УДК 519.5:681:513
А.А. Павлов, А.С. Штанькевич, А.А. Иванова, М.И. Логинов, В.И. Кут

СИСТЕМА МОДЕЛИРОВАНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МЕТОДОВ НАХОЖДЕНИЯ ВЕСОВ ОБЪЕКТОВ В ЗАДАЧЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА ПО МАТРИЦАМ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

Введение

В [1] и [2] были приведены и обоснованны модели линейной оптимизации для нахождения весов ω_i объектов по несогласованным матрицам парных сравнений:

Модель 1.

$$\min \sum_{(ij)\in|A|}\sum \left(y_{ij}^{+} + y_{ij}^{-}\right) \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \underset{(i,j)\in|A|}{\omega_i - \gamma_{ij}\omega_j} = y_{ij}^{+} + y_{ij}^{-}, \quad y_{ij}^{+} \geqslant 0,\ y_{ij}^{-} \geqslant 0 \\ a \leqslant \omega_i, \quad i = \overline{1,n}, \end{gathered} \tag{2}$$

где a – заданное положительное число, $a \geqslant 1, \omega_i, y_{ij}^{+}, y_{ij}^{-}$-переменные задачи линейного программирования.

Модель 2.

$$\min \sum_{(ij)\in|A|}\sum y_{ij} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} -y_{ij} \leqslant \underset{(i,j)\in|A|}{\omega_i - \gamma_{ij}\omega_j} \leqslant y_{ij}, \quad y_{ij} \geqslant 0 \\ a \leqslant \omega_i, \quad i = \overline{1,n}, \end{gathered} \tag{4}$$

где a – заданное положительное число, $a \geqslant 1, \omega_i, y_{ij}$ – переменные задачи линейного программирования.

Модель 3.

$$\min y \tag{5}$$

$$\begin{gathered} -y \leqslant \underset{(i,j)\in|A|}{\omega_i - \gamma_{ij}\omega_j} \leqslant y, \\ a \leqslant \omega_i, \quad i = \overline{1,n}, \quad y \geqslant 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где a – заданное положительное число, $a \geqslant 1, \omega_i, y$ – переменные задачи линейного программирования.

 ISSN 1562-9945

Модель 4.

Вначале решается задача линейного программирования (5) – (6). Оптимальное значение переменной y обозначим y^0. После этого решается следующая задача:

$$\min \sum_{(ij)\in|A|}\sum \left(y_{ij}^{+} + y_{ij}^{-}\right) \tag{7}$$

$$\begin{array}{l} \underset{(i,j)\in|A|}{\omega_i - \gamma_{ij}\omega_j} = y_{ij}^{+} + y_{ij}^{-}, \quad y_{ij}^{+} \geqslant 0,\ y_{ij}^{-} \geqslant 0 \\ -y^0 \leqslant \underset{(i,j)\in|A|}{\omega_i - \gamma_{ij}\omega_j} \leqslant y^0, \quad \forall(i,j)\in|A| \\ a \leqslant \omega_i, \quad i=\overline{1,n}, \end{array} \tag{8}$$

где a – заданное положительное число, $a \geqslant 1, \omega_i, y_{ij}^{+}, y_{ij}^{-}$ – переменные задачи линейного программирования.

Модель 5.

$$\min \sum_{(ij)\in|A|}\sum \left(y_{ij}^{+} + y_{ij}^{-}\right) \tag{9}$$

$$\begin{array}{l} -t_{\partial on}\gamma_{ij}\omega_j \leqslant \underset{(i,j)\in|A|}{\omega_i - \gamma_{ij}\omega_j} \leqslant t_{\partial on}\gamma_{ij}\omega_j \\ \underset{(i,j)\in|A|}{\omega_i - \gamma_{ij}\omega_j} = y_{ij}^{+} + y_{ij}^{-}, \quad y_{ij}^{+} \geqslant 0,\ y_{ij}^{-} \geqslant 0 \\ a \leqslant \omega_i, \quad i=\overline{1,n}, \end{array} \tag{10}$$

где a – заданное положительное число, $a \geqslant 1$, $t_{\partial on}$ – заданное пороговое число, $\omega_i, y_{ij}^{+}, y_{ij}^{-}$ – переменные задачи линейного программирования.

Задача (9) – (10) может не иметь решения, потому что ограничения могут быть несовместимыми. В этом случае можно либо увеличить значение $t_{\partial on}$, либо применить модель 4.

Модель 6.

