УДК 621.924.229.86

А.Г. Кику, Е.Ю. Рева, В.Ю. Шейко

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ ПРИ КВАДРАТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЯХ КАЧЕСТВА

Статья посвящена решению задач оптимального квадратичного скалярного управления линейными динамическими объектами n-го порядка на основе использования в контуре регулятора разработанных авторами улучшенных фильтров переменных состояния и методики определения коэффициентов его матрицы.

Применение улучшенных фильтров переменных состояния приводит к улучшению эффективности управления. Предложенная методика определения матрицы регулятора приводит к упрощению вычисления её коэффициентов в особенности при высоких порядках объектов управления.

Постановка задачи оптимального управления линейными объектами при квадратических критерия качества

Задача управления рассматривается в следующей постановке:

$$\min_{u,\sigma^2_\Sigma(\varepsilon)} \frac{1}{2}\left\{\int\limits_{t1}^{t2}\left(x^TQx+u^TRu\right)dt\right\}\left|\begin{array}{l}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+Bu(t)+G(t)w(t),\\ y(t)=C(t)x(t)+v(t),\\ M\hat{x}=Mx(t), Mw(t)=0, Mv(t)=0,\\ Cov[w(t),w(\tau)]=Q_w\delta(t-\tau),\\ Cov[v(t),v(\tau)]=R_v\delta(t-\tau),\\ Cov[w(t),v(\tau)]=0,\\ Cov[w(t),\hat{x}(0)]=0,\\ Cov[v(t),\hat{x}(0)]=0\\ Cov[\hat{x}(0),\hat{x}(0)]=P(0),\\ x(0)-\text{ не известно,}\end{array}\right\},\tag{1}$$

где U^0 – открытое множество, Q – неотрицательно определенная диагональная матрица, R – положительно определенная матрица, $\sigma^2_\Sigma(\varepsilon)=(Q_w,R_v,\varepsilon(0))$, $\varepsilon(0)=x(0)-\hat{x}(0)$. Как правило матрицы $Q(q_1,\ldots,q_n)$ и $R(r_1,\ldots,r_l)$ критерия качества являются диагональными.

Задача фильтрации рассматривается в следующей постановке:

$$\hat{x}^* = \arg\left\{ \frac{\min}{L, K, B_\text{ф}} [\sigma^2_{\varepsilon(0)} + trP_\varepsilon] \left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t) + G(t)w(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + v(t), \\ M\hat{x} = Mx(t), Mw(t) = 0, Mv(t) = 0, \\ Cov[w(t), w(\tau)] = Q_w\delta(t-\tau), \\ Cov[v(t), v(\tau)] = R_v\delta(t-\tau), \\ Cov[w(t), v(\tau)] = 0,\ Cov[w(t), \hat{x}(0)] = 0, \\ Cov[v(t), \hat{x}(0)] = 0, Cov[\hat{x}(0), \hat{x}(0)] = P(0), \\ x(0) - \text{не известно}, \\ \text{Структура фильтра:линейная} \end{array} \right. \right\} \tag{2}$$

Необходимо отметить, что в стандартной калмановской постановке задачи:

$$\hat{x}^* = \arg\left\{ \frac{\min}{L, K, B_\text{ф}} [trP_\varepsilon] \left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t) + G(t)w(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + v(t), \\ M\hat{x} = Mx(t), Mw(t) = 0, Mv(t) = 0, \\ Cov[w(t), w(\tau)] = Q_w\delta(t-\tau), \\ Cov[v(t), v(\tau)] = R_v\delta(t-\tau), \\ Cov[w(t), v(\tau)] = 0,\ Cov[w(t), \hat{x}(0)] = 0, \\ Cov[v(t), \hat{x}(0)] = 0, Cov[\hat{x}(0), \hat{x}(0)] = P(0), \\ x(0) - \text{не известно}, \\ \text{Структура фильтра:линейная} \end{array} \right. \right\} \tag{3}$$

отсутствует учёт влияния рассогласования $\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0)$ начальных условий переменных состояния объекта и фильтра на качество фильтрации. Это приводит к тому, что стандартный фильтр Калмана не является оптимальным, а это в свою очередь приводит к неоптимальности регулятора.

