в различных производственных процессах [9]. В свою очередь, для формального описания сложных процессов разработан ряд таких методов, как CPN (Critical Path Network) и PERT (Project Evaluation and Review Technique), а также их расширений: планирование распределения ресурсов между работами, оценка ожидаемой стоимости проекта наряду и в зависимости от времени выполнения, анализ итеративных процессов и вероятностных повторных выполнений частей проекта, использование метода Монте-Карло для оценки времени и стоимости проекта, выполнение работ с частичным наложением и т.д. [6].

Методы, приведенные выше, разрабатывались для анализа проектов и составления временных графиков распределения фаз проектов, и входными данными здесь являются отношения предшествования для операций и информация о потребности в ресурсах (времени др.) для каждой операции. Проект представляется в виде сети, и на ее основе составляют временной график развития проекта. Методы CPN и PERT разрабатывались независимо друг от друга, и основное отличие между ними состоит в том, что в первом потребность в ресурсах для операций есть величина постоянная, а во втором – случайная, характеризующаяся оптимистической, пессимистической и наиболее вероятной оценками.

Методы CPN и PERT:

- определить общую длительность выполнения всех работ;
- разделить операции на критические (не имеющие лага времени для начала и завершения) и некритические;

- определить для каждой операции наиболее раннее время начала и наиболее позднее время завершения.

При определении параметров общей длительности выполнения метод PERT базируется на предположении о нормальности распределения этого времени как суммы многих независимых случайных величин (согласно центральной предельной теореме [7]) и предполагает вычисление математического ожидания и дисперсии этой величины.

Основной целью настоящей работы является разработка эффективного метода определения плотности распределения времени выполнения сетевого проекта.

Как показывает проведенный анализ эффективности методов CPN и PERT, их применение для решения задач оптимального планирования имеет определенные ограничения. Интерес при этом представляют скорее сети, основанные на сигнальных графах. Для того, чтобы математически корректно поставить задачу оптимального планирования с применением сигнальных графов, рассмотрим основные сведения о них.

Определение. Сигнальным графом называют совокупность узлов и соединяющих их дуг. В каждый узел может входить и исходить из него несколько ветвей. Узел, у которого есть исходящая дуга, и нет входящих, называется входным сигналом всей сети, и, аналогично, узел с одной входящей дугой – выходным сигналом. Каждая дуга имеет коэффициент пропускания, равный отношению величины выходящего из нее сигнала ко входящему, каков бы ни был физический смысл этих сигналов. Такой граф по существу представляет собой геометрический образ системы линейных уравнений.

Основным свойством сигнальных графов является следующее. Если узлы x_a и x_b связаны с узлом x_c (рис. 1) дугами с коэффициентами пропускания p_{ac} и p_{bc} , то значение сигнала x_c вычисляется как

$$x_c = p_{ac}x_a + p_{bc}x_b. \tag{1}$$

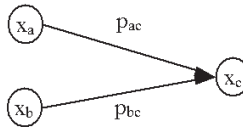


Рис. 1 – Пример сигнального графа

В графах могут существовать всего три способа соединения узлов: последовательные дуги, параллельные дуги и петли (рис. 2).

На основании выражения (1) можно определить сигнал на выходе каждого графа на рис. 2 и пропускную способность эквивалентной дуги (обозначены пунктиром):

$$x_c = p_{bc}x_b = p_{bc}p_{ab}x_a \Rightarrow p'_{ac} = \frac{x_c}{x_a} = p_{ab}p_{bc}, \tag{2}$$

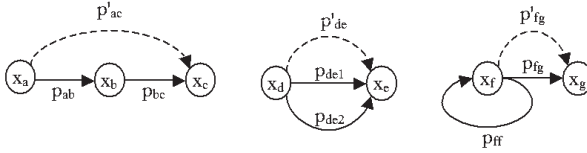


Рис. 2 – Элементы структуры: параллельные и последовательные дуги и петли

$$x_e = x_d p_{de1} + x_d p_{de2} = (p_{de1} + p_{de2}) x_d \Rightarrow p'_{de} = \frac{x_e}{x_d} = p_{de1} + p_{de2}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x_g &= p_{fg} \left(x_f + p_{ff} x_f + p_{ff}^2 x_f + \dots + p_{ff}^n x_f \dots \right) = \\ &= p_{fg} \frac{1}{1-p_{ff}} x_f \Rightarrow p'_{fg} = \frac{x_g}{x_f} = \frac{p_{fg}}{1-p_{ff}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Применяя описанные правила преобразования, можно любой сколь угодно сложный граф привести к одной эквивалентной дуге и определить ее пропускную способность.

