УДК 621.924.229.86

А.Г. Кику, В.Ю. Шейко

КОРРЕКТНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ И ПОДХОДЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Аннотация: В статье приведена корректная постановка задач линейной фильтрации переменных состояния (ПС) непрерывных динамических объектов, учитывающая влияние всех факторов на эффективность оценок ПС, и предложены подходы ее решения.

Ключевые слова: переменные состояния, оценки переменных состояния, постановка задачи фильтрации, фильтр переменных состояния, подходы решения задачи фильтрации, интегральный критерий качества, эффективность.

В виду того, что фильтры ПС представляют собой динамические операторы, эффективность оценок $\hat{x}(t)$ ПС $x(t)$ зависит не только от помех на входе объекта $w(t)$ и выходе измерителя его выходной величины $v(t)$, но также и от рассогласования $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x(t)}$ начальных условий ПС объекта и фильтра. В стандартной калмановской постановке задачи последний фактор отсутствует, что и привело к статистической неоптимальности фильтра Калмана. С учетом этого корректная постановка задачи линейной оптимальной фильтрации ПС должна иметь следующий вид:

$$\hat{x} = \arg\left\{ \frac{\min}{L, B_{\text{ф}}, K} [\sigma^2_{x(0)} + trP_\varepsilon(t)] \left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + G(t)w(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) + v(t), \\ M\hat{x} = Mx(t),\, Mw(t) = 0,\, Mv(t) = 0, \\ Cov[w(t), w(\tau)] = \\ = Q\delta(t-\tau), Cov[v(t), v(\tau)] = R\delta(t-\tau), \\ Cov[w(t), v(\tau)] = 0, Cov[\hat{x}(0), \hat{x}(0)] = \\ = P_0, Mx(0) \in F_{x(0)}, \\ \text{Структура фильтра: линейная} \end{array} \right. \right\}, \tag{1}$$

где, $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$, $\hat{x} = [\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n}]^T$, $u = [u_1, \ldots, u_r]^T$, $y = [y_1, \ldots, y_l]^T$ – вектора ПС, их оценок, полезного входного воздействия объекта, выхода измерителя его выходной величины, $w(t)$, $v(t)$ – помехи на входе объекта и выходе измерителя $y(t)$, A, B, C, D – матрицы модели объекта, $L, B_{\text{ф}}, K$ – соответствующие матрицы фильтра, M, Cov – операторы математического ожидания и ковариации, Q, R – дисперсии помех $w(t)$ и $v(t)$, $\delta(t)$ – функция Дирака, P_0 – ковариационная матрица оценок $\hat{x}(t)$ при $t = 0$, $\sigma^2_{\varepsilon(0)}$ – составляющая дисперсии ошибки фильтрации, зависящей от математического ожидания рассогласования начальных условий ПС объекта и фильтра, trP_ε – след ковариационной матрицы P_ε ошибки фильтрации, $F_{x(0)}$ – закон распределения вероятности $Mx(0)$.

В стандартной калмановской постановке задачи фильтрации составляющая $\sigma^2_{\varepsilon(0)}$ отсутствует!

 ISSN 1560-8956

При указанной постановке задачи дифференциальное уравнение ошибки фильтрации не трудно показать, что будет иметь следующий вид:

$$\dot{\varepsilon} = (L - KC)(\varepsilon + \varepsilon_0) + Gw - Kv = (L - KC)[\varepsilon + \Phi_\Phi(\mathrm{t})\mathrm{M}\varepsilon(0)] + Gw - Kv, \quad (2)$$

где $\Phi_\Phi(\mathrm{t})$ – переходная матрица фильтра, а $\varepsilon(w, v, t)$ – вынужденная составляющая ошибки, зависящая от $w(t)$ и $v(t)$.

При этом принципиально необходимо отметить, что эта составляющая $\varepsilon_0(t)$ относится элементарным случайным процессам, так она имеет регулярную структуру и случайную амплитуду. Очевидно, что ее влияние на эффективность оценок будет “подавлена” значительно менее эффективно, чем влияния помех $w(t)$ и $v(t)$, относящихся к “белым” шумам!