Регулятор синтезирован на основе идей теоремы разделения и в данной работе представляет собой последовательное соединение оптимального квадратичного регулятора, синтезированного при наличии полной информации, и улучшенного фильтра.

При этом алгоритм управления имеет известный вид:

$$u^* = -R^{-1}B^TKx^*, \tag{4}$$

где матрица K определяется решением уравнения Риккати:

$$\dot{K} = -A^TK - KA + KBR^{-1}B^TK - Q, \tag{5}$$

На основе матрицы K определяется матрица усиления регулятора K_P:

$$K_P = -R^{-1}B^TK. \tag{6}$$

 ISSN 1562-9945

Алгоритм решения задачи нахождения матрицы усиления регулятора

Нами обнаружено, что для рассмотренного случая матрица K_P представляет собой матрицу строку следующего вида:

$$K_p = -\frac{b}{R}\left[k_{1,n}\ \ldots\ k_{i,n}\right]. \tag{7}$$

Соответственно алгоритму управления (4) имеет вид:

$$u^* = K_p x^* = -\frac{b}{R}\sum_{i=1}^{n} k_{i,n} x_i^* \tag{8}$$

Число уравнений, в которых участвуют коэффициенты матрицы K, зависит от порядка объекта n и равно:

$$m = \sum_{i=1}^{n} i \tag{9}$$

Например, при $n = 1$, $m = 1$; при $n = 2$, $m = 3$; при $n = 3$, $m = 6$ и т.д.

Нами обнаружено, что если размерность l вектора управления u меньше порядка n объекта управления, то система избыточна. В частности для случая скалярного управления число, достаточное для нахождения коэффициентов матрицы управления, равно:

$$p = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 1 \\ 2(n-1) & \text{при } n > 1 \end{cases} \tag{10}$$

Таким образом, число избыточных уравнений равно:

$$s = m - p \tag{11}$$

При этом в полной и достаточной системах уравнений наблюдается регулярность для объектов вплоть до 4-го порядка.
1) Для полной системы уравнений:

a) уравнений имеют вид:

$$\frac{q_k}{2} - \frac{b^2}{2R}k_{k,n}^2 + k_{k-1,k} - a_{k-1}k_{k,n} = 0 \tag{12}$$

где $k = 1..n$. В случае $k = 1$ уравнение будет иметь вид $\frac{q_1}{2} - \frac{b^2}{2R}k_{1n}^2 - a_0 k_{1n} = 0$, по той причине, что коэффициент $k_{0,1}$ выходит за рамки определений коэффициентов матрицы K_P и равен 0.

b) $n-1$ уравнений имеют вид:

$$-\frac{b^2}{R}k_{1,n}k_{n+1-k,n} + k_{1,n-k} - a_0 k_{n+1-k,n} - a_{n-k}k_{1,n} = 0 \tag{13}$$

где $k = 1..n-1$.

c) $n-2$ уравнений имеют вид:

$$-\frac{b^2}{R}k_{2,n}k_{n+1-k,n}+k_{1,n+1-k}+k_{2,n-k}-a_1k_{n+1-k,n}-a_{n-k}k_{2,n}=0 \qquad (14)$$

где $k = 1..n-2$.

d) $n-3$ уравнений имеют вид:

$$-\frac{b^2}{R}k_{3,n}k_{n+1-k,n}+k_{2,n+1-k,}+k_{3,n-k}-a_2k_{n+1-k,n}-a_{n+1-k,}k_{3,n}=0 \qquad (15)$$

где $k = 1..n-3$.

