

УДК 681.51.015

А.М. Сільвестров, Л.Ю. Спінул, О.М. Скринник

## СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ СТАТИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ ДИНАМІЧНОГО ОБ'ЄКТА

*Анотація:* У статті розглянуто нові підходи до ідентифікації нелінійної статичної складової моделі Гамерштейна, які дозволяють забезпечити коректність задачі ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів.

*Ключові слова:* модель Гамерштейна, кусково-аналітична апроксимація, структурно-параметрична ідентифікація.

### Вступ

В теорії ідентифікації, як і в математиці, можна сформулювати два види умов [1]: необхідні – це завдання апроксимації з точністю до  $\varepsilon$  “поведінки” об'єкта ідентифікації моделлю довільної структури; достатні, якщо на додаток до необхідних потрібне виконання умови близькості структури і параметрів моделі до структури і параметрів, що реально існує в об'єкті відображення вхідних змінних у вихідні. Наприклад, визначення балансувальних (статичних) нелінійних залежностей  $f(x)$  з динаміки об'єкта, фізика якого відповідає моделі Гамерштейна [2]:

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \frac{d^i y}{dt^i} = f[x(t)], \quad (1)$$

де  $n$ ,  $\beta_i$ ,  $f(x)$  невідомі,  $x(t)$  і  $y(t)$  вимірюються з випадковими збуреннями на обмеженому нестационарності, вартістю та іншими причинами інтервалі часу  $T$ .

### Постановка задачі

Реальна ситуація, як правило, характеризується недостатньою статистичною показовістю вибірки даних, неавтономністю, нелінійністю, квазістационарністю об'єкта ідентифікації та, як наслідок, наближеністю його моделі. Прагнення підвищити адекватність локальних моделей шляхом звуження просторово-часової області поведінки об'єкта приводить до зростання у вимірах співвідношення “шум - сигнал”. Прагнення врахувати нелінійність і параметризувати її різко розширює розмірність вектора невідомих коефіцієнтів. Тобто в обох випадках має місце некоректність [3] задачі ідентифікації. Тому необхідно розробити такі методи, які б дозволяли забезпечити коректність задачі ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів в реальних умовах.

© А.М. Сільвестров, Л.Ю. Спінул, О.М. Скринник, 2014

## Непараметричне оцінювання нелінійної статичної складової з динаміки об'єкта ідентифікації

В обмеженій просторово-часовій області  $G$  нелінійна динаміка реального об'єкта, для обмежених швидкостей  $\dot{X}^*(t)$  змінних, з точністю до  $\varepsilon^*(t)$ , може бути подана у вигляді

$$\dot{X}^*(t) = AX^*(t) + F[U^*(t)] + \varepsilon^*(t) \quad (2)$$

або, відносно  $i$ -ої складової  $x_i^*(t)$  вектор-функції стану  $X(t)$  у вигляді моделі Гамерштейна (1):

$$a_n \frac{d^n x_i^*}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_i^*}{dt^{n-1}} + \dots + x_i^*(t) = f[U^*(t)], \quad (3)$$

де  $a_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  і  $f(U^*)$  невідомі.

Завдання полягає у визначенні статичної нелінійної залежності

$$x_i^*(t) = f(U^*) \quad (4)$$

за умови невідомою  $a_j$  з довільного динамічного режиму зміни  $x_i^*(t)$  в обмеженій  $G$ -області.

Довільність режиму не гарантує лінійної незалежності змінних при коефіцієнтах  $a_j$  і, як наслідок, невиродження інформаційної матриці [4]. Ще більша некоректність виникає у традиційному підході при апроксимації  $f(u)$  степеневим поліномом від  $u$

$$\hat{f}(U) = \sum_{l=0}^m b_l U^l \quad (5)$$

або системою інших квазіортогональних функцій

$$\hat{f}(U) = \sum_{l=0}^m b_l \varphi_l(U) \quad (6)$$

коли з рівняння (3) у вигляді

$$\varepsilon(t) = x_i(t) - \sum_{l=0}^m b_l \varphi_l[U(t)] + \sum_{j=1}^n a_j \frac{d^j x_i(t)}{dt^j} \quad (7)$$

