УДК 681.876.2

А.А. Стенин, М.М. Ткач, Е.Ю. Мелкумян

ОБОБЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА БАЗЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИЙ УОЛША

Аннотация: Предложен обобщенный алгоритм идентификации линейных динамических систем, построенный на совместном использовании сплайн-функций и функций Уолша, который может быть использован не только для систем с сосредоточенными параметрами, но и для систем с распределенными параметрами. Важным преимуществом является то, что интеграл функций Уолша остается в классе функций Уолша, а интегрирование является неотъемлемой частью анализа и синтеза линейных динамических систем.

Ключевые слова: линейная динамическая система, алгоритм идентификации, сплайн-функции, функции Уолша.

Введение

Большой интерес к теории оценивания возник в результате необходимости повышения качества функционирования технических систем, а также вследствие существенного изменения возможностей применения теории оценивания, связанного с огромными возможностями современных вычислительных машин. С учетом последнего замечания несомненный интерес представляет для идентификации использование аппарата ортогональных базисных функций Уолша [1]. Во-первых, это обусловлено тем, что функции Уолша принимают значения только ± 1 и представляют собой аппарат, тесно связанный с двоичным разложением. В связи с этим применение систем функций Уолша позволяет широко и просто использовать цифровую технику при их формировании. Во-вторых, методы решения уравнений с переменными коэффициентами при помощи традиционных синосоидальных функций оказываются чрезвычайно сложными, а применение функций Уолша существенно упрощает процедуры анализа и синтеза систем с переменными параметрами, в том числе и процедуру идентификации. В данной статье подразумевается диодно упорядоченная система функций Уолша, т.е. упорядоченная в соответсвии с двоичным разложением номеров функций Уолша.

И, наконец отметим, что для разложения переменных по системе функций Уолша необходимо их аналитическое представление. В связи с этим в статье предлагается использовать полиномиальное приближение в виде сплайн-функций, в частности, кубических сплайнов.

Постановка задачи

Для модели линейной динамической системы, описываемой системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t),\ t \in [t_0, T_j] \tag{1}$$

где $\bar{x}(t)$ – n-мерный измеряемый вектор состояния, $\bar{u}(t)$ – m-мерный измеряемый вектор управления, $A(t)$ и $B(t)$ – соответственно $n \times n$ и $n \times m$ матрицы неизвестных параметров системы.

Необходимо, зная входную и выходную информацию о состоянии системы управления построить обобщенный алгоритм идентификации неизвестных параметров модели.

Анализ процессов идентификации

Известно [2], что для синтеза алгоритмов параметрической идентификации исходной информацией являются вид математической модели и наблюдения входных и выходных переменных. Во многих случаях исследователь также располагает априорной информацией о характере изменения оцениваемых параметров. Для анализа процессов параметрической идентификации выделим следующие наиболее характерные случаи.

1. Динамика объекта управления описывается системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, т.е. параметры модели (1) неизвестны, но постоянны во времени. В этом случае используем сплайн-функции только для получения аналитических выражений переменных состояния и их производных.

В этом и в последующих случаях оценку параметров будем производить, исходя из минимума квадрата невязки

$$I = \min \left\{ \int_{t_0}^{T_f} \left[\dot{\bar{x}}(t) - A(t)\bar{x}(t) - B(t)\bar{u}(t) \right]^2 dt \right\} \tag{2}$$

Заметим, что функционал (2) имеет простую структуру: это квадратичная форма относительно идентифицируемых параметров. В результате минимизация сводится к решению системы алгебраических уравнений, которая образуется в результате приравнивания нулю частных производных. Очевидно, что использование функционала (2) в зачах идентификации предполагает наличие известного аналитического выражения как для вектора переменных состояния $\bar{x}(t)$, так и для его производной $\dot{\bar{x}}(t)$.

Известные трудности, связанные с определением этих выражений, предлагается в данной работе преодолевать использованием математического аппарата сплайн-функций. Вопрос же о возможности разложения функций в ряд по системе функций Уолша сводится к выяснению возможности приближения данной функции кусочно-постоянной функцией.

2. Параметры объекта изменяются достаточно медленно по сравнению с длительностью переходных процессов, вызванных изменением входных воздействий. При оценке таких объектов можно применить

принцип квазистационарности. Это означает, что на некоторых интервалах времени $[t_l, t_l + T_l] \in [t_0, T_f]$ $(l = \overline{1, L})$ параметры объекта остаются неизменными и коэффициенты уравнения (1) можно считать постоянными, т.е. $a_{ij}(T_l) = \text{const}$, $b_{ik}(T_l) = \text{const}$, $(i, j = \overline{1, n})$ $(k = \overline{1, m})$.

Здесь L – количество интервалов квазистационарности.

Переход от системы с переменными параметрами к системе с кусочно-постоянными параметрами осуществляется на основе известной теоремы, в соответствие с которой решение системы дифференциальных уравнений (1) с непрерывными коэффициентами a_{ij}, b_{ik} может быть с любой степенью точности получено на заданном конечном интервале $[t_0, T_f]$ путем разбиения последнего на конечное число подинтервалов $[t_l, t_l + T_l]$ и замены коэффициентов внутри каждого подинтервала постоянными, равными любым значениям соответствующих переменных коэффициентов внутри или на границе рассматриваемых интервалов.