Другим способом определения общей пропускной способности сигнального графа является применение топологического уравнения, известного как “правило Мейсона” [1]:

$$H = 1 - \sum_m (-1)^m \sum_i L_i^m = 0, \quad (5)$$

где L_i^m — i -я петля m -го порядка.

Здесь под *петлей* понимают связанную последовательность ориентированных дуг, каждый узел которой принадлежит двум ветвям. Петлю, не содержащую других петель, называют *петлей первого порядка*. Петля порядка n — это множество n не связанных между собой петель первого порядка [1]. Пропускная способность петли первого порядка равна произведению пропускных способностей дуг, которые она содержит, а пропускная способность петли порядка n равна произведению пропускных способностей петель первого порядка, из которых она состоит.

Для того чтобы применить правило Мейсона и построить топологическое уравнение сети, необходимо ввести дополнительную обратную дугу p_A (рис. 3), соединяющую узел входного сигнала с узлом входного сигнала, выделить все петли всех порядков и определить их пропускные способности.

Пропускная способность графа p_E связана с пропускной способностью обратной дуги соотношением вида

$$p_A = p_E^{-1},$$

что следует непосредственно из топологического уравнения (5) для графа на рис. 3:

$$H = 1 - p_A p_E = 0.$$

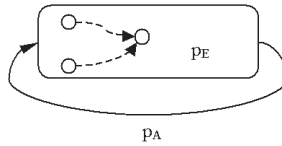


Рис. 3 – Обратная дуга графа

Заменяя в топологическом уравнении p_A на p_E^{-1} и решая его относительно неизвестной пропускной способности p_E , можно получить выражение p_E через пропускные способности всех дуг сигнального графа.

Общие сведения о GERT-сетях

Методика GERT [1,2,3,5,6], разработанная в 1966 году консультантом корпорации RAND Аланом Притскером ¹ по заказу NASA, основана на теории потоковых графов и использовании производящих функций моментов случайных величин. Она является развитием парадигмы PERT в том смысле, что использует для потребляемых ресурсов не оценки минимальных, максимальных и наиболее вероятных значений, а непосредственно их плотности распределения.

Если представить состояния технологической системы в виде узлов сети, а операции интерпретировать как переходы из состояния в состояние, то процесс, описанный в таких терминах, будет иметь вид стохастической сети. Правила ее работы таковы:

- любая операция может быть начата в том случае, если закончена любая одна из возможных предшествующих ей операций;
- операция занимает некоторое время, являющееся случайной величиной с известной плотностью распределения $f(\tau)$;
- в любом из состояний должна быть выполнена одна и только одна последующая операция.

Ограничения единственности выполненной входящей и исходящей дуг связаны с математическими трудностями при описании петель (алгебраических циклов) в случаях AND-узлов (должны быть выполнены все входящие дуги и/или все исходящие дуги) и OR-узлов (должна быть выполнена хотя бы одна входящая дуга). Кроме того, эти правила поведения узлов сети делают справедливым свойство (1) и позволяют применять правила упрощения сигнальных графов и строить топологические уравнения. Во многих случаях возможно преобразование сетей, имеющих AND- и OR-узлы к GERT-сетям с исключительно XOR-узлами.

Сеть может быть построена так, что если в некотором состоянии i возможно начало одной из нескольких последующих технологической операций, то вероятности запуска p_{ij} любой из этих операций образуют полную группу несовместных событий:

¹ Алан Притскер [1933-2000], один из основателей теории имитационного моделирования

$$\sum_j p_{ij} = 1, \forall i. \quad (6)$$

В таком случае вероятность выполнения всей сети от истока до стока равна 1, что легко показать на основании (2), (3), (4) и утверждения о существовании только трех описанных выше элементарных сетевых структур.

Дуги сети технологического процесса, описанного подобным образом, помечаются функциями плотности распределения случайных величин $f_{ij}(\tau)$.

