УДК 621.924.229.86

Е.Ю. Рева

УЛУЧШЕНИЕ ВИНЕРОВСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТОВ ОБЩЕГО ВИДА

В работах авторов [2] и [3] доказано, что для улучшения качества фильтрации переменных в постановку задачи фильтрации необходимо ввести учёт влияния рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и фильтра на качество оценок переменных состояния. Отсутствие указанного мероприятия в калмановской постановке задачи фильтрации привело к тому, что фильтр Калмана в общем случае не оптимален.

Авторы показали, что введение в постановку задачи фильтрации влияния рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и фильтра позволит синтезировать более эффективные, чем калмановские фильтры даже на основе винеровского подхода фильтрации. Подобные фильтры были синтезированы для объектов обычного вида. В данной статье рассматривается синтез таких фильтров для объектов общего вида.

В данной статье под объектами общего вида понимаются объекты, векторно-матричная модель которых имеет вид:

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot y(t) \\ \dot{y}(t) = C \cdot x(t) + D \cdot y(t) \end{array}, \qquad (1)$$

где $x(t)$,$u(t)$,$y(t)$ - вектора переменных состояния, входной и выходной величины соответственно. В объектах обычного вида матрица обхода в (1) отсутствует.

Постановка задачи синтеза улучшенных фильтров переменных состояния

Как было указано, для улучшения качества фильтрации в постановку задачи оценок переменных состояния необходимо ввести учёт влияния рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и фильтра. Такая постановка задачи может быть сформулирована следующим образом:

$$\dot{x^*} = \arg\left\{ \frac{\min}{\hat{x}}[\sigma^2_{\varepsilon(0)} + tr\,P_\varepsilon] \left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)w(t); \\ y(t) = C(t) + D(t)u(t) + v(t); \\ M\hat{x} = Mx(t),\ Mw(t) = 0,\ Mv(t) = 0; \\ Cov[w(t), w(\tau)] = Q_w\delta(t-\tau), \\ Cov[v(t), v(\tau)] = R_v\delta(t-\tau); \\ Cov[w(t), v(\tau)] = 0, \\ Cov[\hat{x}(0), \hat{x}(0)] = P(0); \\ \text{Процедура фильтрации:линейная;} \end{array} \right.\right\}, \qquad (2)$$

где $\dot{x}^*$ – оптимальная оценка переменных состояния, $tr\,P_\varepsilon(t)$ – след ковариационной матрицы $P_\varepsilon(t)$ ошибки $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, $\sigma^2_{\varepsilon(0)}$ – дисперсия оценок, обусловленная рассогласованием начальных условий $\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0)$, δ – функция Дирака, L, K, B – матрицы состояния, усиления и входа улучшенного фильтра соответственно. Последнее выражение в наборе ограничений задачи (1) выражает требование линейности процедуры фильтрации переменных состояния.

При “небелых” шумах $w(t)$,$v(t)$ в постановку задачи должны быть внесены соответствующие операторы “отбеливания”.

Алгоритм решения задачи синтеза улучшенного фильтра переменных состояния

Процедура синтеза фильтров состоит из двух этапов:

1. выбор структуры фильтра Винера;
2. определение параметров фильтра Винера;
3. внедрение в фильтр Винера блока учёта влияния рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и фильтра.

Структура фильтра Винера определяется на основе структуры фильтра Калмана. Последнее определяется с учётом требования линейности процедуры фильтрации и имеет следующий вид

$$\dot{\hat{x}}(t) = L\hat{x}(t) + Ky(t) + B_k u(t), \tag{3}$$

где $L, K, B_ф$ – соответственно матрицы состояния, входа по выходу $y(t)$ и по управлению $u(t)$.

Матрицы L, $B_ф$ определяются из условия несмещённости, которое имеет вид:

$$M[\varepsilon(t)] = M[x(t) - \hat{x}(t)] = 0, \tag{4}$$

который приводиться к виду

$$\begin{array}{c} M[\dot{\varepsilon}(t)] = M[(Ax + Bu + Gw) - (L\hat{x} + Ky + B_ф u)] = M[(Ax + Bu + Gw) - \\ -K(Cx + Du + v) - L\hat{x} - B_ф u] = (A - L - KC)x + (B - B_ф - KD)u = 0 \end{array}. \tag{5}$$

Так как это выражение должно удовлетворяться при любых x и u, то отсюда следует, что

$$A - L - KC = 0,\ B - B_ф - KD = 0. \tag{6}$$

Отсюда следует, что матрицы $L, B_ф$ равны соответственно

$$L = A - KC,\ B_ф = B - KD. \tag{7}$$

Отсюда видно, что для определения этих матриц необходимо определить матрицу K (отметим, что для объектов обычного вида матрица $B_ф$ определяется сразу и равна B).