Представляет собой последовательность задач:

$$\min_{\substack{\Delta_{ij}^1,\Delta_{ij}^2 \\ \forall(ij)\in|A|}} \Big(\sum_{(ij)\in|A|}\sum \Delta_{ij}^1 - C_{lm}\sum_{(ij)\in|A|}\sum \Delta_{ij}^2 \Big) \tag{11}$$

$$\begin{array}{l} \ln\gamma_{ij} + \Delta_{ij}^2 \leqslant W_i - W_j \leqslant \ln\gamma_{ij} + \Delta_{ij}^1 \\ 0 \leqslant \Delta_{ij}^1 \leqslant \ln(1 + l\Delta_1(l)); \quad 0 \geqslant \Delta_{ij}^2 \geqslant \ln(1 - m\Delta_2(m)) \\ W_i \geqslant 0, \quad i=\overline{1,n}, \end{array} \tag{12}$$

где $W_i, \Delta_{ij}^1, \Delta_{ij}^2$ – переменные задачи линейного программирования; l, m – натуральные числа, последовательно принимающие значения 11, 12, 21, 22 и т. д.; $\Delta_1(x), \Delta_2(x)$ – заданные числовые скалярные функции натурального аргумента, принимающие неотрицательные значения; C_{lm} – коэффициент, который находится из соотношения:

$$\ln(1 + l\Delta_1(l)) = C_{lm}\ln\frac{1}{1 - m\Delta_2(m)}, \tag{13}$$

Веса ω_i находятся из соотношения $\omega_i = e^{W_i}$.

Были предложены критерии оценки полученного результата:

1. Мера $d = \left|\frac{\omega}{|\omega|} - \frac{\omega^*}{|\omega^*|}\right|$, где $|\omega| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i^2}$.

   Эта мера используется для оценки степени отклонения найденных весов ω_i^* от эталонных весов ω_i в случае, когда последние известны исследователю (например, в режиме отладки или исследования модели). Для двух наборов найденных весов при одинаковых входных данных лучшим считается тот набор, для которого d принимает меньшее значение.

2. Коэффициенты согласованности найденных весов объектов

$$K(\omega_i^*) = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{\left|\omega_i^* - \gamma_{ij}\omega_j^*\right|}{\gamma_{ij}\omega_j^*}.$$

$K(\omega_i^*)$ должны принадлежать заданному допустимому интервалу согласованности. В противном случае соответствующий весовой коэффициент ω_i^* считается недостоверным ($\omega_i^* = 0$). Критерием оценки полученного набора весов может быть $M_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} K(\omega_i^*)$ либо $M_2 = \max\limits_{i,\ i=\overline{1,n}} K(\omega_i^*)$, при этом лучшим считается тот набор, для которого M_1 (либо M_2) принимает меньшее значение.

Для проверки эффективности предложенных моделей разработана система моделирования, программно реализованная в современной универсальной среде для математических расчетов и программирования MATLAB. Процедура тестирования моделей включает в себя ряд этапов:

1. генерация входных данных в соответствии с особенностями исследуемой модели и информацией, предоставляемой исследователем;
2. запуск (прогон) модели с использованием полученных входных данных;
3. анализ результата работы модели, согласно которому делается вывод об эффективности модели и о необходимости изменения условий проверки модели (корректировка входных данных, изменение режима прогона модели, критериев оценки результата).

Система представляет собой комплекс программных модулей в виде М-функций MATLAB. Исходя из методологии тестирования, согласно своему предназначению каждый модуль может относиться к одной из следующих групп:

1. модули генерации входных данных моделей;
2. расчетные модули моделей;
3. модули проверки и анализа полученного результата.

 ISSN 1562-9945

Генерация входных данных

Общими входными данными моделей 1–6 является несогласованная (либо слабо согласованная) матрица парных сравнений альтернатив. Эта матрица формируется из согласованной путем вероятностного отклонения значений её элементов (зашумления). Для получения согласованной матрицы парных сравнений веса объектов генерируются по группам: значения весов в пределах одной группы имеют близкие значения, что соответствует приблизительно равноценным альтернативам. Очевидно, что при таком подходе реверс рангов альтернатив будет фиксироваться только при переходе веса объекта из одной группы в другую.

Подпрограмма генерации входных данных моделей принимает на входе от исследователя следующие параметры:

1. количество рассматриваемых альтернатив (объектов);
2. нижняя граница значений весов объектов;
3. параметры распределения количества элементов в каждой группе альтернатив;
4. шаговое весовое расстояние между соседними группами объектов (задается случайным образом по заданному исследователем распределению);
5. параметры распределения весов объектов внутри каждой группы;
6. параметры зашумления матрицы парных сравнений (границы зашумления, вид и параметры его вероятностного распределения).