Согласно (2) дифференциальное уравнение ковариационной матрицы ошибки фильтрации будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\dot{P}(w, v, t) = (A - \boldsymbol{K}C)P(w, v, \varepsilon_0, t) + \\
&+ P(w, v, \varepsilon_0, t)(A - \boldsymbol{K}C)^T + GQG^T + KRK^T = \\
&= (A - \boldsymbol{K}C)[P(w, v, t) + P(\varepsilon_0, t)] + [P(w, v, t) + P(\varepsilon_0, t)](A - \boldsymbol{K}C)^T + \\
&+ GQG^T + KRK^T = (A - \boldsymbol{K}C)[P(w, v, t) + \boldsymbol{\Phi}_\text{ф}(t)M\varepsilon(0)M\varepsilon(0)^T\boldsymbol{\Phi}_\text{ф}^\text{T}(t)] + \\
&+ [P(w, v, t) + \boldsymbol{\Phi}_\text{ф}(t)M\varepsilon(0)M\varepsilon(0)^T\boldsymbol{\Phi}_\text{ф}^\text{T}(t)](A - \boldsymbol{K}C)^T + GQG^T + KRK^T
\end{aligned} . \quad (3)$$

Из выражения (3) вытекает, что только при отсутствии рассогласования начальных условий ПС объекта и фильтра, а вернее, только при их равенстве, упомянутое рассогласование не будет иметь никакого влияния на ошибку фильтрации. Однако в общем случае $Mx(0)$ неизвестно, поэтому с прикладной точки зрения оно всегда ухудшает эффективность оценок.

Общая процедура синтеза оптимальных фильтров переменных состояния на основе постановки (1) аналогична калмановской процедуре, т.е. их структура определяется на основе требования линейности фильтра, а его параметры – на основе требования несмещенности и эффективности оценок.

Согласно требованию линейности фильтра структура его векторно-матричной модели принимает следующий вид:

$$\dot{\hat{x}} = L(t)x(t) + B_\Phi(t)u(t) + \boldsymbol{K}(t)y(t). \quad (4)$$

Из условий несмещенности оценок вытекает, что матрицы $L(t)$ и $B_\Phi(t)$ должны иметь следующий вид:

$$L = A - KC, \quad B_\text{ф} = B + KD. \quad (5)$$

Для объектов обычного вида матрица $B_\text{ф} = B$, так как $D = 0$.

Для определения матрицы L необходимо найти матрицу K. Она определяется на основе условия эффективности оценок, т.е. из условия минимума суммарной дисперсии ошибки $\varepsilon(t)$ фильтрации. На основе этого условия и (3) матрица $\boldsymbol{K}(t)$ определяется следующим образом:

$$K(t)=\arg\{\min\frac{dtr\dot{P}(w,v,\varepsilon_0)}{K}\}=$$
$$=\arg\{\frac{d}{dK}\dot{P}(w,v,\varepsilon_0)=0\}=\arg\{\frac{d}{dK}[KRK^T-2P(w,v,\varepsilon_0)C^TK^T]=0\}=\cdot$$
$$=\arg[2K-2P(w,v,\varepsilon_0)C^T=0]=P(w,v,\varepsilon_0)C^TR^{-1} \quad (6)$$

С учетом (6) и (3) матрица усиления оптимального фильтра окончательно принимает следующий вид:

$$\mathrm{K(t)}=[P(w,v,t)+\Phi_{\text{ф}}(t)M\varepsilon(0)M\varepsilon(0)^T\Phi_{\text{ф}}^{\mathrm{T}}(t)]C^TR^{-1}. \quad (7)$$

После определения матрицы $\boldsymbol{K}(t)$ усиления фильтра будут окончательно определены его матрицы L и $B_{\text{ф}}$.