Упрощение GERT-сети

Если известны все функции плотности распределения параметров дуг, то на основании сети G возможно построение эквивалентной сети G' , дуги которой помечены произведением вероятности выполнения операции на производящую функцию моментов случайной величины времени выполнения этой операции M_{ij} . Обозначим это произведение как W_{ij} :

$$W_{i,j}^\tau(s) = p_{i,j} \cdot M_{i,j}(s) = p_{i,j} \int e^{s\tau} f_{i,j}(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Описанную выше сеть G' можно рассматривать как ориентированный граф с метками $W_{i,j}(s)$ на ребрах. В исходной стохастической сети G допустимо использовать лишь такие случайные величины, ассоциированные с дугами, которые обладают свойством аддитивности по дугам любого пути. Примером такой величины является время выполнения технологической операции: время выполнения двух последовательных операций равно сумме времен выполнения каждой из операций. Множитель $p_{i,j}$ можно трактовать как коэффициент усиления дуги, причем этот коэффициент обладает свойством мультипликативности для последовательных дуг:

$$p_{i,k} = p_{i,j} p_{j,k}. \quad (8)$$

Известно, что производящая функция моментов суммы двух случайных величин равна произведению производящих функций моментов этих случайных величин:

$$M_{a+b}(s) = M_a(s) * M_b(s). \quad (9)$$

Из (7), (8) и (9) следует, что для двух последовательных дуг

$$W_{ik}(s) = p_{ik} \cdot M_{ik}(s) = p_{ij} \cdot p_{jk} \cdot M_{ij}(s) \cdot M_{jk}(s) = W_{ij}(s) \cdot W_{jk}(s). \quad (10)$$

В [1] также показано, что для параллельных дуг с передаточными функциями $W_{i,j}^a$ и $W_{i,j}^b$ эквивалентная дуга будет иметь W_{ij} , которая определяется как

$$W_{ik}(s) = W_{ij}^a(s) + W_{jk}^b(s), \quad (11)$$

а для ветви (i, j) с функцией $W_{i,j}(s)$ и петлей $W_{i,i}(s)$ около узла i эквивалентное преобразование имеет вид

$$W_{ij}(s) = \frac{W_{ij}(s)}{1 - W_{ii}(s)}. \quad (12)$$

Выражения (10), (11), (12) эквивалентны (2), (3), (4), что обуславливает применимость топологических уравнений к модифицированной сети G' для получения эквивалентной W -функции всей сети $W_E(s)$.

Анализ GERT-сети

Заключительным шагом процедуры GERT является вычисление вероятности выполнения всего процесса, а также математического ожидания и дисперсии общего времени выполнения процесса. Эквивалентная функция сети согласно (7) равна

$$W_E(s) = p_E M_E(s), \quad (13)$$

где p_E – общая вероятность выполнения процесса.

По определению производящей функции

$$M_E(s)|_{s=0} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s\tau} f_E(\tau) d\tau \Big|_{s=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f_E(\tau) d\tau = 1, \quad (14)$$

поэтому из (13) и (14)

$$p_E = \frac{W_E(s)}{M_E(s)} \Big|_{s=0} = W_E(0). \quad (15)$$

С другой стороны, если все узлы сети удовлетворяют условию (6), то всегда $p_E = 1$. Аналогично, из (13), используя (15)

$$M_E(s) = \frac{W_E(s)}{p_E} = \frac{W_E(s)}{W_E(0)}. \quad (16)$$

Первая производная производящей функции моментов в точке $s = 0$ дает значение математического ожидания параметра сети:

$$\mu_E = \frac{\partial M_E(s)}{\partial s} \Big|_{s=0},$$

а дисперсия может быть вычислена как разность между вторым начальным моментом (вторая производная производящей функции моментов при $s = 0$) и квадратом математического ожидания:

$$\sigma_E^2 = \frac{\partial^2 M_E(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=0} - \mu_E^2.$$

Использование характеристических функций

Нередко интерес представляют не только оценки математического ожидания и дисперсии параметра сети, но и вид его плотности распределения. К примеру, бимодальная функция плотности распределения с сильно удаленными друг от друга модами с высокой вероятностью будет указывать на существование двух, весьма различных путей выполнения технологического процесса, что не всегда разумно. В реальных производствах часто гораздо важнее *точнее знать* время завершения работ, нежели *стремиться к наискорейшему их завершению*. Для процессов, включающих незначительное количество фаз, их структура очевидна и без выполнения процедуры GERT. Для сложных же процессов на такие особенности косвенно может указывать большое значение дисперсии параметра сети, что дает куда меньше информации о возможных направлениях модификации технологического процесса. В частности, для приведенного примера бимодальной функции плотности возможным решением было бы разбиение одного составного технологического процесса на два параллельных независимых.