В этом случае сплайн-функции также используются только для получения аналитических выражений переменных состояния и их производных, но оценка идентифицируемых параметров производится согласно критерию (2) на каждом из подинтервалов их постоянства.

3. Параметры объекта носят существенно нестационарный характер. В этом случае, используя сплайн-приближение и ортогональное разложение всех известных и неизвестных функций модели системы (1) в ряд Уолша, сводим задачу идентификации к определению постоянных коэффициентов ряда Уолша, обеспечивающих минимум критерию (2).

Во всех указанных случаях либо приняв предположение о стационарном или квазистационарном характере изменения параметров, либо при нестационарном характере изменения параметров воспользовавшись ортогональным разложением в ряд Уолша, приходим к модели либо с постоянными параметрами на подинтервалах квазистационарности или на всем интервале, либо к модели с постоянными коэффициентами ряда Уолша, которые необходимо оценить. Т.е. во всех указанных выше случаях, алгоритмы идентификации сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$C\bar{g} = \bar{d}, \tag{3}$$

представляющей собой систему с приближенно заданными исходными данными (коэффициенты матриц Cи $\bar{d}$). Погрешность задания матриц C, $\bar{d}$ зависит от погрешности приближения вектора состояния системы (1) сплайнами, выбранного объема системы ортонормированных функций Уолша и вычислительных погрешностей. Как известно [3], решение подобных систем традиционными способами (метод Гаусса, метод наименьших квадратов и др.) часто приводит к неустойчивам решениям даже при малых изменениях входных данных. Устойчивое решение систем с приближенно заданными входными данными можно получить, используя известный регуляризующий алгоритм А.Н. Тихонова [4].

Следует также отметить, что поскольку интервалы идентификации отличаются по длительности, целесообразно привести их к нормированному интервалу $[0, 1]$. Кроме того, для получения аналитических выражений переменных состояния, взятых в дискретные моменты времени при условии, что вектор состояния является полностью изменяемым, как уже упоминалось ранее, будем использовать кубические сплайны.

Обобщенный алгоритм идентификации на базе сплайн-функций и функций Уолша

Учитывая вышеизложенное, алгоритм идентификации на базе сплайн-функций и функций Уолша можно представить следующим образом:

Шаг 0. Вводим безразмерное время τ равное $\tau = \frac{t-t_0}{T_f - t}$ и приводим интервал управления $[t_0, T_f]$ к нормированному интервалу $[0, 1]$.

Шаг 1. На нормированном интервале $[0, 1]$ задаем сетку $< \tau_i >$ $(i = \overline{0, N}; t_N = 1)$ с шагом Δ_N. Определяем значения вектора состояния $\bar{x}(\tau_i)$ и управления $\bar{u}(\tau_i)$.

Шаг 2. На выбранной сетке производим интерполяцию, получая аналитическое выражение для оценки вектор-функции состояния и управления соответственно в виде кубических сплайнов $\overline{S}_x(\tau)$ и $\overline{S}_u(\tau)$.

Шаг 3. Для найденных функций $\overline{S}_x(\tau)$ и $\overline{S}_u(\tau)$ и неизвестных (в случае 2 и 3 нормированных по времени) параметров системы применяем ортогональное разложение в ряд Уолша.

Шаг 4. Нормируем по времени исходную систему (1) и приводим ее к интегральному виду.

Шаг 5. Используя свойства функций Уолша, заменяем в преобразованной форме функции Уолша на квадратную операционную матрицу интегрирования вида $P_{(N\times N)}$ размерностью $N = 2^n$ [1].

Суть данного свойства в том, что интеграл функции Уолша остается в классе системы функций Уолша, т.е.

$$\int_0^x \bar{\varphi}_N(x)dx \approx P_{(N\text{X}N)}\bar{\varphi}_N(x) \tag{4}$$

где $\bar{\varphi}_N(x) = \{\varphi_0(x) \ldots \varphi_N(x)\}$ – вектор, компонентами которого являются функции Уолша.

Сокращая левую и правую часть полученного уравнения на вектор выбранной системы функций Уолша, получаем систему алгебраических уравнений.

Шаг 6. Полученную алгебраическую систему уравнений решаем относительно неизвестных параметров, представленных совокупностью коэффициентов разложения интервала $[t_0, T_f]$, пересчитывая соответствующим образом найденные параметры модели.

Примечание 1. Количество узлов интерполяции и членов разложения в ряд Уолша выбираются исходя из сравнения выхода полученной математической модели с выходом реальной системы.

 ISSN 1560-8956

Примечание 2. Для систем с распределенными параметрами сплайн-интерполирование осуществляется двумерным сплайном [5] и соответственно для ортогонального разложения известных и неизвестных функций используется двойной ряд Уолша.

Заключение

Для широкого класса линейных динамических систем, в том числе нестационарных и с распределенными параметрами предложен обобщенный алгоритм идентификации, достаточно легко реализуемый в реальных условиях эксплуатации технических систем.

Литература

1. Chen C. F., Hsiao C. H. Walsh series analysis in optimal control // Int. g. Control.- 1979. – v.21.-p.p.881-897c.
2. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир. - 1975. – 684 с.
3. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука. - 1987. – 240 с.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука. - 1986. – 288 с.
5. Chang Y. F. Analisis and identification distributedsystem via double general polynomials // Int. g. Control.- 1986. – p.p.395 - 405 c.

Отримано 17.02.2012 р.