Алгоритм генерации весов можно представить в виде блок-схемы (рис. 1):

Зашумление матрицы парных сравнений выполняется с учетом величины значений элементов. Элементы зашумленной матрицы находятся из соотношения:

$$\gamma_{ij}^{*} = \gamma_{ij} + k_{ij}\gamma_{ij}, \tag{14}$$

где k_{ij} – случайный коэффициент, полученный согласно заданному исследователем распределению. В общем случае k_{ij} может принимать значения в интервале (-1;1), однако с практической точки зрения не рассматриваются случаи, когда k_{ij} превышает по модулю 0,5, поскольку большая степень зашумления на практике свидетельствует о полной недостоверности данных, полученных от экспертов.

В программной реализации системы k_{ij} может принимать значение, имеющее:

1. равномерное распределение на интервале $(-t, t)$, где $0 \leqslant t \leqslant 0.5$;
2. равномерное распределение на интервале (t_1, t_2), где $-0.5 \leqslant t_1 \leqslant 0$, $0 \leqslant t_2 \leqslant 0.5$и $t_1 \neq t_2$;
3. нормальное распределение, дисперсия σ^2, мат. ожидание равно нулю;

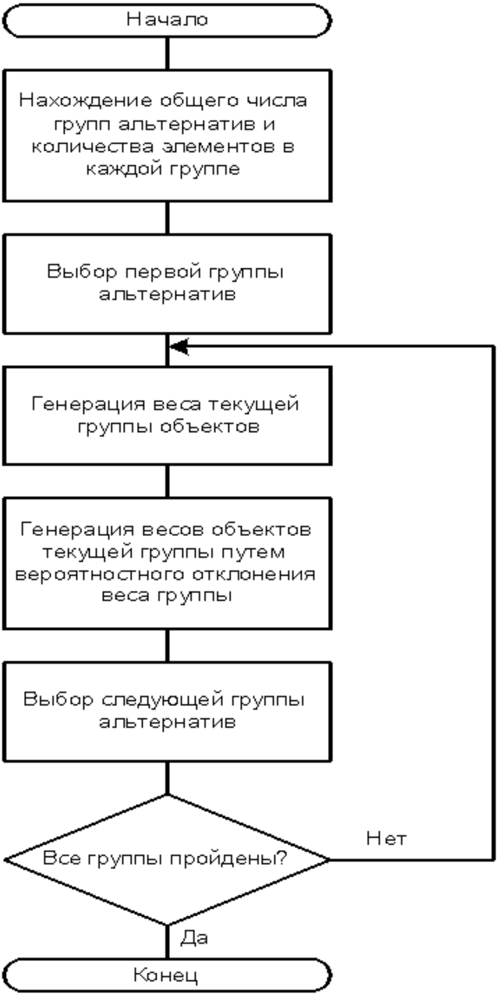

Рис. 1 – Блок-схема алгоритма генерации эталонных весов

 ISSN 1562-9945

4. нормальное распределение, дисперсия σ^2, мат. ожидание смещено вправо;
5. нормальное распределение, дисперсия σ^2, мат. ожидание смещено влево.

В процессе исследования конкретной модели параметры генерации входных данных варьируются в связи с особенностями реализации модели.

Прогон моделей

Задачи линейного программирования моделей 1-6 решаются встроенными средствами пакета MATLAB, в основе которых лежит симплекс-метод. Перед началом процесса линейной оптимизации формируется матрица ограничений и вектор-столбец целевой функции согласно тестируемой модели. Полученные данные в унифицированной форме передаются встроенной подпрограмме linprog пакета MATLAB для решения задачи линейного программирования.

Процесс прогона моделей 1-3 включает в себя одиночный вызов подпрограммы linprog для одного набора входных данных. Модель 4 вызывает эту подпрограмму дважды – вначале для решения задачи оптимизации модели 3 и получения значения y^0, а потом для решения модели 4.

В реализации модели 5 функция linprog может вызываться многократно, при этом изменяется параметр $t_{доп}$ с заданным исследователем шагом от заданного начального значения до тех пор, пока не будет получен оптимум задачи линейного программирования либо пока не будет превышен предел числа вызововов.

