УДК 621.924.229.86

А.Г. Кику, В.Ю. Шейко

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ КВАДРАТИЧНЫХ КРИТЕРИЕВ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Аннотация: В статье рассмотрен выбор параметров квадратичных критериев в задачах оптимального управления. Доказано, что решение задачи компромиссное и оно может быть получено после решения задачи управления для конкретного объекта в общем виде по отношению к параметрам критериев.

Ключевые слова: критерий качества, параметры критерия качества, требование адекватности, требование конструктивности, задача управление, регулятор, оптимальное управление.

Статья посвящена определению значений параметров квадратичных критериев качества при решении задач оптимального управления линейными динамическими объектами. В статье показано, что на этапе формализованной постановки задачи оптимального управления непосредственно нельзя определить значения указанных параметров, и приведена методика решения поставленной задачи.

Как известно, качество решения задач управления, в том числе и задач оптимального управления, в значительной степени зависит от степени корректности выполнения их формализованной постановки, включая формализацию критериев качества, объекта управления и ограничений. Как правило, при формализации задач оптимального управления наиболее трудным является этап формализации критериев качества. Это обусловлено тем, что к критериям качества выдвигаются два противоречивых требования, а именно, требование адекватности и требование конструктивности. Требование адекватности состоит в том, что математическая модель, используемая в качестве критерия, должна адекватно отобразить исходные содержательные требования ПОТРЕБИТЕЛЯ системы управления к качеству управления. Требование конструктивности связано с тем, что математическая модель критерия должна позволить на ее основе получить аналитическое решение. Практика решения задач оптимального управления показывает, что задача конструирования или выбора математических моделей критериев качества, одновременно удовлетворяющих указанным требованиям, является довольно трудной. Например, если требования ПОТРЕБИТЕЛЯ системы сводятся к одновременному удовлетворению необходимым точности и быстродействия процесса управления, то в общем случае до сих пор не синтезированы соответствующие адекватные и конструктивные критерии, хотя указанные требования во многих случаях являются естественными с точки зрения ПОТРЕБИТЕЛЯ. Однако для решения задач оптимального управления необходимо иметь соответствующий критерий.

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left[x^T(t)\,Q(t)\,x(t) + u^T(t)\,R(t)\,u(t) \right] dt + x^T(t_2)\,F(t_2)\,x(t_2)\,, \qquad (1)$$

где $x, u, Q, R, F, \overline{t_1 t_2}$ – вектор переменных состояния, вектор управления, матрица квадратичной по переменным состояния, матрица квадратичной по управлению формы, матрица квадратичной формы терминанта критерия и интервал управления соответственно. Матрицы Q, R, F формализуют интегральные требования к точности управления, к расходу энергии на управлении и к вектору переменных состояния в конце интервала управления.

При решении конкретных задач матрицы Q, R, F выбираются симметричными, т.е. вида:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1n} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1m} & \cdots & r_{mm} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

В большинстве случаев указанные матрицы являются диагональными, т.е. вида:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & q_n \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & r_m \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & f_n \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

так как практически не встречаются задачи управления, в которых ПОТРЕБИТЕЛИ выставили бы содержательные требовании к парному произведению компонент векторов переменных состояния и управления.

Высокая конструктивность интегральных критериев качества (1) обусловлена тем, что на их основе могут быть сформулированы и аналитически решены довольно сложные задачи оптимального управления, в том числе и общие задачи управления Лагранжа и Понтрягина. Однако при этом следует отметить, что существующие методы решения задач (МКВИ, ПМ и МДП) позволяют определить лишь структуру алгоритмов оптимального управления, а не их параметры. Это имеет место из-за того, что на этапе формализации задач не могут быть сразу определены конкретные значения коэффициентов матриц критерия оптимальности. При этом указанная трудность имеет принципиальный характер, так как в рамках систем оптимального управления оптимальные требования к точности и расходу энергии противоречивы. На интуитивном уровне это утверждение правомерно, так как, например, минимизация расхода энергии на управление приводит к ухудшению характеристик переменных состояния, а требование улучшения точности приведет неминуемо к увеличению расхода энергии.

 ISSN 1560-8956

Из вышеуказанного следует, что в большинстве случаев решения задач оптимального управления на основе интегральных критериев вида в окончательном виде будет иметь компромиссный вид. Для его определения в данной статье доказано, что компромиссное решение может быть получено только при выполнении следующих трех этапов:

1. формулировка задачи оптимального управления для конкретного объекта и ограничений и общего вида интегрального критерия качества с учетом порядка модели объекта;
2. решение задачи оптимального управления полученной в результате выполнения первого этапа;
3. выбор конкретных значений параметров матриц Q, R, F с учетом содержательных требований ПОТРЕБИТЕЛЯ к качеству управления.