 ISSN 1562-9945

Матрица K определяется из условия эффективности оценки $\hat{x}$, и имеет следующий вид:

$$K = PC^T R_v^{-1}, \tag{8}$$

где для фильтра Винера ковариационная матрица P определяется на основе алгебраического уравнения Риккати фильтра

$$(A - KC)P + P(A - RC)^T + GQG^T + KR_vK = 0, \tag{9}$$

полученного из дифференциального уравнения Риккати фильтра Калмана

$$\dot{P} = (A - KC)P + P(A - RC)^T + GQG^T + KR_vK \tag{10}$$

Как видно, дифференциальное уравнение Риккати для объектов общего вида совпадает с дифференциальным уравнением для объектов обычного вида. Отсюда следует, что алгебраические уравнения фильтров Винера для объектов общего и обычного видов также будут совпадать.

Из полученного результата можно сделать вывод о том, что матрицы K фильтров объекта обычного вида и общего вида будут совпадать. Таким образом, фильтры Винера объектов общего вида будут отличаться от фильтров Винера объектов обычного вида матрицами $B_ф$, а именно для объектов обычного вида матрица $B_ф = B$, а для объектов общего вида

$$B_ф = B - KD \tag{11}$$

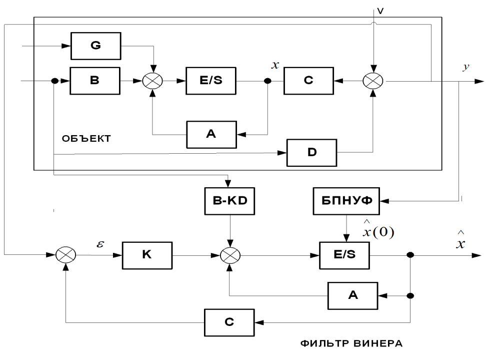

Рис. 1 – Структурная схема улучшенной винеровской фильтрации

Экспериментальные исследования теоретических результатов

Ниже приводятся экспериментальные исследования эффективности предложенного фильтра переменных состояния.

Экспериментальные исследования были выполнены для объекта второго порядка, описываемого векторно-матричной моделью

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + 1 \cdot u + v \end{aligned} \tag{12}$$

при $u = 1$, "белых" помехах с интенсивностями $Q_w = 2$, $R_v = 2$ и начальных условиях переменных состояния объекта и фильтра, равными соответственно $x_1(0) = -2$, $\hat{x}_1(0) = 2$, $\hat{x}_2(0) = 2$, $x_3(0) = 1$, $\hat{x}_3(0) = 1$.

Результаты полученных исследований приведены на рис. 2-6. Разрывными линиями указаны переменные состояния, обычными – калмановские оценки, жирными – оценки, полученные предложенными фильтрами.

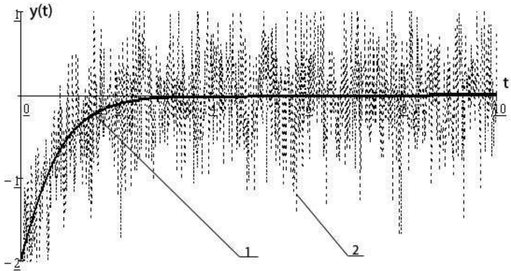

Рис. 2 – Выходная величина объекта (1 – выходная величина без помех; выходная величина с помехами)

В качестве критерия эффективности фильтрации использована усреднённая сумма квадратов отклонений переменных состояний от их оценок. Интервал усреднения был выбран с учетом ширины существенного значения переходных процессов в объекте и в фильтре, так как в дальнейшем фильтры Калмана вырождаются в обычные фильтры Винера.

В качестве критерия эффективности оценок, полученных предложенным фильтром $Q1Y, Q2Y$ по отношению к калмановским оценкам $Q1K, Q2Y$, использованы их отношения $\frac{QK}{QY}$.