Модель 6 реализована аналогично модели 5. Подпрограмма linprog вызывается до тех пор, пока не будет найден оптимум задачи линейного программирования. При каждом вызове изменяются значения $l\Delta_1(l)$ и $m\Delta_2(m)$. Они могут быть явно заданы исследователем в виде возрастающих последовательностей неотрицательных значений (в области допустимых значений) или вычисляться, используя переданные ссылки на функции исследователя $\Delta_1(x), \Delta_2(x)$, реализуемые в отдельных подключаемых модулях.

Анализ результата прогона модели

Модели 1-6 в процессе тестирования на одинаковых входных данных дают разный результат. В модуле анализа результата вычисляются значения меры d, а также значения критериев M_1 и M_2. Полученные значения записываются в пользовательский файл отчета работы системы. В этом модуле также ведется проверка на наличие реверса рангов среди найденных весов альтернатив. Наличие реверса также фиксируется в файле отчета.

Проведение эксперимента

В общем случае схема эксперимента в системе является следующей:

1. исследователь выбирает модели для эксперимента и задает "особенные" параметры каждой модели (установки параметра $t_{доп}$ для модели 5 и $\Delta_1(x), \Delta_2(x)$ для модели 6);
2. задается начальное и конечное значение количества альтернатив, шаг увеличения этого значения по итерациям;
3. исследователь задает начальные параметры зашумления матрицы парных сравнений (например, в случае равномерного распределения коэффициента k_{ij}, может быть задано начальное значение параметра $t = t_{\min}$), а также параметры нарастания степени зашумления (например, $\Delta(t)$ для равномерного распределения k_{ij}, тогда, если имеем $t = t'$ на текущей итерации, то на следующей итерации $t'' = t' + \Delta(t')$ и $k_{ij} \in (-t''; t'')$) и верхнюю границу зашумления (например, $t = t_{\max}$ для равномерного распределения k_{ij});
4. задается количество итераций выбранных моделей с одинаковыми установками генерации входных данных для более точной оценки результата работы;
5. исследователь задает гранично-допустимые значения меры d и значений критериев M_1 и M_2;
6. эксперимент выполняется, количество альтернатив n возрастает, для каждого фиксированного n генерируются матрицы с нарастанием степени зашумления;
7. если на некоторой итерации в результате работы какой-то из моделей превышаются заданные граничные значения d, M_1, M_2, то для текущего n модель далее не проверяется на матрицах с большей степенью зашумления;
8. модели проверены на всех наборах входных данных, результаты записываются в файл отчета.

Приведенная схема позволяет комплексно оценить эффективность каждой модели при разных вариациях входных данных.

Проведенные эксперименты показали, что в результате анализа большого количества объектов (альтернатив) даже при большой степени зашумления матрицы парных сравнений (при большой степени ошибок экспертов) веса, полученные с помощью анализируемых моделей, являются точными. По критериям M_1 и M_2 лучшие результаты показала модель 6. Наименьшие значения меры d были получены в результате работы моделей 5, 6, а также модели 4. Реверс рангов фиксировался только в модели 3 при большой степени зашумления – при $|k_{ij}| > 0.3$.

Заключение

Предложена и обоснована методология моделирования оптимизационных методов нахождения весов объектов в задаче многокритериального выбора по матрицам парных сравнений. Описана программная реализация системы моделирования. Описаны результаты исследования предложенных моделей. В дальнейшем эти модели могут использоваться

 ISSN 1562-9945

для разработки новых методов принятия решений, в частности основанных на методе группового учета аргументов и методе анализа иерархий [4,6].

Литература

1. Павлов А.А., Лищук Е.И., Кут В.И. Математические модели оптимизации для обоснования и нахождения весов в методе парных сравнений. Системні дослідження та інформаційні технології 2007р. 2.
2. Павлов А.А, Лищук Е.И., Кут В.И. Многокритериальный выбор в задаче обработки данных матрицы парных сравнений. Вісник НТУУ „КПІ” Інформатика, управління та обчислювальна техніка, Київ 2007р. 46.
3. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Анализ, синтез, планирование решений в экономике. – Москва: Финансы и статистика. – 2001.
4. Ивахненко А.Г., Мюллер И.А. Самоорганизация прогнозирующих моделей. Киев. Техника 1985г.
5. Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. - Киев: Наукова думка. – 2002. - 381 с.
6. Saaty T.L. Multycriteric Decision Making. The Analytic Hierarchy Process, McGraw Hill International. – New York, 1980. Translated to Russian, Portuguese, and Chinese. Revised edition, Paperback. - Pittsburgh, PA: RWS Publications, 1990,1996.

Получено 27.04.2008