В статье демонстрация указанной процедуры синтеза параметров интегральных критериев качества вида (1) приводится на основе решения квадратичной задачи управления переменными состояния объекта второго порядка, векторно-матричная модель которого имеет следующий вид:

$$\begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{array}, \tag{4}$$

где y – выход объекта при $a_0 = 0.1$, $a_1 = 1$, $b = 1$. При этом матрицы Q, R – диагональные, а $F = 0$.

Таким образом, согласно первому этапу указанной процедуры, постановка задач оптимального управления имеет вид:

$$\frac{\min}{u} \left\{ \int\limits_0^\infty \left(x^T \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} x + Ru^2 \right) / \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x, \; u \in U_0 \\ x(0) = 1, \; x(\infty) = 0 \end{array} \right\}, \tag{5}$$

где U_0 – открытое множество управлений.

Указанная задача решена методом динамического программирования. При этом алгоритм управления имеет следующий вид:

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T K x^*(t), \tag{6}$$

где * – означает оптимальность.

Матрица усиления регулятора K находится решением алгебраического уравнения Риккати, которое имеет следующий вид[ссылка на лит]:

$$KBR^{-1}B^T K - KA - A^T K - Q = 0, \tag{7}$$

При этом матрица имеет следующий вид:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

Где $k_{ij} = k_{ij}(Q, R) = k_{ij}(q_1, q_2, r)$.

Известно, что критерий оптимальности может быть нормирован относительно любого из коэффициентов q_1, q_2, r. В рассмотренном примере q_2 принят равным 1. Тогда $k_{ij} = k_{ij}(Q, R) = k_{ij}(q, r)$.

С учетом параметров объекта выражение (6) принимает вид:

$$u^*(t) = -R^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{bmatrix} = -R^{-1} \left[k_{12} x_1^*(t) + k_{22} x_2^*(t) \right]. \tag{9}$$

После полученного решения в виде (9) согласно процедуре решения задачи управления необходимо выбрать коэффициенты q, r с учетом содержательных требований ПОТРЕБИТЕЛЯ к степени точности и расходу энергии на управление. Согласно принятому критерию оптимальности степень точности управления и расход энергии оцениваются следующими выражениями:

$$I_{x_i} = \int\limits_0^\infty x_i^2 dt, \; I_u = \int\limits_0^\infty u^2 dt. \tag{10}$$

Очевидно, что полученные выражения I_{x_i}, I_u зависят от параметров критерия качества q, r. То есть, $I_{x_i} = I_{x_i}(q, r)$, $I_u = I_u(q, r)$.

На рисунках Рис.1-2, Рис.5-6 приведены графики зависимостей I_{x_i} и I_u полученных в результате их компьютерного моделирования. На этих рисунках $I_{x_i}^{Д}, I_u^{Д}$ означает допустимые с точки зрения ПОТРЕБИТЕЛЯ значения критериев I_{x_1}, I_u.

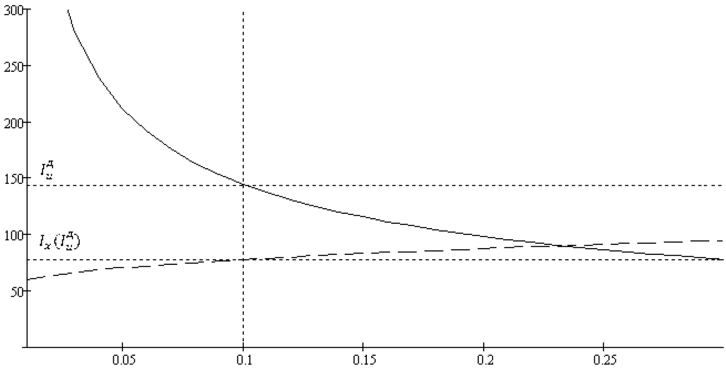

Рис. 1 – Графики зависимости интегральных критериев качества I_{x_1}, I_u от r (сплошная и пунктирная линии соответственно)

