

МЕТОДЫ УЛУЧШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ

Статья посвящена разработке методов улучшения фильтрации переменных состояния линейных дискретных объектов. Предложена корректная постановка задачи фильтрации, учитывающая влияние рассогласования начальных условий объекта и фильтра на качество оценок переменных состояния. На ее основе разработаны и исследованы два метода синтеза улучшенных фильтров. Приведены результаты экспериментального исследования предложенных фильтров, демонстрирующие, что по эффективности они значительно превышают стандартные фильтры Калмана.

1. Анализ калмановского подхода фильтрации переменных состояния

В стандартной калмановской постановке задач фильтрации переменных состояния к оценкам $\hat{x}[k]$ переменных $x[k]$ выдвигаются требования их несмещенности и эффективности, а к процедуре фильтрации – ее линейность. С учетом этих требований постановка задачи фильтрации формулируется следующим образом:

$$\hat{x}[k] = \arg \{ \min \operatorname{tr} P[k] \left\{ \begin{array}{l} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + Gw[k], \\ y[k] = Cx[k] + v[k]; \\ M\hat{x}[k] = Mx[k], M w[k] = 0, M v[k] = 0; \\ \operatorname{Cov}[w[i], w[j]] = R_w \delta_{ij}, \operatorname{Cov}[v[i], v[j]] = R_v \delta_{ij}; \\ \operatorname{Cov}[w[i], v[j]] = 0, \operatorname{Cov}[\hat{x}[0], \hat{x}[0]] = P[0]. \end{array} \right. \quad (1)$$

где $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ – вектор переменных состояния, $\hat{x} = [\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n]^T$ – вектор их оценок, $u = [u_1, \dots, u_m]^T$ – вектор входа объекта $y = [y_1, \dots, y_l]$ – вектор выхода измерителя его выходной величины, w, v – белые помехи на входе объекта и выходе измерителя, M, Cov – операторы математического ожидания и ковариации соответственно, R_w, R_v – интенсивности помех w, v , δ_{ij} – символ Кронекера, $\operatorname{tr} P[k]$ – суммарная дисперсия оценок переменных состояния, зависящая от помех w, v соответственно

По своей сути фильтр Калмана является динамическим оператором, поэтому качество оценок переменных состояния зависят как от помех w, v , так и от рассогласования $\varepsilon[0] = x[0] - \hat{x}[0]$ начальных условий на объекте $x[0]$ и на фильтре $\hat{x}[0]$. При этом, если эти условия не совпадают, то ошибки фильтрации $\varepsilon[k] = x[k] - \hat{x}[k]$ будут содержать свободные составляющие равные:

$$\hat{\varepsilon}[k] = L[k]\varepsilon[0] \quad (2)$$

где $L[k]$ – переходная матрица состояния фильтра.

В выражении (2) составляющая $L[k]$ регулярна, а в общем случае $\varepsilon[0]$ случайна. Таким образом, в составе оценок переменных состояния будет присутствовать регулярные по структуре и случайные по амплитуде ошибки фильтрации. Следует отметить, что подобные случайные составляющие значительно менее эффективно “подавляются” фильтром, чем случайные белые помехи w, v . Однако в стандартной калмановской постановке задачи фильтрации не предусмотрено эффективное подавление указанной составляющей ошибки. Отсюда вытекает, что фильтр, синтезируемой на основе стандартной калмановской постановки задачи фильтрации (1), в общем случае статистически не является оптимальным.

Согласно (2) фильтр Калмана оказывается оптимальным оптимален или в случае отсутствия рассогласования начальных условий объекта и фильтра или после его выхода на стационарный режим. Однако после выхода на стационарный режим фильтра Калмана по существу превращается в фильтр Винера. Отсюда вытекает, что фильтр Калмана должен проявить свое преимущество над фильтром Винера в интервале его выхода на стационарный режим. Но он, согласно калмановской постановки задачи фильтрации, с этим эффективно не справляется.