Названные критерии эффективности имеют следующие значения

$$Q1K = 8.519, Q1Y = 0.297, \frac{Q1K}{Q1Y} = 28.669, Q1YY = 0.207, \frac{Q1K}{Q1YY} = 41.171$$
$$Q2K = 3.559, Q2Y = 0.092, \frac{Q2K}{Q2Y} = 38.643, Q2YY = 0.043, \frac{Q2K}{Q2YY} = 82.72$$

 ISSN 1562-9945

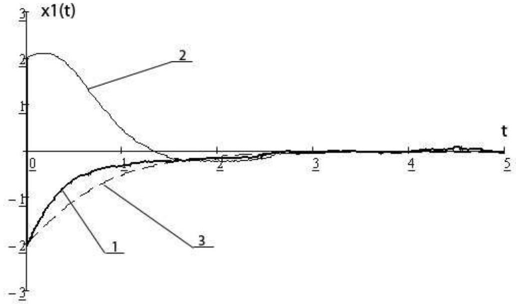

Рис. 3 – Графики первой переменной состояния и её оценок (1 – первая переменная состояния объекта, 2 - калмановская оценка, 3 - улучшенная оценка без “усреднения”).

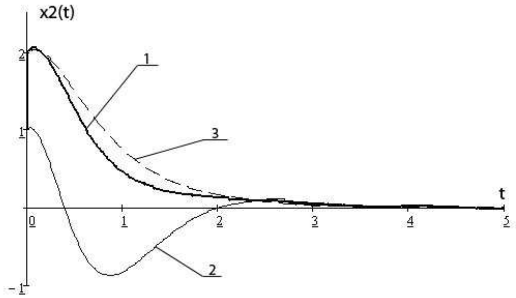

Рис. 4 – Графики второй переменной состояния и её оценок (1 – вторая переменная состояния объекта, 2 - калмановская оценка, 3 - улучшенная оценка без “усреднения”).

Выводы

На основе полученных результатов могут быть сделаны следующие убедительные выводы:

1. Предложенный подход позволяет на базе винеровской постановки задачи фильтрации и учёта влияния рассогласования начальных условий на качество оценок фильтрации объекта общего вида получить интегрально более эффективные фильтры, чем стандартные фильтры Калмана.
2. Ковариационные матрицы фильтров Винера объектов обычного и общего видов совпадают.
3. Фильтры переменных состояния объектов общего вида, синтезированные на базе предложенного подхода, отличаются от фильтров

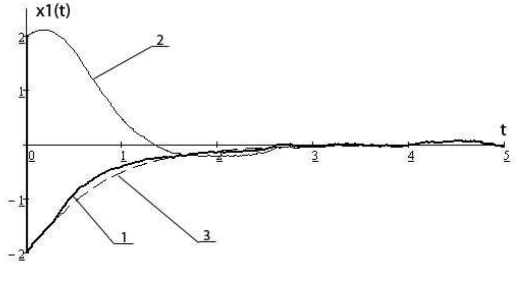

Рис. 5 – Графики первой переменной состояния и её оценок (1 – первая переменная состояния объекта, 2 - калмановская оценка, 3 - улучшенная оценка с “усреднением”).

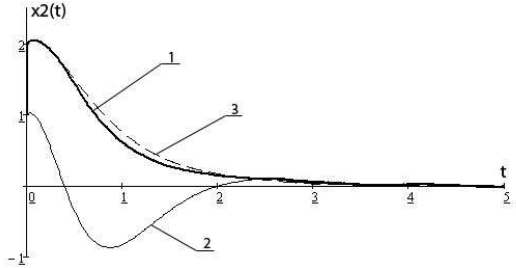

Рис. 6 – Графики второй переменной состояния и её оценок (1 – вторая переменная состояния объекта, 2 - калмановская оценка, 3 - улучшенная оценка с “усреднением”).

переменных состояния объектов обычного вида наличием в составе первых матрицы обхода объекта.

Литература

1. Kalman R.E. The theory of Optimal Control and the Calculus of Variations. Mathematical Optimization Techniques // University of California Press , Berkeley – 1963.
2. Кику А.Г., Рева Е.Ю. Синтез фильтров переменных состояния на основе оценок рассогласования начальных условий // Адаптивные системы автоматического управления. – 2007 - 10(30).
3. Кику А.Г, Рева Е.Ю. Компенсация влияния рассогласования начальных условий фильтров переменных состояния. // Адаптивные системы автоматического управления. – 2006. – 9 (29).

Отримано 11.03.2009 р.