В работе [5] Алан Притскер предложил несколько путей решения этой задачи:

- использование табличных функций;
- использование формулы обратного преобразования для изображения плотности распределения параметра сети, в частности, обратного преобразования Лапласа, если использовалось производящая функция или обратного преобразования Фурье – если характеристическая;
- использование кривых Пирсона и рядов Грэма-Чарли для построения функций плотности распределения на основании n первых моментов, которые можно вычислить с помощью W -функции сети;
- использование предположений о форме распределения параметра сети, в частности, центральной предельной теоремы.

В настоящей работе для определения плотности распределения параметра сети предлагается вместо производящих функций моментов использовать характеристические функции плотностей случайных величин, являющиеся преобразованиями Фурье функций плотности распределения:

$$W_{i,j}^T(s) = p_{i,j} \cdot M_{i,j}^T(s) = p_{i,j} \cdot \sqrt{2\pi} \int f_{i,j}(\tau) e^{is\tau} d\tau. \quad (17)$$

Эти изображения также обладают свойством (9) благодаря чему возможно применение тех же эквивалентных преобразований (10)-(12) и топологических уравнений. Во многих случаях, в частности, когда параметры всех обратных дуг имеют только экспоненциальное распределение, удается получить аналитическое выражение обратного преобразования

Фурье производящей функции моментов времени выполнения сети, то есть его плотность распределения.

С помощью характеристических функций также можно получить значение n -го начального момента параметра сети:

$$m^n = -i^n \left. \frac{\partial M_e(s)}{\partial s} \right|_{s=0}. \quad (18)$$

Пример использования характеристических функций

Пусть, имеется технологический процесс, который может быть выполнен либо как две простых последовательных операции bc и cd , продолжительность которых имеет экспоненциальную плотность распределения с параметрами $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{10}$ мин⁻¹, либо как одна сложная операция bd с треугольной симметричной функцией плотности распределения времени и границами в 4 и 8 минут. Вероятность выполнения процесса как цепочки простых операций составляет $\frac{4}{5}$, или $\frac{1}{5}$ как одной сложной. По завершению операций выполняется проверка, выявляющая в среднем $\frac{1}{10}$ брака, который направляют (db) на повторную обработку, все остальное $\frac{9}{10}$ перевозят на склад (de). Время доставки на повторную обработку распределено по экспоненциальному закону с параметром $\frac{1}{2}$ мин⁻¹, время доставки на склад распределено равномерно в пределах 3-5 минут.

GERT-сеть, описывающая такой процесс, представлена на рис. 4.

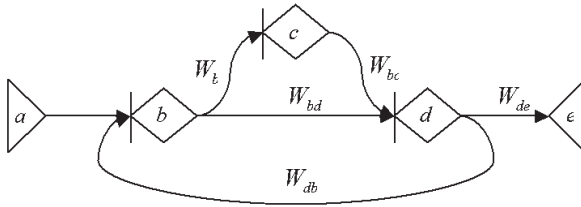


Рис. 4 – Пример представления процесса GERT-сетью

Здесь W -функции вычисляются согласно (17) и с учетом значений $p_{i,j}$ имеют вид [8]:

$$W_{bc}(s) = p_{bc} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} e^{isx} dx = \frac{2}{5 \left(\frac{1}{2} - i \cdot s \right)}, \quad (19)$$

$$W_{cd}(s) = p_{cd} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{10} e^{-\frac{3}{10}x} e^{isx} dx = \frac{3}{3 - 10i \cdot s}, \quad (20)$$

$$W_{bd}(s) = p_{bd} \int_4^6 \frac{1}{4} (x-4) e^{isx} dx + p_{bd} \int_6^8 \frac{1}{4} (8-x) e^{isx} dx = -\frac{(e^{2is} - e^{4is})^2}{20s^2}, \quad (21)$$

$$W_{db}(s) = p_{db} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} e^{isx} dx = \frac{1}{10 - 20i \cdot s}, \quad (22)$$

$$W_{de}(s) = p_{de} \int_3^5 \frac{1}{2} e^{isx} dx = -\frac{9i(-e^{3is} + e^{5is})}{20s}. \quad (23)$$

Применяя правила упрощения GERT-сетей (10)-(12), получим выражение для эквивалентной пропускной способности сети:

$$W_E(s) = \frac{W_{bc}(s)W_{cd}(s) + W_{bd}(s)}{1 - W_{db}(s)} W_{de}(s).$$

Используя (19) – (23), выражение пропускной способности сети примет вид:

$$W_E(s) = \frac{9ie^{3is}(-1 + e^{2is})(10i + 20s) \left(-\frac{e^{4is}(-1 + e^{2is})^2}{20s^2} + \frac{12}{15 - 80is - 100s^2} \right)}{20s(9i + 20s)}.$$