Из вышеуказанных замечаний следует, что для оптимального решения задачи фильтрации переменных состояния в первую очередь необходима ее корректная постановка, которая учитывала бы как влияние помех, так и влияние рассогласований начальных условий переменных состояния объекта и фильтре на качество фильтрации.

2. Корректная постановка задачи фильтрации переменных состояния

Согласно выполненному анализу корректная постановка задачи фильтрации переменных состояния дискретных объектов может быть получена доукомплектацией стандартной калмановской постановки элементом учета влияния рассогласования начальных условий объекта и фильтра на эффективность оценок переменных состояния. Такая постановка задачи может быть сформулирована следующим образом:

$$\hat{x}[k] = \arg \left\{ \frac{\min}{A_\Phi, K_\Phi, B_\Phi} [\sigma_{\varepsilon[0]}^2 + \sigma_{w,v}^2] \right. \left. \begin{array}{l} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + Gw[k], \\ y[k] = Cx[k] + v[k]; \\ M\hat{x}[k] = Mx[k], M w[k] = 0, M v[k] = 0; \\ Cov[w[i], w[j]] = R_w \delta_{ij}, \\ Cov[v[i], v[j]] = R_v \delta_{ij}; \\ Cov[w[i], v[j]] = 0, Cov[\hat{x}[0], \hat{x}[0]] = P_0. \end{array} \right. \quad (3)$$

где $\sigma_x^2[k] = \sigma_{\varepsilon[0]}^2[k] + \sigma_{w,v}^2[k]$, а $\sigma_{\varepsilon[0]}^2, \sigma_{w,v}^2$ – суммарные дисперсии оценок переменных состояния, зависящие от рассогласования начальных условий

переменных состояния объекта и фильтра и от помех $w, v, A_\phi, K_\phi, B_\phi$ – матрицы состояния, входа по $y[k]$, и по $u[k]$ соответственно.

3. Подходы синтеза улучшенных фильтров переменных состояния

Подходы улучшения эффективности оценок переменных состояния вытекают из анализа выражения (2), откуда следует, что для уменьшения влияния рассогласований начальных условий на качество фильтрации переменных состояния существуют три возможности:

- изменение структуры процесса фильтрации за счет изменения матрицы $L[k]$;
- уменьшение рассогласования $\varepsilon[0]$ начальных условий переменных состояния объекта и фильтра за счет некоторой оценки $\hat{x}_o[0]$;

Реализация указанных возможностей приводят к соответствующим двум методам улучшения качества фильтрации переменных состояния.

3.1. Синтеза улучшенных фильтров переменных состояния на основе изменения переходной матрица состояния

Реализация этой возможности может быть осуществлена путем внедрения в контур стандартного фильтра Калмана дополнительной матрицы усиления $K_D[k, \gamma]$, структура K_D и параметры γ которой должны быть определены с учетом эффективного подавления влияния рассогласования начальных условий переменных состояния. Аналитическое определение структуры и параметров этой матрицы в общем случае не возможно.

Для приближенного конструирования упомянутой матрицы может быть использован параметрический подход, который предполагает выбор структуры K_D и оптимальное определение ее параметров γ .

Выбор структуры дополнительной матрицы усиления $K_D[k]$ может быть осуществлен на основе следующих “здоровых” эвристических соображений:

- матрица $K_D[k]$ должна обеспечить “достаточно” большое быстродействие процесса подавления рассогласования $\varepsilon[0]$ начальных условий переменных состояния объекта и фильтра в интервале его выхода на стационарный режим;
- матрица $K_D[k]$ должна обеспечить “достаточно” эффективное затухание в контуре фильтра на этапе его выхода на стационарный режим, чтобы не допустить нежелательные, например, неустойчивые, колебательные и др., процессы фильтрации;
- матрица $K_D[k]$ должна компенсировать влияние колебательности объекта на качество фильтрации;
- матрица $K_D[k]$ не должна влиять на матрицу усиления фильтра после его выхода на стационарный режим.