 ISSN 1560-8956

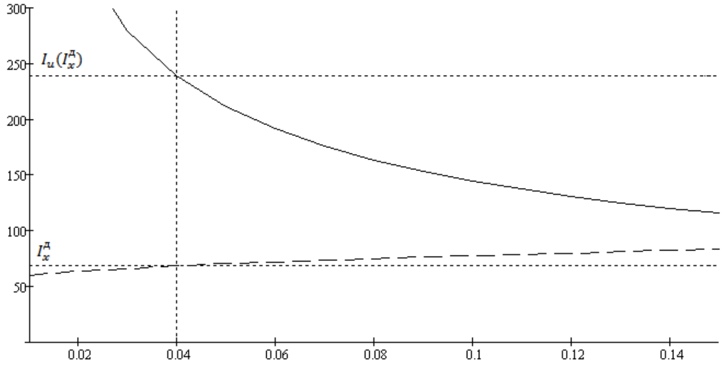

Рис. 2 – Графики зависимости интегральных критериев качества I_{x_1}, I_u от r (сплошная и пунктирная линии соответственно)

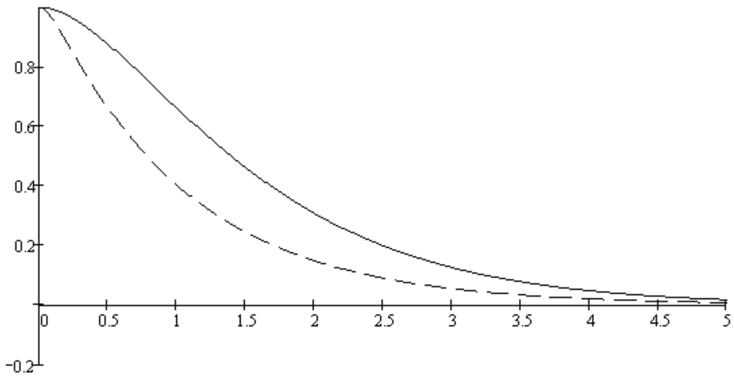

Рис. 3 – Графики первой переменной состояния при значениях $r = 0.1$ и $r = 0.04$ (сплошная и пунктирная линии соответственно)

Выводы

1. При использовании косвенных, в том числе и квадратичных критериев качества, для решения задач оптимального управления сами решения всегда являются компромиссными.
2. Компромиссные решения могут быть выбраны самими потребителями систем оптимального управления.
3. При использовании косвенных, в том числе и квадратичных критериев качества, сразу непосредственно не могут быть сформулированы постановки задач оптимального управления.

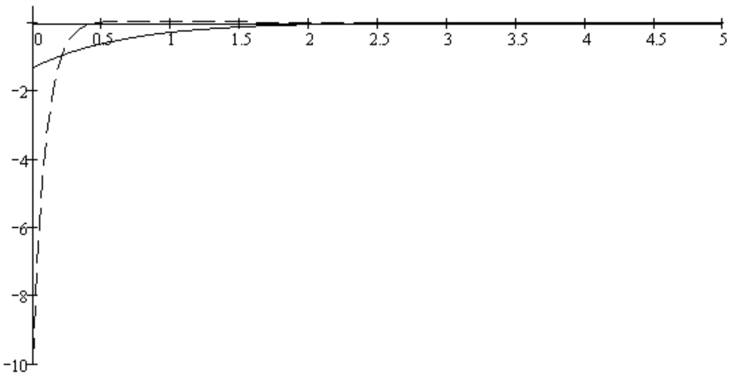

Рис. 4 – Графики управления состоянием при значениях $r = 0.1$ и $r = 0.04$ (сплошная и пунктирная линии соответственно)

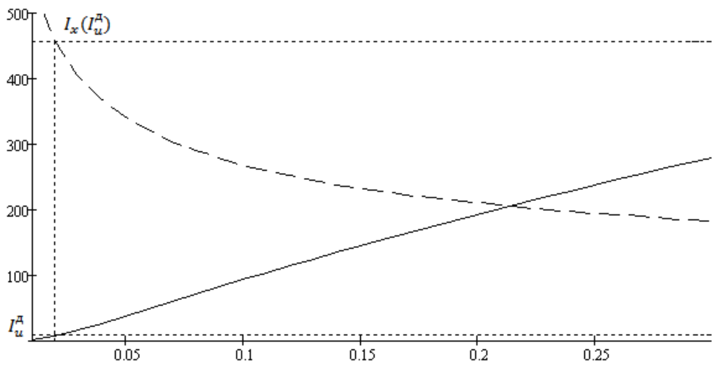

Рис. 5 – Графики зависимости интегральных критериев качества I_{x_1}, I_u от q (сплошная и пунктирная линии соответственно)

4. Постановки задач оптимального управления в общем виде и их решения при косвенных критериях качества позволяют синтезировать лишь структуру оптимальных регуляторов.