Необходимо отметить, что матрица усиления полученного оптимального фильтра на интервале его выхода на стационарный режим существенно отличается от матрицы усиления $K_{\text{K}}(t)=P(w,v,t)C^TR^{-1}$ стандартного фильтра Калмана. После выхода фильтра на стационарный режим матрицы $K_(t)$ и $K_{\text{K}}(t)$ практически становятся равными, так как при этом $\varepsilon_0\mathrm{(t)}=\Phi_{\Phi}\mathrm{(t)M}\varepsilon(0)$ практически равно нулю. Матриц $K_(t)$ и $K_{\text{K}}(t)$ полностью совпадают лишь при отсутствии рассогласования начальных условий ПС объекта и фильтра.

Отметим, что параметры матриц $K(t)$ и $L(t)$ оптимального фильтра вероятностны. Их законы распределения вероятности зависят от закона распределения вероятности начальных условий ПС объекта. Этим и обосновывается основная трудность синтеза оптимального фильтра на основе корректной постановки задачи фильтрации ПС (1).

Из полученного результата, кроме вышеуказанных, могут быть сделаны следующие выводы:

1) Стандартный фильтр Калмана оптимален лишь при отсутствии рассогласования математического ожидания рассогласования начальных условий ПС объекта и фильтра или при его выходе на стационарный режим;

2) После выхода фильтра Калмана на стационарный режим он вырождается в фильтр Винера, так как ковариационная матрица ошибки фильтрации определяется согласно (3) из алгебраического уравнения.

$$(A-\boldsymbol{K}C)P(w,v,t)+P(w,v,t)(A-\boldsymbol{K}C)^T+GQG^t+KRK^T=0; \quad (8)$$

3) Неучет влияния рассогласования начальных условий ПС в калмановской постановке задачи фильтрации привело к тому, что фильтр Калмана неэффективно решает его основную задачу, а именно обеспечение оптимальной фильтрации на интервале его выхода на стационарный режим;

4) Если фильтр Винера "доукомплектовать" оператором эффективного подавления влияния рассогласования начальных условий ПС объекта и фильтра на эффективность оценок, то полученный фильтр окажется статистически лучше стандартного фильтра Калмана.

 ISSN 1560-8956

5) Ввиду случайности $Mx(0)$ оптимальный фильтр не может быть определен приближенно даже численными методами;

6) Структура (7) матрицы усиления оптимального фильтра позволяет статистически определить подходы синтеза квазиоптимального фильтра.

Согласно (7) уменьшение влияния рассогласования начальных условий ПС фильтра и объекта на эффективность оценок последних возможно на основе нижеуказанных подходов.

Подход 1. Изменением матрицы стандартного фильтра Калмана путем добавления в контур усиления дополнительной матрицы $K_{\text{Д}}(t)$.

Подход 2. Изменением матрицы стандартного фильтра Винера путем добавления в контур усиления дополнительной матрицы $K_{\text{Д}}(t)$.

Подход 3. Установлением начальных условий переменных состояния фильтра в виде предварительно определенных оценок начальных условий переменных состояния объекта.

Подход 4. Применением комбинированного подхода, составленного на основе комбинации вышеприведенных подходов.

Упомянутая матрица $K_{\text{Д}}(t)$ должна обеспечить требуемую скорость уменьшения влияния рассогласования начальных условий ПС объекта и фильтра, а также обеспечить выполнение условия $\frac{\lim}{t\to\infty} K(t) = K_{\text{К}}(t)$. При переходе к параметрическому решению задачи (1) матрица $K_{\text{Д}}(t)$ при ее последовательном включении может быть выбрана следующим образом:

$$K_{\text{Д}}(t) = K_0 e^{-\alpha t} + E, \tag{9}$$

где E – единичная матрица, а ее параметры K_0 и α определяются из условий эффективности оценок.

Экспериментальные исследования рассмотренных подходов синтеза оптимальных фильтров, выполненные при помощи их компьютерного моделирования, показало, что эффективность оценок ПС статистически значительно выше эффективности стандартных фильтров Калмана. Ниже на рисунках 1–3 приведены результаты экспериментальных исследований комбинированного подхода синтеза оптимального фильтра ПС объекта 3-го порядка при нормальном законе распределения вероятности $F[M\varepsilon(0)]$ с $M\varepsilon(0) = 0$ и дисперсией 3, $Qw = 0.3$, $Rv = 0.3$.