Параметры матрицы $K_D[k]$ должны быть определены из условия минимума общего критерия эффективности оценок $\sigma_x^2[k] = \sigma_{\varepsilon[0]}^2[k] + \sigma_{w,v}^2[k]$.

При последовательном соединении матриц фильтра Калмана и $K_D[k]$, последняя может в частности быть выбрана следующим:

$$K_D[k] = K_0 e^{-\beta k} \cdot \text{Cos}(\omega k + \varphi) + E, \quad (4)$$

Действительно, при оптимальном определении параметров $K_0, \beta, \omega, \varphi$:

- матрица K_0 будет обеспечивать оптимальную скорость уменьшения влияния рассогласований начальных условий на качество фильтрации;
- матрица β будет оптимально обеспечить “затухание” матрицы $K_D[k]$ для недопущения неустойчивых или других нежелательных процессов выхода фильтра на стационарный режим;
- матрицы ω, φ будут оптимально компенсировать “вредное” влияние колебательности объекта на качество фильтрации.

Структурная схема предложенного фильтра для случая последовательного соединения матриц усиления приведена на следующем рисунке 1.

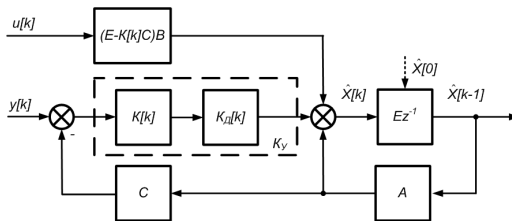


Рис. 1 – Структурная схема фильтра для случая последовательного соединения матриц усиления

Очевидно, что оптимальные значения $K_0^*, \beta^*, \omega^*, \varphi^*$ параметров $K_0, \beta, \omega, \varphi$ функционально зависят от структуры и параметров объекта. В частном случае $K_0^*, \beta^*, \omega^*, \varphi^*$ могут быть определены на основе соответствующих итерационных процедур.

Матрица усиления фильтра Калмана определяется обычным образом на основе стандартной калмановской постановки задачи фильтрации.

При параллельном соединении с матриц усиления фильтра Калмана и $K[k]$ последняя может быть выбрана следующим образом:

$$K_D[k] = K_0 e^{-\beta k} \cdot \text{Cos}(\omega k + \varphi). \quad (5)$$

Так как в этом методе более оперативно в фильтре реагируют переменные с большими индексами, то очевидно, что по ним и будет достигнут более эффективный результат. В этом и состоит его достоинство и недостаток.

3.2. Синтеза улучшенных фильтров переменных состояния на основе оценок начальных значений переменных состояния объекта

Этот метод состоит в том, что в качестве начальных условий $\hat{x}[0]$ переменных состояния фильтра Калмана устанавливаются оценка

$\hat{x}_o[0]$ начальных условий $x[0]$ переменных состояния объекта, найденных на основе его “короткой” выборке выходной величины $y[k]$. Таким образом, на фильтр устанавливаются начальные условия $\hat{x}[0] = \hat{x}_o[0]$. Структурная схема такого фильтра представлена на рис. 2, где БООНУ- блок определения оценки $\hat{x}_o[0]$.

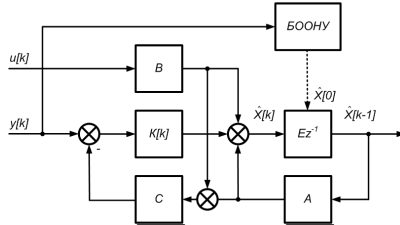


Рис. 2 – Структурная схема фильтра с компенсацией начальных условий

Так как более оперативно и точно могут быть определены компоненты $\hat{x}_{oi}[0]$ с меньшими индексами $i = 1, \dots, n$ вектора $\hat{x}_o[0]$, то очевидно по указанным переменным будет достигнут более эффективный результат. В этом и состоит его достоинство и недостаток.

