УДК 519.5:681:513

А.А. Павлов, А.А. Иванова, А.С. Штанькевич

ИНВЕРСНЫЙ МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ МЕТОДА ГРУППОВОГО УЧЕТА АРГУМЕНТОВ И АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ В ЗАДАЧЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Введение

Рассмотрим следующую задачу принятия решений. Глобальная цель имеет качественное описание и не формализована. Имеется набор альтернатив $A_1 \ldots A_m$. Нужно найти наилучшую альтернативу с точки зрения глобальной цели. Для подобных задач обычно используется метод анализа иерархий Саати [1–4]. В [5–7] сформулированы и обоснованы модели оптимизации, существенно расширяющие возможности метода анализа иерархий Саати, что позволило сформулировать и предложить решение задачи построения функции, аппроксимирующей качественно заданную глобальную цель.

Предложенный в [8] метод решения этой задачи органично объединил в единое целое метод группового учета аргументов (МГУА) [9–10] и метод анализа иерархий (МАИ) Саати.

Постановка задачи

В данной статье принцип внешнего дополнения в МГУА (обучающая и проверочная последовательности) предлагается реализовать принципиально иным способом. При этом в отличие от классического МГУА (построение искомой модели идет по нарастанию её сложности) в предлагаемом методе построение искомой модели идет от избыточно сложной модели к модели минимально необходимой сложности. В [8] была сформулирована следующая задача.

1) Имеется множество альтернатив $A_{s_1}, \ldots A_{s_p}$ из множества заданных альтернатив $A_1, \ldots A_m$, для которых с помощью метода анализа иерархий построены оценки $f\left(A_{s_j}\right) = f\left(\overline{x}^{s_j}\right)$, $j = \overline{1,p}$, где n – мерный вектор $\overline{x}^{s_j}$ представляет альтернативу A_{s_j}, $f\left(\overline{x}\right)$ – неизвестная числовая скалярная функция векторного аргумента $\overline{x}$, формализующая глобальную цель, (формулировка которой в общем случае носит качественный характер).

2) Имеется множество парных предпочтений $G\left(A_i \text{не хуже} A_j\right), (i,j) \in I, i,j \in \left\{\overline{1,m}\right\}$.

Каждую пару эксперт (эксперты) задают тогда, когда он уверен, что с точки зрения глобальной цели альтернатива A_i не хуже альтернативы A_j. Очевидно, что парные предпочтения не должны нарушать условия транзитивности, (в противном случае глобальная цель не представляется непрерывной функцией векторного аргумента $\overline{x}$). Необходимо по этим данным построить наилучшую (по введенному и обоснованному критерию) функцию $f\left(\overline{x}\right)$, формализующую глобальную цель.

Пусть имеют место следующие посылки, основанные на экспертном анализе структуры искомой функции $f\left(\overline{x}\right)$:

1. $f\left(\overline{x}\right)$ является взвешенной суммой известных составляющих, каждая из которых отражает вклад вектора $\overline{x}$, либо множества компонент (учёт взаимного влияния компонент друг на друга) в глобальную цель. Веса каждой из компонент являются неизвестными.

2. Известные компоненты принадлежат одному из следующих классов:

1) $\sum\limits_{\forall(i_1\ldots i_k)\in K_0} a_{i_1}\ldots_{i_k}\cdot 1\left(x_{i_1}\cdot x_{i_2}\ldots x_{i_k}\right)$,

где $1\left(x_{i_1}\cdot x_{i_2}\ldots x_{i_k}\right)=\begin{cases}1, & \forall x_{i_j}>0,_{j}=\overline{1,k}\\ 0, & \quad \exists x_{ij}=0\end{cases}$, $a_{i_1}\ldots_{i_k}$ - неизвестные коэффициенты.

Первая компонента отражает постоянный вклад в глобальную цель, который определяется фактором неравенства одновременно нулю определенных совокупностей компонент вектора $\overline{x}$.