за неточних  $x_i(t)$ ,  $U(t)$  та їх похідних необхідно визначити  $m+n$  невідомих параметрів, де числа  $m$  і  $n$  також невідомі. Нехай, наприклад, в (3) лінійно незалежні хоча б перша і друга похідні від  $x_i^*(t)$ . Тоді для подолання проблеми некоректності скористаємося апріорі відомою властивістю гладкості залежності  $f(U)$ . Будемо оцінювати коефіцієнти рівняння (3) не з умови мінімуму середнього квадрата похибки (7), а з умови гладкості залежності  $f(U)$  [5].

$$(a_1, a_2) = \arg \min_{(a_1, a_2)} \sum_{k=1}^N \left( \frac{d^r x_{\text{ек}}(t_k)}{dU^r} \right)^2, \quad (8)$$

де  $r$  характеризує ступінь гладкості  $f(U)$ .

Тоді скомпенсоване по динаміці значення  $x_i(t_k)$  дорівнюватиме

$$x_{ек}(t_k) = x(t_k) - a_1 \frac{dx_i(t_k)}{dt} - a_1 \frac{d^2 x_i(t_k)}{dt^2} \quad (9)$$

Практично в рівнянні (8) замість похідних беруться кінцеві різниці відповідного порядку, які обчислюються за попередньо згладженим за допомогою сплайнів і впорядкованим по зростанню  $U$  масивам даних.

Для ілюстрації ефективності такого підходу розглянемо тестовий приклад. Нехай

$$f(U) = 4U - 60 \sin(0.065U). \quad (10)$$

Вхідний вплив представляє собою послідовність сходинок:

$$U(t) = U_{\max} \left[ -1 + \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{16} 1(t - k\Delta t) \right].$$

На точне значення  $x_i^*(t)$  накладено 20 % “білий шум”. Результат спільного МНК-оцінювання коефіцієнтів  $b_i$  і  $a_1, a_2$  наведено на рис. 1.

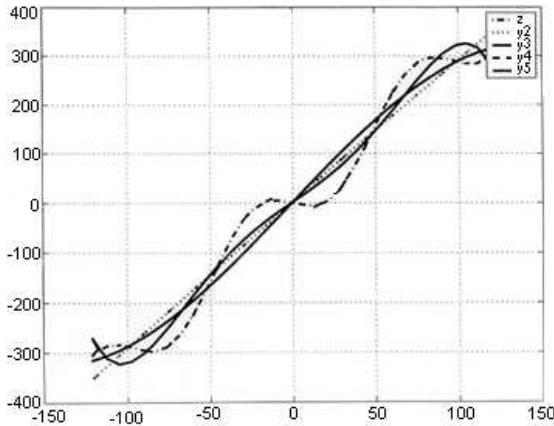
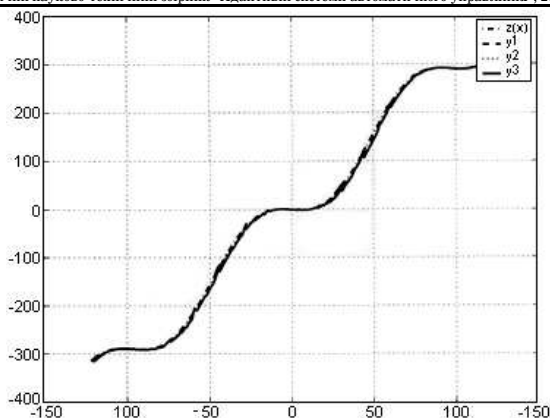


Рис. 1 – МНК-апроксимація нелінійності (10)  $f(U)$  (пунктир) степеневими поліномами II-V порядків

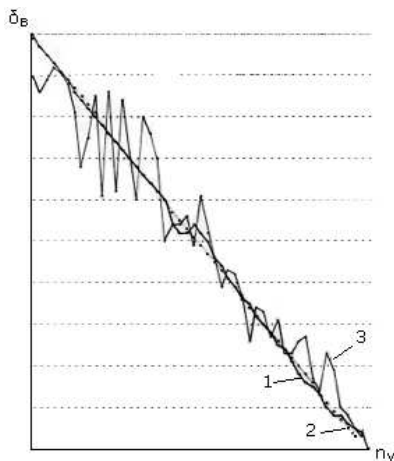
Результат непараметричного оцінювання нелінійності (10) з умови (8) гладкості  $f(U)$  для  $r = 1, 2, 3$  наведено на рис. 2.