Эффективность предложенных фильтров переменных состояния была исследована на основе их компьютерного моделирования. В статье приведены результаты экспериментальных исследований, выполненных при следующих условиях:

1. В качестве объекта был выбран скалярный по входам дискретный объект второго порядка.
2. Векторно-матричная модель объекта построена на базе метода нормальных переменных.

$$X[k + 1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} X[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w[k], \quad (6)$$

$$y[k] = [1 \ 0] x[k] + v[k]. \quad (7)$$

3. В качестве помех были использованы компьютерные последовательности белых шумов с интенсивностями помех $Q_w = 0.25, Q_v = 0.25$.

4. Рассогласование начальных условий выбрано из нормального распределения с дисперсией, равной 4.

5. Исследовательские выборки содержали 100 элементов. 6. Для оценки эффективности фильтрации были использованы меры:

$$Q_i(\varepsilon_{ij}[0]) = \frac{1}{N_j} \sum_{l=1}^{N_j} \sum_{k=0}^{k_c} (x_{ilj}[k] - \hat{x}_{ilj}[k])^2, Q_i = \sum_{j=1}^P Q_i(\varepsilon_{ij}[0]), \gamma_i = \frac{Q_i^k}{Q_i^y}, \quad (8)$$

где $k_c = 10$ – момент выхода процессов фильтрации на стационарный режим, i – номер переменной состояния, j – номер интервала эксперимента, p_j – вероятность попадания рассогласования $\varepsilon_{ij}[0]$ в j -й интервал,

$N_j = 100p_j$ - количество экспериментов в j -м интервале, число интервалов $P = 21$, индекс К относится к фильтру Калмана, индекс У - к улучшенному фильтру.

Результаты экспериментальных исследований приведены на ниже-следующих рисунках.

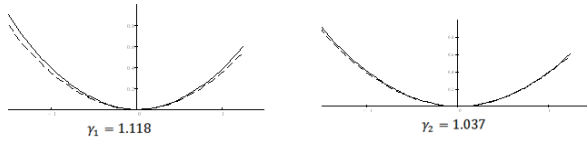


Рис. 3 – Зависимость критериев эффективности от рассогласования начальных условий для фильтра с дополнительной матрицей усиления

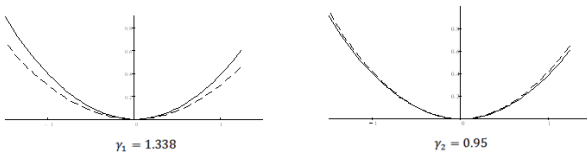


Рис. 4 – Зависимость критериев эффективности от рассогласования начальных условий для фильтра с компенсацией последних

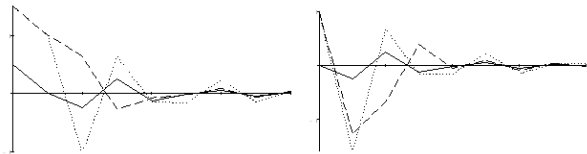


Рис. 5 – Переменные состояния и их оценки для фильтра с дополнительной матрицей усиления

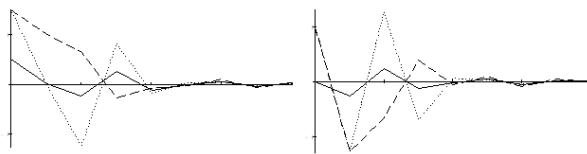


Рис. 6 – Переменные состояния и их оценки для фильтра с компенсацией рассогласования начальных условий.

Анализ результатов экспериментальных исследований убедительно доказывает, что эффективность разработанного фильтра существенно выше эффективности стандартного фильтра Калмана.

Литература

1. Kalman R.E. The theory of Optimal Control and the Calculus of Variations. Mathematical Optimization Techniques // University of California Press , Berkeley – 1963.
2. Кикю А.Г. Улучшение калмановской фильтрации переменных состояния // Адаптивные системы автоматического управления.-2003.- 6 (26).
3. Кикю А.Г., Рева Е.Ю. Компенсация влияния рассогласования начальных условий фильтров переменных состояния // Адаптивные системы автоматического управления.-2006.- 9 (29).

Отримано 03.03.2010 р.