2) $$\sum\limits_{\forall(i_1 i_2\ldots i_k)\in K_1}\ \sum\limits_{\forall(j_1 j_2\ldots j_k)\in K_1(i_1 i_2\ldots i_k)} \pm b_{i_1 i_2\ldots i_k}^{p_{i_1}^{j_1} p_{i_2}^{j_2}\ldots p_{i_k}^{j_k}}\left(x_{i_1}\right)^{p_{i_1}^{j_1}}\left(x_{i_2}\right)^{p_{i_2}^{j_2}}\ldots\left(x_{i_k}\right)^{p_{i_k}^{j_k}}$$
$$\forall b_{i_1 i_2\ldots i_k}^{p_{i_1}^{j_1}\ldots p_{i_k}^{j_k}}\geqslant 0\ i_l, j_l,\ l=\overline{1,n}; k\in\left\{\overline{1,n}\right\},$$

величины $b_{i_1\ldots i_k}^{p_{i_1}^{j_1} p_{i_k}^{j_k}}$ неизвестны, $p_{i_l}^{j_l}, l=\overline{1,k}\leqslant n$ – натуральные числа, $\pm$ перед каждым членом суммы обозначает, что эксперт точно знает знак соответствующего вклада.

3) $$\sum\limits_{\forall(i_1\ldots i_k)\in K_2}\ \sum\limits_{\forall(j_1\ldots j_k)\in K_2\left(i_1,\ldots i_k\right)} c_{i_1\ldots i_k}^{t_{i_1}^{j_1} t_{i_2}^{j_2}\ldots t_{i_k}^{j_k}}\cdot\left(x_{i_1}\right)^{t_{i_1}^{j_1}}\cdot\left(x_{i_2}\right)^{t_{i_2}^{j_2}}\ldots\left(x_{i_k}\right)^{t_{i_k}^{j_k}},$$

где $c_{i_1\ldots i_k}^{t_{i_1}^{j_1} t_{i_2}^{j_2}\ldots t_{i_k}^{j_k}}$ – неизвестные коэффициенты, $t_{i_l}^{j_l}$, $l=\overline{1,k}\leqslant n$ – натуральные числа.

Будем рассматривать случай, когда эксперты способны дать заключение, что с точностью до неизвестных численных значений коэффициентов $a_{i_1\ldots i_k}$; $b_{i_1\ldots i_k}^{p_{i_1}^{j_1}\ldots p_{i_k}^{j_k}}$; $c_{i_1\ldots i_k}^{t_{i_1}^{j_1}\ldots t_{i_k}^{j_k}}$ функция $f\left(\overline{x}\right)$ имеет вид:

$$\begin{gathered} f\left(\overline{x}\right)=\sum\limits_{\forall(i_1\ldots i_k)\in K_0} a_{i_1\ldots i_k}\cdot 1\left(x_{i_1}\ldots x_{i_k}\right)+\\ \sum\limits_{\forall(i_1\ldots i_k)\in K_1}\ \sum\limits_{\forall(j_1\ldots j_k)\in K_1(i_1\ldots i_k)} \pm b_{i_1\ldots i_k}^{p_{i_1}^{j_1}\ldots p_{i_k}^{j_k}}\cdot\left(x_{i_1}\right)^{p_{i_1}^{j_1}}\cdot\left(x_{i_2}\right)^{p_{i_2}^{j_2}}\ldots\left(x_{ik}\right)^{p_{i_k}^{j_k}}+\\ +\sum\limits_{\forall(i_1\ldots i_k)\in K_2}\ \sum\limits_{\forall(j_1\ldots j_k)\in K_2(i_1\ldots i_k)} c_{i_1\ldots i_k}^{t_{i_1}^{j_1}\ldots t_{i_k}^{j_k}}\cdot\left(x_{i_1}\right)^{t_{i_1}^{j_1}}\cdot\left(x_{i_2}\right)^{t_{i_2}^{j_2}}\ldots\left(x_{ik}\right)^{t_{i_k}^{j_k}} \end{gathered}\tag{1}$$

При этом эксперты не гарантируют, что все весовые коэффициенты не равны нулю. Иными словами, представление $f\left(\overline{x}\right)$ экспертами в виде (1) в общем случае является избыточным.

 ISSN 1562-9945

Необходимо найти истинную структуру функции $f(\overline{x})$ и значения неизвестных коэффициентов, соответствующих этой структуре.

Решение поставленной задачи

Для решения этой задачи можно воспользоваться классической схемой модели группового учета аргументов в МГУА и АИ [8]. Однако учитывая избыточное представление $f(\overline{x})$ в виде (1), можно предложить другую реализацию принципа внешнего дополнения (разбиение данных на обучающую и проверочную последовательности) и на его основе инверсную (от сложного к простому) схему нахождения структуры функции $f(\overline{x})$ и соответствующих ей весовых коэффициентов.