Як випливає із зіставлення графіків на рис. 1 і рис. 2 непараметрична оцінка  $f(U)$  з корекцією (9) динаміки з умови (8) істотно ближче до дійсної  $f(U)$ , ніж параметрична МНК-оцінка при спіль-

Рис. 2 – Непараметричне оцінювання нелінійності  $f(U)$ 

ному оцінюванні коефіцієнтів лінійної та нелінійної частини моделі Гамерштейна (7).

Як приклад практичного застосування на рис. 3 наведено одну з балансувальних залежностей літака М-17, отриману з умови (8) крива (1) і апроксимовану прямою (2), а також крива (3), яка тільки впорядкована за  $n_y$  і побудована без компенсації динаміки.

Рис. 3 – Залежність витрат руля висоти  $\delta_B$  від перевантаження  $n_y$

## Структурно – параметричне оцінювання непараметричної моделі статичної нелінійної складової об'єкта

Якщо нелінійність  $y(x)$  та  $dy/dx$  неперервні, то можливий аналітичний опис  $y(x)$ . Більшість нелінійних елементів реальних систем мають кусково-неперервну залежність  $y(x)$ . Під час аналізу і синтезу систем з такими елементами мають місце незручності, пов'язані з врахуванням граничних умов переходу від однієї області змінних  $x, y$  в сусідню. Мають місце зміна структури нелінійності і, якщо їх в досліджуваній системі декілька, можуть виникати розриви  $y(x)$  та дельта-функції похідних  $dy/dx, d^2y/dx^2$ . В той час, як в реальній системі ці явища відсутні. Ці та інші причини вимагають мати аналітичну модель  $y(x)$  в усій області зміни  $x, y$ , щоб виключити складну логіку зміни структури  $y(x)$  та некоректності диференціювання  $dy/dx, d^2y/dx^2$  в точках стиковки.

Складна кусково-аналітична нелінійність може бути представлена множиною аналітичних залежностей, справедливих за умови що змінні  $x, y$  знаходяться в  $i$ -й області простору  $i = \overline{1, n}$ . При переході з  $i$ -ої в  $i + 1$ -ту чи  $i - 1$ -ту область  $y_i(x_i)$  повинна змінюватись на  $y_{i+1}(x_{i+1})$  чи  $y_{i-1}(x_{i-1})$ . Таку умову можна забезпечити, якщо залежність  $y(x)$  подати зваженою функціями ваги  $\eta_i(x)$  сумою  $y_i(x_i)$ :

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x) \cdot y_i(x), \quad (11)$$

де

$$\eta_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (x) \text{ належать } i\text{-й області,} \\ 0, & \text{якщо не належать.} \end{cases}$$

Для забезпечення гладкості переходу в сусідню область функції ваги  $\eta_i(x)$ , повинні бути також гладкими, а не релейними. Аналогом таких функцій можуть бути частотні фільтри верхніх, середніх, нижніх частот. Тож, якщо покласти замість частоти  $\omega$  змінну  $x$  то без суттєвих змін будемо мати можливість використати добре розвинену теорію частотних фільтрів для побудови функцій ваги  $\eta_i$ . На відміну від фізично реалізуємих фільтрів, де суттєвою є вимога нескладності, математично реалізуємі – позбавлені цієї вимоги. Тут, наприклад нема необхідності використовувати близькі до ідеальних фільтри Баттерворда. Достатньо представити близькі до ідеального фільтри, як каскад з  $m$  найпростіших фільтрів  $I$ -го порядку. Так для виділення області  $x$  від 0 до  $x = a$ , візьмемо  $m$  фільтрів нижніх частот:

$$\eta_1(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + a^{-2}x^2}} \right)^m, \quad x \in [0, a], \quad a > 0, \quad (12)$$

де  $m$  береться за умови близькості з точністю до  $\varepsilon$  моделі  $\hat{y}(x)$  до реальної залежності  $y(x)$ . Тобто  $m$  збільшується від 1 до значення  $m^*$  за якого міра близькості  $y(x)$  до  $\hat{y}(x)$  буде близька до  $\varepsilon$ .

