УДК 62-50

Л.М. Любчик, М.Н. Малько, Д.Н. Нурмахматов

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ С ДИНАМИЧЕСКИМИ КОМПЕНСАТОРАМИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Введение

Задача компенсации возмущений приобретает особую значимость в связи с необходимостью создания высокоточных систем автоматического управления движущимися объектами и технологическими процессами. Как известно [1], существенного повышения точности управления можно достичь путем использования принципа комбинированного управления, реализуемого на основе разомкнуто-замкнутых структур, включающих в себя компенсаторы возмущений, построенных в виде последовательного соединения обратных и прогнозирующих моделей. Реализация указанного принципа для многомерных систем наталкивается на существенные трудности, связанные с необходимостью обращения многомерной передаточной матрицы объекта управления. В настоящей работе решается задача стохастической оптимизации многомерных комбинированных систем управления с динамическими компенсаторами возмущений, синтезированными на основе реализаций обратных динамических систем в пространстве состояний [2].

Постановка задачи

Задачу синтеза дискретной комбинированной системы управления будем рассматривать применительно к объекту управления вида:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + B_f f_k, \quad y_k = Cx_k, \tag{1}$$

где $x_k \in \mathbf{R}^n$ – вектор состояния объекта на k-том шаге, $u_k \in \mathbf{R}^m$ – вектор управлений, $f_k \in \mathbf{R}^{m_f}$ – вектор измеряемых возмущений, $y_k \in \mathbf{R}^q$ – вектор регулируемых переменных. Будем считать, что выполняются условия обратимости $\mathrm{rank} C = q$, $\mathrm{rank} B = m$, $\mathrm{rank}\,(S) = m \leqslant q$, $S = CB$.

Задача синтеза комбинированной системы состоит в нахождении закона управления u_k в функции измеряемых переменных y_k, f_k, обеспечивающего стабилизацию замкнутой системы и компенсацию влияния возмущений на регулируемые переменные. При этом предполагается, что возмущающее воздействие измеряется с некоторой случайной погрешностью (помехой) $f_k + \xi_k$.

Синтез системы комбинированного управления

Выберем закон комбинированного управления в виде суммы стабилизирующей и компенсирующей компонент управляющего воздействия

 ISSN 1562-9945

$u_k = u_k^s + u_k^c$. Стабилизирующая компонента управления u_k^s принимается в виде $u_k^s = K \cdot e_k^y$, где $e_k^y = y_k^* - y_k$ – ошибка регулирования, y_k^* – задающее воздействие, K – матрица коэффициентов линейной стабилизирующей обратной связи. Выбор этой матрицы может осуществляться известными методами синтеза модального управления по выходу. Для простоты ограничимся рассмотрением случая $y_k^* = 0$.

Компенсирующая компонента управления u_k^c формируется с помощью предложенного в [2] динамического компенсатора, состоящего из регуляризованной обратной [3] и прогнозирующей моделей:

$$\begin{array}{l} \bar{x}_{k+1}^c = \bar{F}\left(\varepsilon, P_2\right) \bar{x}_k^c + R(P_2)\Pi\left(\varepsilon\right) B_f\left(f_k + \xi_k\right), \\ \bar{u}_k^c = -\bar{B}\left(\varepsilon\right)\left[CAQ\bar{x}_k^c + CB_f\left(f_k + \xi_k\right)\right], \end{array} \tag{2}$$

где матрицы компенсатора возмущения $\bar{F}(\varepsilon) = R\Pi(\varepsilon) AQ$, $\bar{H}(\varepsilon) = RBS^+(\varepsilon)$, $\bar{B}(\varepsilon) = B^+(H(\varepsilon) + P\Omega(\varepsilon))$, $\Pi(\varepsilon) = I_n - H(\varepsilon) C$, $\Omega(\varepsilon) = I_q - SS^+(\varepsilon)$ в силу уравнений структурного синтеза компенсатора [4]

$$\begin{pmatrix} C \\ R \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix}_{n-q}^{q}, \; P_1 = I_q, \; Q_1 = 0_{q\times n-q} \tag{3}$$

при произвольной невырожденной матрице Q_2, $\det Q_2 \neq 0$, зависят от настроечных параметров ε, P_2. Здесь матрица $S^+(\varepsilon) = S^T\left(\varepsilon I_q + SS^T\right)^{-1}$ является, фактически, регуляризованным псевдообращением матрицы S, причем $S^+(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = S^{-1}$ и $S^+(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=\infty} = 0$.