По модели (1) формулируется задача линейного программирования:

$$\min \sum_{l=1}^{p} y_l \tag{2}$$

$$\begin{gathered}
-y_l \leqslant f\left(\overline{x}^{s_l}\right) - \sum_{\forall(i_1\ldots i_k)\in K_0} a_{i_1\ldots i_k}\cdot 1\left(x_{i_1}^{s_l}\ldots x_{i_k}^{s_l}\right)+\\
\sum_{\forall(i_1\ldots i_k)\in K_1}\ \sum_{\forall(j_1\ldots j_k)\in K_1(i_1\ldots i_k)} \pm b_{i_1\ldots i_k}^{p_{i_1}^{j_1}\ldots p_{i_k}^{j_k}}\cdot\left(x_{i_1}^{s_l}\right)^{p_{i_1}^{j_1}}\cdot\left(x_{i_2}^{s_l}\right)^{p_{i_2}^{j_2}}\ldots\left(x_{i_k}^{s_l}\right)^{p_{i_k}^{j_k}}+\\
+\sum_{\forall(i_1\ldots i_k)\in K_2}\ \sum_{\forall(j_1\ldots j_k)\in K_2(i_1\ldots i_k)} c_{i_1\ldots i_k}^{t_{i_1}^{j_1}\ldots t_{i_k}^{j_k}}\cdot\left(x_{i_1}^{s_l}\right)^{t_{i_1}^{j_1}}\cdot\left(x_{i_2}^{s_l}\right)^{t_{i_2}^{j_2}}\ldots\left(x_{i_k}^{s_l}\right)^{t_{i_k}^{j_k}}\leqslant y_l\\
y_l\geqslant 0,\ l=\overline{1,p};\\
\sum_{\forall(i_1\ldots i_k)\in K_0} a_{i_1\ldots i_k}\cdot 1\left(x_{i_1}^{i}\ldots x_{i_k}^{i}\right)+\\
+\sum_{\forall(i_1\ldots i_k)\in K_1}\ \sum_{\forall(j_1\ldots j_k)\in K_1(i_1\ldots i_k)} \pm b_{i_1\ldots i_k}^{p_{i_1}^{j_1}\ldots p_{i_k}^{j_k}}\left(x_{i_1}^{i}\right)^{p_{i_1}^{j_1}}\cdot\left(x_{i_2}^{i}\right)^{p_{i_2}^{j_2}}\ldots\left(x_{i_k}^{i}\right)^{p_{i_k}^{j_k}}+\\
+\sum_{\forall(i_1\ldots i_k)\in K_2}\ \sum_{\forall(j_1\ldots j_k)\in K_2(i_1\ldots i_k)} c_{i_1\ldots i_k}^{t_{i_1}^{j_1}\ldots t_{i_k}^{j_k}}\cdot\left(x_{i_1}^{i}\right)^{t_{i_1}^{j_1}}\cdot\left(x_{i_2}^{i}\right)^{t_{i_2}^{j_2}}\ldots\left(x_{i_k}^{i}\right)^{t_{i_k}^{j_k}}\geqslant\\
\geqslant\sum_{\forall(i_1\ldots i_k)\in K_0} a_{i_1\ldots i_k}\cdot 1\left(x_{i_1}^{j}\ldots x_{i_k}^{j}\right)+\\
+\sum_{\forall(i_1\ldots i_k)\in K_1}\ \sum_{\forall(j_1\ldots j_k)\in K_1(i_1\ldots i_k)} \pm b_{i_1\ldots i_k}^{p_{i_1}^{j_1}\ldots p_{i_k}^{j_k}}\left(x_{i_1}^{j}\right)^{p_{i_1}^{j_1}}\cdot\left(x_{i_2}^{j}\right)^{p_{i_2}^{j_2}}\ldots\left(x_{i_k}^{j}\right)^{p_{i_k}^{j_k}}+\\
+\sum_{\forall(i_1\ldots i_k)\in K_2}\ \sum_{\forall(j_1\ldots j_k)\in K_2(i_1\ldots i_k)} c_{i_1\ldots i_k}^{t_{i_1}^{j_1}\ldots t_{i_k}^{j_k}}\cdot\left(x_{i_1}^{j}\right)^{t_{i_1}^{j_1}}\cdot\left(x_{i_2}^{j}\right)^{t_{i_2}^{j_2}}\ldots\left(x_{i_k}^{j}\right)^{t_{i_k}^{j_k}}\\
\forall(i,j)\in I
\end{gathered} \tag{3}$$

Переменными задачи линейного программирования являются y_l; $a_{i_1\ldots i_k}$; $b_{i_1\ldots i_k}^{p_{i_1}^{j_1}\ldots p_{i_k}^{j_k}}$; $c_{i_1\ldots i_k}^{t_{i_1}^{j_1}\ldots t_{i_k}^{j_k}}$.