Для исследуемых вариантов фильтров критерий $\gamma_i\left[\varepsilon(0)\right] = \int\limits_0^{t_c} \left[x_i(t) - \hat{x}_i(t)\right]^2 dt$, получил следующие значения:

1) для фильтра Калмана: $I_K = 9.17$

2) для фильтра с дополнительной матрицы усиления: $I_У = 0.89$

3) для фильтра с компенсацией влияния рассогласования начальных условий: $I_{Комп} = 1.31$

4) для комбинированного фильтра: $I_{У+Комп} = 0.85$

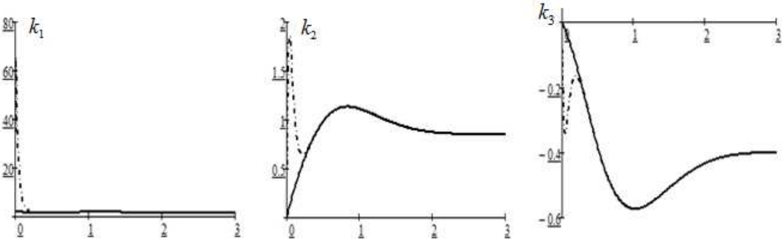

Рис. 1 – Графики коэффициентов матрицы усиления фильтра Калмана (сплошная линия) и оптимального фильтра (штрихпунктирная линия)

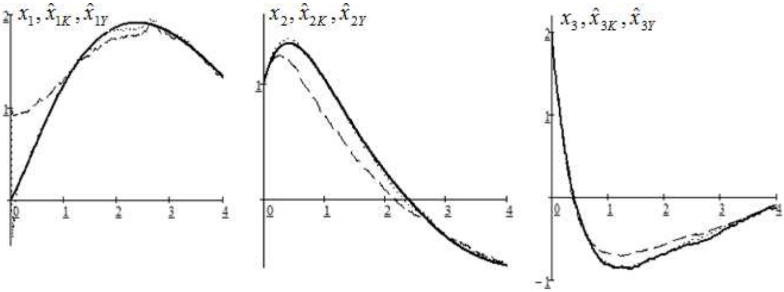

Рис. 2 – Графики переменных состояния объекта (сплошная линия), калмановских оценок (штриховая линия), оценок оптимального фильтра (точечная линия)

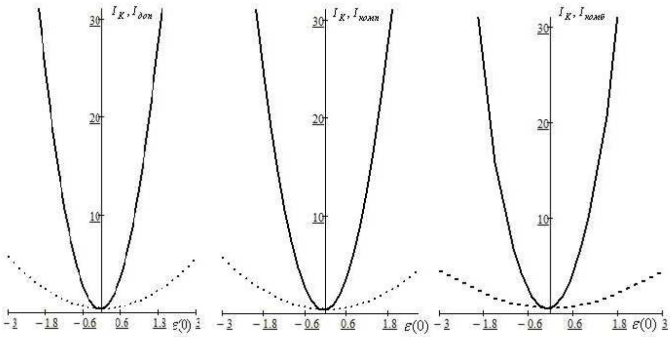

Рис. 3 – Графики зависимости критерия качества 1-й переменной состояния от рассогласования начальных условий фильтра Калмана (сплошная линия), оптимального фильтра (пунктирная линия)

Полученные экспериментальные исследования убедительно доказывают, что оптимальные фильтры ПС могут быть синтезированы толь-

 ISSN 1560-8956

ко на основе корректной постановки задачи фильтрации!

Литература

1. Kalman R.E. The theory of Optimal Control and the Calculus of Variations. Mathematical Optimization Techniques // University of California Press , Berkeley – 1963.
2. Кику А.Г. Комбинированный метод улучшения эффективности фильтрации переменных состояния / А.Г. Кику, Е.Ю. Рева, В.Ю. Шейко, А.Н. Максименко // Адаптивные системы автоматического управления. – 2010. – 17 (237).С.48 – 54.

Отримано 03.11.2011 р.