Исследуем динамические характеристики разомкнуто-замкнутой комбинированной системы с динамическим компенсатором возмущений. Для этого получим уравнение ошибки регулирования для замкнутой комбинированной системы управления с объектом (1) и синтезированным компенсатором возмущений пониженного порядка (2).

Учитывая соотношения $x_k - Q\bar{x}_k^c = (QR + PC)\, x_k - Q\bar{x}_k^c = Q\bar{\theta}_k - Pe_k$, где $\bar{\theta}_k = Rx_k - \bar{x}_k^c$, получим уравнения динамики ошибки регулирования

$$\begin{array}{l} e_{k+1} = C\left(AP - BK\right) e_k - CAQ\bar{\theta}_k + \Lambda_1(\varepsilon)\,\bar{f}_k - S\bar{B}CB_f\xi_k, \\ \bar{\theta}_{k+1} = R\left(BK - AP\right) e_k + RAQ\bar{\theta}_k + \Lambda_2(\varepsilon)\,\bar{f}_k - R\left(\Pi(\varepsilon) + B\bar{B}C\right) B_f\xi_k, \\ \bar{f}_k = -CB_f f_k + CAQ\bar{x}_k^c, \end{array} \tag{4}$$

где матрицы $\Lambda_1(\varepsilon) = \left(I_q - SB^+P\right)\Omega(\varepsilon)$, $\Lambda_2(\varepsilon) = RBB^+P\Omega(\varepsilon)$. Очевидно, что $\Omega(\varepsilon = 0) = 0$, $S\bar{B}_u(\varepsilon = 0) = I_q$ и $S\bar{B}_u(\varepsilon = \infty) = SB_u^+P$.

Обозначив через $x_k^0 = Q\bar{\theta}_k - Pe_k$ вектор состояния замкнутой системы, представим уравнения (4) в следующей эквивалентной форме:

$$x_{k+1}^0 = (A - BKC)\, x_k^0 + \bar{\Lambda}(\varepsilon)\,\bar{f}_k - \bar{\Gamma}(\varepsilon)\,\xi_k, \quad e_{\overline{k}} - Cx^0, \tag{5}$$

где матрицы $\bar{\Lambda}(\varepsilon, P_2) = \left(I - BB^+\right) P\Omega(\varepsilon)$, $\bar{\Gamma}(\varepsilon) = \left(I_n - \left(I_n - BB^+\right) P\Omega(\varepsilon)\, C\right) B_f$, причем $\bar{\Lambda}(\varepsilon = 0) = 0$, $\bar{\Gamma}(\varepsilon = 0) = B_f$.

Из уравнений (6) следует, что введение в закон управления дополнительной компенсирующей компоненты, сформированной с помощью синтезированного компенсатора возмущений, приводит к эффекту, эквивалентному преобразованию исходного возмущения и помех измерений с помощью некоторых формирующих динамических фильтров. Многомерные передаточные функции, описывающие указанные динамические преобразования, оказываются зависящими от параметров настройки, что делает возможным формализацию задачи параметрического синтеза и оптимизации компенсаторов возмущений по критерию точности регулирования.