Для упрощения дальнейшего изложения инверсного модифицированного алгоритма МГУА и АИ переформулируем модель (1).

Модель (1) представляет собой взвешенную сумму известных составляющих, каждая из которых формально представляет собой числовую скалярную функцию, аргументами которой являются компоненты вектора $\overline{x}$. Переобозначим их следующим образом: $\Psi_j\left(\overline{x}\right)$, $j=\overline{1,S}$, S– общее количество составляющих в модели (1). Неизвестные весовые коэффициенты при них обозначим (переобозначим) $b_j=\overline{1,S}$. Таким образом, (1) записывается в виде:

$$f\left(\overline{x}\right)=\sum_{j=1}^{S}b_j\Psi_j\left(\overline{x}\right) \tag{4}$$

Решением задачи линейного программирования ЛП $((2)-(3))$ являются оценки $\hat{b}_j$ неизвестных коэффициентов b_j, минимизирующие критерий (2).

Сформулируем аналог принципа внешнего дополнения в МГУА (разбиение всех данных, используемых при построении модели, на обучающую и проверочную последовательности). Истинное, неизвестное нам представление $f\left(\overline{x}\right)$ имеет вид:

$$\begin{array}{l}\sum\limits_{l=1}^{L}b_{i_l}\Psi_{i_l}\left(\overline{x}\right)\\ \forall i_l\in\left\{\overline{1,S}\right\},\ L<S.\end{array} \tag{5}$$

Обозначим через $\{L\}$ множество индексов i_l, $l=\overline{1,L}$. Очевидно, что $\hat{b}_j$, $j\overline{\in}\{L\}$ не обязательно являются нулями, однако, если исходные данные являются достаточно представительными, то можно ожидать, что:

1) $\hat{b}_j$, $j\overline{\in}\{L\}$ достаточно мало по модулю и тем меньше, чем выше степень составляющей $\Psi_j\left(\overline{x}\right)$.

2) Если у модели (4) исключить слагаемое $b_j\Psi_j\left(\overline{x}\right)$, $j\overline{\in}\{L\}$ и для этой модели решить задачу ЛП$((2)-(3))$, то оптимальное значение функционала (2) существенно не изменится.

3) Если из модели (4) исключить слагаемое $b_{i_l}\Psi_{i_l}\left(\overline{x}\right)$, $i_l\in\{L\}$, то оптимальное значение функционала (2) соответствующей задачи ЛП$((2)-(3))$ должно существенно увеличиться, при этом увеличение должно быть тем больше, чем меньше становится избыточных слагаемых в представлении (4).

Сформулированный аналог принципа внешнего дополнения позволяет предложить следующую (не обязательно единственную) версию модифицированного алгоритма метода МГУА и АИ для формализации глобальной функции цели в задачах принятия решений.

Этап 0. Задается избыточное описание (4) и решается соответствующая задача ЛП$((2)-(3))$, которую обозначим ЛП^0 $((2)-(3))$. Последовательность чисел $\hat{b}_j$, $j=\overline{1,S}$ пересортировывается в порядке убывания всех абсолютных значений $\hat{b}_t$, $t=\overline{1,S}$. В соответствии с ней формируем последовательность натуральных индексов, которая имеет вид:

$$j_1,j_2\ldots,j_S \tag{6}$$

 ISSN 1562-9945

Этап 1. Из представления (4) исключается составляющая $b_{j_S}\Psi_{j_S}(\overline{x})$ и решается соответствующая задача *ЛП* $((2)-(3))$, которую обозначим *ЛП*^{1} $((2)-(3))$. Вводится признак принадлежности составляющей $b_{j_S}\Psi_{j_S}(\overline{x})$ представлению (5):

Задача *ЛП*^{1} $((2)-(3))$ не имеет допустимого решения.

Обозначим $\left|(2)^1-(2)^0\right|=\Delta_1$, $(2)^0,(2)^1$ оптимальные значения функционалов качества задач *ЛП*^{0}и *ЛП*^{1}.