Вероятность выполнения процесса согласно (15)

$$p_e = \lim_{s \rightarrow 0} W_E(s) = 1,$$

что является следствием свойства (6), справедливого для данного случая. Тогда из (16) $M_E(s) = W_E(s)$ и плотность распределения времени выполнения процесса может быть найдена как

$$f_e(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W_e(s) e^{-isx} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\begin{aligned} & e^{-0.3x} (13.48\theta(x-5) - 7.398\theta(x-3)) + \\ & e^{-0.45x} \left(\begin{aligned} & 10.745\theta(x-13) - 13.105\theta(x-11) + \\ & 5.328\theta(x-9) - 0.722\theta(x-7) - \\ & 19.025\theta(x-5) + 7.735\theta(x-3) \end{aligned} \right) + \\ & \left(\begin{aligned} & 2.753\text{sgn}(x-13) + 5.963\text{sgn}(x-11) - \\ & 4.041\text{sgn}(x-9) + 0.831\text{sgn}(x-7) - \\ & 0.501\text{sgn}(x-5) + 0.501\text{sgn}(x-3) \end{aligned} \right) \\ & x \left(\begin{aligned} & 0.414\text{sgn}(x-13) - 1.055\text{sgn}(x-11) - \\ & 0.866\text{sgn}(x-9) - 0.226\text{sgn}(x-7) \end{aligned} \right) + \\ & x^2 \left(\begin{aligned} & -0.0157\text{sgn}(x-13) + 0.047\text{sgn}(x-11) - \\ & 0.047\text{sgn}(x-9) + 0.0157\text{sgn}(x-7) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right),$$

где $\theta(x)$ – единичная функция-ступенька Хэвисайда, $\text{sgn}(x)$ – функция знака аргумента.

На рис. 5 показан график плотности распределения времени выполнения всего процесса. Его бимодальная форма указывает на то, что процесс может проходить по одному из двух сценариев, что соответствует его

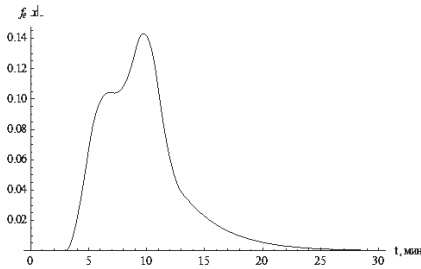


Рис. 5 – Плотность распределения времени выполнения сети

описанию, а также прослеживается правая точка перегиба около 12-й минуты, создаваемая операций bd .

Первый начальный и второй центральный моменты (математическое ожидание и дисперсия), вычисленные как

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_e(x) dx,$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_e(x) dx - \mu^2,$$

численно совпадают со значениями, полученными с помощью выражения (18) и составляют соответственно 9.6889 мин и 13.565 мин².

Выводы

Таким образом, используя характеристические функции времени выполнения элементарных операций сложного технологического процесса, описываемого графом с петлями, удалось получить аналитическое выражение плотности распределения времени выполнения всего процесса и его числовые характеристики.

Все символические преобразования, включая прямые и обратные преобразования Фурье, выполнялись с использованием пакета математического программного обеспечения Wolfram Mathematica 6.0.

Литература

1. Филипс Д., Гарсия-Диас А. Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984 – 496 с.
2. Ермолаева Л.В. Оптимизационные модели GERT-сетевого планирования и управления производственными процессами. Автореферат диссертации, Томский государственный университет, Красноярск, 2007 – 23 с.
3. Антамошкина Е.А., Дегтерев А.С., Ерыгин Ю.В. GERT-сетевой анализ производственных процессов. Электронный журнал “Исследовано в России”, Сибирский государственный аэрокосмический университет – 6 с.

4. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006 – 816 с.
5. A.A.V. Pritsker GERT: Graphical evaluation and review technique. Memorandum RM-4973-NASA, 1966 – 138 с
6. Soo-Haeng Cho, Steven D. Eppinger. Product Development Process Modeling Using Advanced Simulation. ASME 2001 Design Engineering Technical Conference, Pittsburgh, Pennsylvania, 2001 – 10 с.
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988 – 448 с.
8. Купер Дж., Макгиллем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. М.: Мир, 1989. – 376 с
9. Корсун В.И., Воловик В.П. Планирование открытых горных разработок на основе стохастических сетей. Науковий вісник Національного гірничого університету, 2004, 9 с. 11–17.

Получено 16.11.2007