2) В достаточной системе уравнений, на основе которой определяется матрица усиления регулятора, последние имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{q_k}{2}-\frac{b^2}{2R}k_{k,n}^2+k_{k-1,k}-a_{k-1}k_{k,n}=0 \; k=1..n,\\ -\frac{b^2}{R}k_{1,n}k_{n+1-k,n}+k_{1,n-k}-a_0k_{n+1-k,n}-a_{n-k}k_{1,n}=0 \; k=n-2, \text{ при } n\geq 3,\\ -\frac{b^2}{R}k_{2,n}k_{n+1-k,n}+k_{1,n+1-k}+k_{2,n-k}-a_1k_{n+1-k,n}-a_{n-k}k_{2,n}=0\\ k=1, \text{ при } n=4.\end{gathered} \qquad (16)$$

Экспериментальные исследования теоретических результатов

Экспериментальные исследования теоретических результатов были выполнены путем их компьютерного моделирования в стандартной среде MathCAD 13.

1) В статье приведены результаты экспериментальных исследований для следующего объекта 3-го порядка:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-2&-2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}w(t), \qquad (17)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}x(t)+v(t).$$

при “белых” помехах с интенсивностями $Q_w = 0,3$, $R_v = 0,3$.

2) Рассогласование начальных условий переменных состояния объекта и фильтра – нормальное центрированное распределение с $\sigma_{\varepsilon(0)} = 5$ при выборке $\{\varepsilon_1(0), \ldots, \varepsilon_{100}(0)\}$.

3) Для определения оценки качества управления использованы меры:

$$I_{ui}^{=}\int_0^\infty R(u_i)^2(t)dt,\; I_i^{=}\int_0^\infty \left[(x_i)^TQx_i+R(u_i)^2(t)\right]dt \qquad (18)$$

где i – номер элемента выборки.

4) Для сравнения эффективности калмановского и улучшенного решений задач управления использованы следующие меры:

 ISSN 1562-9945

$$\alpha_u = \frac{\sum\limits_{i=0}^{N} I_{ui}^{K}}{\sum\limits_{i=0}^{N} I_{ui}^{y}}, \tag{19}$$

$$\alpha = \frac{\sum\limits_{i=0}^{N} I_{i}^{K}}{\sum\limits_{i=0}^{N} I_{i}^{y}}, \tag{20}$$

где K – индекс калмановского решения, а y – улучшенного решения.

Коэффициенты матрицы усиления регулятора K для указанного объекта 3-го порядка были найдены по предложенному выше алгоритму и имеют следующие значения:

$$K = \begin{bmatrix} -0.62 & -1.48 & -0.87 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Ниже приводится результаты компьютерного моделирования данной системы с использованием матрицы усиления регулятора K найденной по указанному алгоритму.

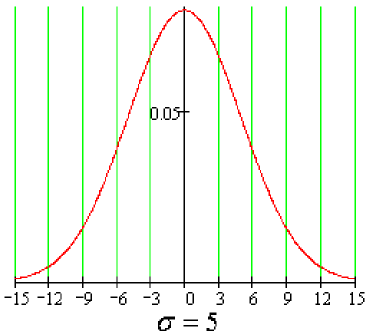

Рис. 1 – Распределение плотности вероятности рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и фильтра, используемый для генерации выборки $\{\varepsilon_1(0), \ldots, \varepsilon_{100}(0)\}$

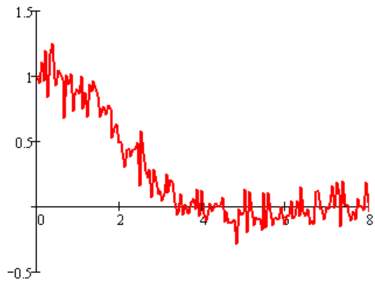

Рис. 2 – Конкретная реализация выходной величины измерителя выхода объекта управления

Результаты экспериментальных исследований убедительно показывает эффективность предложенного варианта решения задачи оптимального управления.