В силу введенного аналога принципа внешнего дополнения и избыточности исходного представления (4) составляющая $\Psi_{j_{\hat{S}}}(\overline{x})$ в случае разрешимости соответствующей задачи *ЛП*^{1} $((2)-(3))$ не принадлежит представлению (5) и исключается из представления (4).

Этап $i+1$, $i=\overline{1,S-1}$. Из представления (4), полученного на предыдущем этапе, исключается составляющая с индексом j_{S-i} (6). Решается задача *ЛП*$^{i+1}$ $((2)-(3))$, соответствующая этому представлению.

Находим число

$\Delta_{i+1}=\left|(2)^{i+1}-(2)^{\hat{i}}\right|$, где $(2)^{\hat{i}}$ – значение функционала задачи *ЛП*$^{\hat{i}}$ $((2)-(3))$, соответствующего предыдущему этапу с максимальным номером, на котором исключённая составляющая представления (4) не принадлежит представлению (5).

Для $i+1$ этапа вводим признак принадлежности исключенной на этом этапе составляющей представлению (5):

а) *ЛП*$^{i+1}$ $((2)-(3))$ не имеет допустимого решения;

б) $\left|\Delta_{i+1}-\tilde{\Delta}_i\right|\geqslant Kпор$,

где $\tilde{\Delta}_i=\max\left\{1_{\Delta_j}\right\}$ $j=\overline{1,i,}$

где

$$1\ \Delta_j=\begin{cases}\Delta_j, \text{если составляющая представления (4)}\\ \text{ исключенная на } j\text{-м этапе}\\ \text{ не принадлежит представлению (5)}\\ 0, \text{в противном случае}\end{cases},$$

$Kпор$ – эмпирическая константа, отвечающая в силу введенного аналога принципа внешнего дополнения случаю, когда исключенная на этом этапе составляющая принадлежит представлению (5).

Если по этому признаку исключенная составляющая принадлежит (5), она включается в описание (4). В противном случае эта составляющая окончательно исключается из представления (4). Переход к следующему этапу.

В результате проведения $S+1$ этапа получим окончательное представление (4), которое является аппроксимацией неизвестного представления (5) инверсным модифицированным алгоритмом МГУА и АИ.

Примечание. Результирующая аппроксимация может быть получена на S-м этапе, если на $S+1$ этапе составляющая с индексом j_1 была опять включена в представление (4).

Выводы

Для формализации качественно заданной глобальной функции цели предлагается использовать метод анализа иерархий Саати и инверсный модифицированный алгоритм метода группового учета аргументов Ивахненко. Формализация качественно заданной функции цели позволяет автоматизировать процесс выбора наилучшей альтернативы из произвольного набора альтернатив без привлечения экспертов, т.е. без дополнительных временных и финансовых затрат.

Литература

1. Saaty T.L. Multicriteria Decision Making. The Analytic Hierarchy Process,. – New York: McGraw Hill International, 1990.- p.437.
2. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем: Пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе: Под ред. И.А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1991. – 223 с.
3. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий: Tomas Saaty. The Analytic Hierarchy Process. –Пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе. – М.: Радио и связь, 1993. – 315 с.
4. Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. – Киев: Наукова думка. – 2002. – 381 с.
5. Павлов А.А., Лищук Е.И., Кут В.И. Математические модели оптимизации для обоснования и нахождения весов объектов в методе парных сравнений. Системні дослідження та інформаційні технології. – 2007р. 2.
6. Павлов А.А., Лищук Е.И., Кут В.И. Математические модели оптимизации для обоснования и нахождения весов объектов по неоднородным матрицам парных сравнений. Системні дослідження та інформаційні технології. – 2007р. 3.
7. Павлов А.А., Лищук Е.И., Кут В.И. Многокритериальный выбор в задаче обработки данных матрицы парных сравнений. Вісник НТУУ "КПІ" Інформатика, управління та обчислювальна техніка 2008р. 46.
8. Павлов А.А., Иванова А.А., Зигура Р.А. Метод группового учёта аргументов и анализа иерархий (МГУАИАИ) в задачах принятия решений. Вісник НТУУ „КПІ" Інформатика, управління та обчислювальна техніка, Київ 2008р. 47. -350 с. – С.205-214.
9. Ивахненко А.Г., Мюллер Н.А. Самоорганизация прогнозирующих моделей. Киев, Техника 1985г. – 221 с.
10. Ивахненко А.Г., Юрогновский Ю.Ц. Моделирование сложных систем по экспериментальным данным. М. Радио и связь 1986г. – 118 с.

Получено 14.11.2008