5. Значения параметров критериев качества, а значит и алгоритмов управления могут быть получены компромиссно совместно с потребителями систем только после решения задач оптимального управления, сформулированных на основе конкретных моделей объектов и ограничений и общего вида критериев качества.

6. Предложенная процедура определения значений параметров кри-

 ISSN 1560-8956

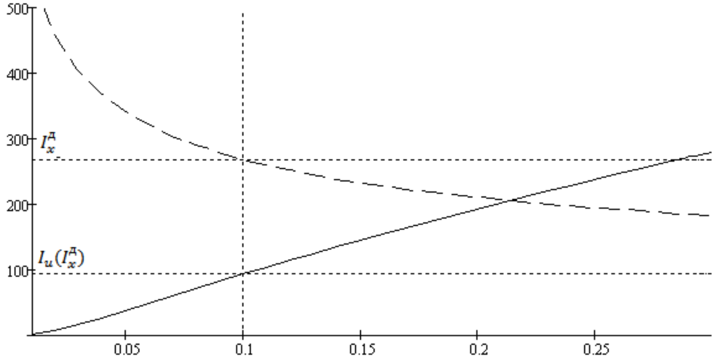

Рис. 6 – Графики зависимости интегральных критериев качества I_{x_1}, I_u от q (сплошная и пунктирная линии соответственно)

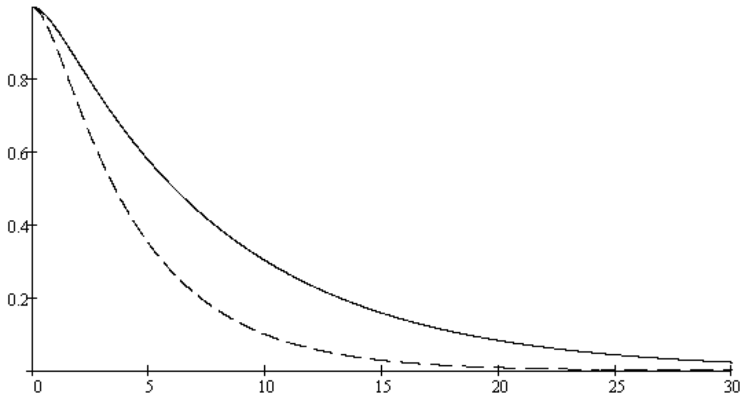

Рис. 7 – Графики первой переменной состояния при значениях $q = 0.01$ и $q = 0.1$ (сплошная и пунктирная линии соответственно)

терия качества, а значит и параметров оптимальных регуляторов, позволяет получить компромиссные решения. В случае если компромиссные решения не существуют, то для получения требуемого решения необходимо изменить сам объект управления.

Литература

1. Э.П. Сейдж, Ч.С. Уайт III. Оптимальное управление системами // Москва – 1982.

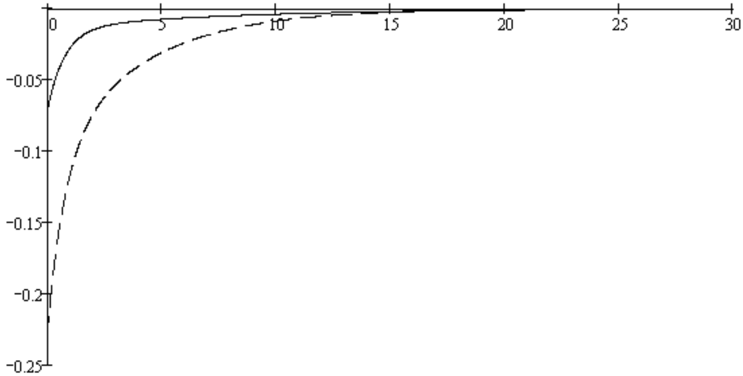

Рис. 8 – Графики управления состоянием при значениях $q = 0.01$ и $q = 0.1$ (сплошная и пунктирная линии соответственно)

2. А.Г. Кику, В.Ю. Шейко. Корректная постановка задачи фильтрации переменных состояния и подходы ее решения. // Адаптивные системы автоматического управления. – 2011. – № 18 (38).

3. В.Ю. Шейко. Оптимальное управление при помощи регуляторов, синтезированных на основе улучшенных фильтров переменных состояния // Адаптивные системы автоматического управления.- 2011.-№19 (39).

Отримано 19.04.2012 р.

 ISSN 1560-8956