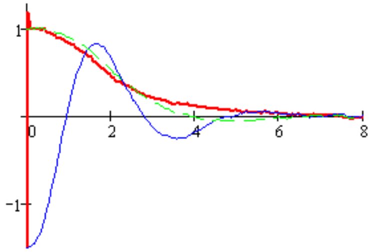

Рис. 3 – Конкретные реализации первой компоненты вектора переменных состояния объекта при отсутствии помех (зеленый пунктир) и управляемых калмановской (синий) и улучшенной (красный жирный) оценок первой переменной состояния объекта при наличии помех

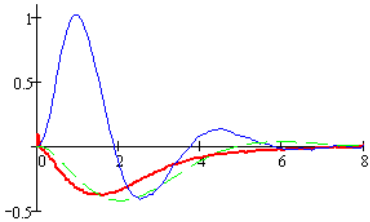

Рис. 4 – Конкретные реализации неуправляемой второй компоненты вектора переменных состояния объекта при отсутствии помех (зеленый пунктир) и управляемых калмановской (синий) и улучшенной (красный жирный) оценок второй переменной состояния объекта при наличии помех

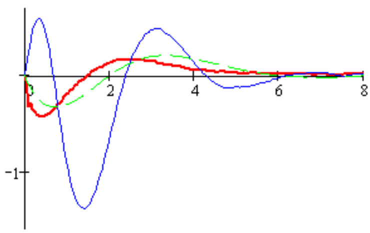

Рис. 5 – Конкретные реализации неуправляемой третьей компоненты вектора переменных состояния объекта при отсутствии помех (зеленый пунктир) и управляемых калмановской (синий) и улучшенной (красный жирный) оценок второй переменной состояния объекта при наличии помех.

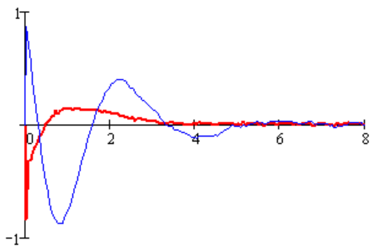

Рис. 6 – Конкретные реализации управления при использовании в регуляторе фильтра Калмана (синий) и улучшенного фильтра для объекта (красный).

 ISSN 1562-9945

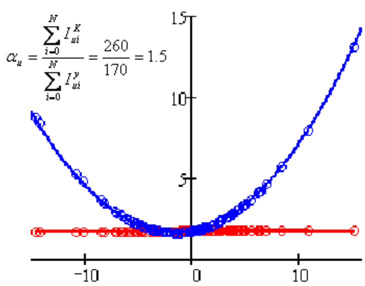

Рис. 7 – Графики критериев качества управления при использовании в регуляторе фильтра Калмана (синий) и улучшенного фильтра (красный) для объекта.

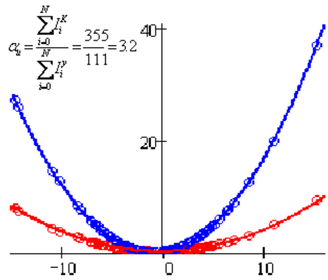

Рис. 8 – Графики критериев качества объекта при использовании фильтра Калмана (синий) и улучшенного фильтра (красный) для объекта.

Выводы

1. Предложенная методика определения коэффициентов матрицы усиления регулятора позволяет упростить процедуру их нахождения.
2. Замена в регуляторе фильтра Калмана разработанным авторами статьи фильтром переменных состояния позволяют значительно улучшить интегральную эффективность решения задачи управления.

Литература

1. Kalman R.E. The theory of Optimal Control and the Calculus of Variations. Mathematical Optimization Techniques // University of California Press, Berkeley – 1963.
2. Кику А.Г., Рева Е.Ю. Компенсация влияния рассогласования начальных условий фильтров переменных состояния // Адаптивные системы автоматического управления.-2006.- 9 (29).С.55-61.
3. Кику А.Г., Рева Е.Ю. Синтез фильтров переменных состояния на основе оценок рассогласования начальных условий // Адаптивные системы автоматического управления.-2007.- 10 (30).С.63-68.

Получено 05.11.2007