Параметрическая оптимизация комбинированной системы

Установим предварительно связь между дискретными Z – преобразованиями сигнала ошибки регулирования $e(z)$ и внешних возмущений $f(z)$ и помех измерений $\xi(z)$:

$$e(z) = G_f\left(z\right)f\left(z\right) + G_\xi\left(z\right)\xi\left(z\right), \tag{6}$$

где дискретные матричные передаточные функции $G_f\left(z\right)$ и $G_\xi\left(z\right)$ равны

$$\begin{aligned} &G_f\left(z\right) = -C\left(zI_n - A + BKC\right)^{-1}\bar{\Lambda}\left(\varepsilon\right)C\left(AQ\left(zI_{n-q} - \bar{F}\right)^{-1}R\Pi - I_n\right)B_f, \\ &G_\xi\left(z\right) = C\left(zI_n - A + BKC\right)\bar{\Gamma}(\varepsilon). \end{aligned} \tag{7}$$

Пусть возмущающее воздействие и помехи измерений описываются моделями дискретных случайных процессов, задаваемых своими спектральными плотностями мощности

$$S_f\left(j\omega\right) = \sigma_f^2\Phi_f\left(e^{j\omega}\right)\Phi_f^T\left(e^{-j\omega}\right),\ S_\xi\left(j\omega\right) = \sigma_\xi^2\Phi_\xi\left(e^{j\omega}\right)\Phi_\xi^T\left(e^{-j\omega}\right), \tag{8}$$

где $\Phi_f\left(e^{j\omega}\right)$ и $\Phi_\xi\left(e^{j\omega}\right)$ – нормированные частотные характеристики соответствующих формирующих фильтров, σ_f^2 и σ_ξ^2 – дисперсии порождающих дискретных белых шумов. Примем в качестве критерия качества компенсации возмущения мощность сигнала ошибки регулирования, определяющую точность управления:

$$\begin{aligned} &J_e = \sigma_f^2\left\|H_f\left(z\right)\right\|^2 + \sigma_\xi^2\left\|H_\xi\left(z\right)\right\|^2, \\ &H_f\left(z\right) = G_f\left(z\right)\Phi_f\left(z\right),\ H_\xi\left(z\right) = G_\xi\left(z\right)\Phi_\xi\left(z\right), \end{aligned} \tag{9}$$

где матричные передаточные функции $G_f\left(z\right)$ и $G_\xi\left(z\right)$ определяются согласно выражениям (6), а $\mathbf{L}_2$ – норма матричных передаточных функций вычисляется с помощью известных выражений:

$$\left\|H\left(z\right)\right\|^2 = \frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{|z|<1}\mathrm{tr}\left[H^T\left(z^{-1}\right)H\left(z\right)\right]\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{tr}\left[H^T\left(e^{-j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)\right]d\omega. \tag{10}$$

Воспользовавшись полученными в [4] оценками качества переходных процессов в динамическом компенсаторе (2), сформулируем задачу его параметрического синтеза из условий получения максимальной точности

 ISSN 1562-9945

компенсации возмущений при ограничениях на длительность $T_{\Pi}(\varepsilon) \leqslant T_{\Pi}^{*}$ и колебательность $\sigma(\varepsilon) \leqslant \sigma^{*}$:

$$\begin{array}{l} J_e(\varepsilon, P_2) \to \min,\ T_{\Pi}(\varepsilon, P_2) \leqslant T^{*},\ \sigma(\varepsilon, P_2) \leqslant \sigma^{*}, \\ T_{\Pi}(\varepsilon) \leqslant \left(\ln\left(\lambda^{-1}(\varepsilon)\right)\right)^{-1} \ln\left(\Delta^{-1}\right),\ \sigma(\varepsilon) \leqslant \frac{\beta-1}{\beta+1},\ \beta = \lambda_1(\varepsilon)\left(1 - \lambda(\varepsilon)\right), \end{array} \tag{11}$$

где $\lambda_1(\varepsilon) = \left\|\bar{F}(\varepsilon) - I_{n-m}\right\|_2$, Δ – заданный уровень, определяющий условия окончания переходного процесса.

При вычислительной реализации предложенной процедуры параметрического синтеза наиболее трудоемким этапом является вычисление показателя качества J_e. Используя известные методы анализа дискретных стохастических систем в пространстве состояний, можно существенно упростить вычисления. Для простоты ограничимся рассмотрением ситуации, когда возмущающее воздействие и помехи измерений описываются моделями независимых дискретных случайных процессов с нулевыми средними $\mathbf{M}\{f_k\} = 0$, $\mathbf{M}\{\xi_k\} = 0$, и заданными ковариационными матрицами $\mathbf{M}\left\{f_k f_k^T\right\} = P_f$, $\mathbf{M}\left\{\xi_k \xi_k^T\right\} = P_\xi$.

В установившемся режиме при выполнении условий устойчивости замкнутой системы и динамического компенсатора, ковариационные матрицы их векторов состояния определяются как решения дискретных матричных уравнений Ляпунова:

$$\begin{array}{l} P_{x^0} = (A - BKC)\, P_{x^0}\, (A - BKC)^T + \bar{\Lambda} P_{\bar{f}} \bar{\Lambda}^T + \bar{\Gamma} P_\xi \bar{\Gamma}^T, \\ P_{\bar{x}^c} = \bar{F} P_{\bar{x}^c} \bar{F}^T + R \Pi B_f \left(P_f + P_\xi\right) B_f^T \Pi^T R^T, \end{array} \tag{12}$$

где $P_{\bar{f}} = C B_f P_f B_f^T C^T + CAQ P_{\bar{x}^c} Q^T A^T C^T$. Тогда среднеквадратическая ошибка регулирования определяется как $\sigma_e^2 = \mathrm{tr}\left(C P_{x^0} C^T\right)$.

Ограничившись лишь требованием внутренней устойчивости динамического компенсатора и воспользовавшись известным свойством матричных норм $\left\|\bar{F}\right\|_2 \leqslant \left\|\bar{F}\right\|_{\Phi}$, где $\left\|\bar{F}\right\|_{\Phi} = \left(\mathrm{tr}\left(\bar{F}^T \bar{F}\right)\right)^{1/2} = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n-q} \left|\bar{F}_{ij}\right|^2\right)^{1/2}$ – фробениусова матричная норма, сформулируем упрощенную постановку задачи параметрического синтеза:

$$\sigma_e^2(\varepsilon, P_2) \to \min,\ \left\|\bar{F}(\varepsilon, P_2)\right\|_{\Phi} \leqslant \lambda^{*} < 1. \tag{13}$$

Очевидно, что полученная модификация исходной задачи в виде (13) является задачей квадратичного программирования относительно элементов матрицы P_2, что значительно упрощает процедуру синтеза.

Выводы

В результате проведенного анализа можно сделать вывод о том, что существует предельно достижимая точность компенсации возмущений, зависящая как от характеристик объекта, так и от выбранных настроечных параметров, обеспечивающих требуемые динамические характеристики компенсатора. Полученные соотношения позволяют количественно оценить максимально достижимую точность компенсации возмущений при выбранных значениях настроечных параметров. Это, в свою очередь, позволяет формализовать постановку задачи параметрического синтеза на основе компромисса между противоречивыми требованиями точности и качества комбинированных систем и тем самым обеспечить реализацию конструктивного подхода к формированию инженерной методики синтеза многомерных динамических компенсаторов и оценке на этапе проектирования предельно достижимой степени компенсации возмущений.

Литература

1. Макаров И.М., Менский Б.М. Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал). - М.: Машиностроение, 1982. - 504 с.
2. Костенко Ю.Т., Любчик Л.М. Системы управления с динамическими моделями. - Харьков: Основа, 1996. - 212 с.
3. Любчик Л.М., Малько М.Н. Структурный синтез регуляризованных обратных систем пониженного порядка // Системний аналіз, управління і інформаційні технології: Вісник Харківського державного політехнічного університету - Випуск 72. - Харків: ХДПУ, 1999. - С. 165 -168.
4. Любчик Л.М. Метод обратных динамических моделей в задачах синтеза многомерных комбинированных систем с наблюдателями возмущений // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. - 5 (24). - 2007.- С. 77 - 83.

Получено 14.11.2007