Для виділення області  $x$  від якогось  $x = a$  до  $x \rightarrow \infty$  візьмемо  $m$  фільтрів верхніх частот:

$$\eta_2(x) = \left( \frac{|a^{-1}x|}{\sqrt{1+a^{-2}x^2}} \right)^m, \quad x \in [0, \infty], \quad x \in [-a, -\infty], \quad (13)$$

де  $m$  підбирається аналогічно.

Для виділення області  $x$  від  $x = a$  до  $x = b$ ,  $b > a$ , візьмемо  $m$  смугових фільтрів, побудованих з двох фільтрів нижніх частот  $a$  і  $b$ :

$$\eta_3(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{1+b^{-2}x^2}} \right)^m - \left( \frac{1}{\sqrt{1+a^{-2}x^2}} \right)^m, \quad x \in [a, b] \quad (14)$$

де  $m$  підбирається аналогічно.

Наведемо для наочності приклад аналітичного опису основної кривої намагнічування феромагнітного осердя котушки індуктивності. Згідно до рис. 4 маємо три області аналітичного опису  $y(x)$ :

$$y = -y_{\max}, \quad -\infty < x \leq a_2;$$

$$y = \beta_1 x + \beta_2 x^3, \quad -a_2 < x \leq a_1; \quad (15)$$

$$y = y_{\max}, \quad a_1 \leq x < \infty.$$

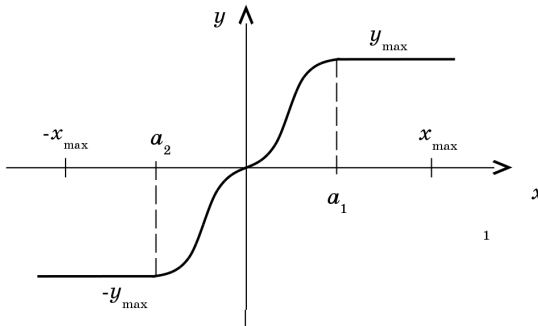


Рис. 4 – Кусково-аналітична залежність  $y(x)$

В необмеженій області змінних  $x$  (фізично це може бути напруженість  $H$  магнітного поля, чи магніторухійна сила  $I \cdot W$ , чи магнітна напруга  $H \cdot l$ ) залежність  $y(x)$  (магнітної індукції  $B$  чи магнітного потоку  $\Phi$ ) може бути представлена сумою трьох моделей (15) з

ваговими функціями (13) і (14). При цьому слід ввести нову незалежну змінну  $z$ , яка б знакозмінну змінну  $x$  в області  $(-x_{\max}, +x_{\max})$  перетворювала в змінну одного знаку “плюс”:

$$z = x_{\max} - x. \quad (16)$$

Тоді аналітична у всьому діапазоні  $x$  залежність  $y(x)$  набуває вигляду

$$y(x) = -y_{\max} \cdot \eta_1(z) + y_{\max} \cdot \eta_2(z) + (\beta_1 \cdot x + \beta_2 \cdot x^2) \cdot \eta_3(z), \quad (17)$$

$$\text{де } \eta_1(z) = \left( \frac{1}{\sqrt{1+(x_{\max}+a_2)^{-2}z^2}} \right)^m, \quad \eta_2(z) = \left( \frac{|(x_{\max}+a_2)^{-1}z|}{\sqrt{1+(x_{\max}+a_2)^{-2}z^2}} \right)^m,$$

$$\eta_3(z) = \eta_1(z, a_1) - \eta_1(z, a_2). \quad (18)$$

Якщо залежність  $y(x)$  (рис. 4) симетрична, тобто  $a_1 = -a_2 = a$ , то

$$y(x) = \bar{y}_{\max} \cdot \left[ \left( \frac{|(x_{\max}+a)^{-1}z|}{\sqrt{1+(x_{\max}+a)^{-2}z^2}} \right)^m - \left( \frac{1}{\sqrt{1+(x_{\max}+a)^{-2}z^2}} \right)^m \right] + \\ + (\beta_1 \cdot x + \beta_2 \cdot x^2) \cdot \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{1+(x_{\max}+a)^{-2}z^2}} \right)^m - \left( \frac{1}{\sqrt{1+(x_{\max}-a)^{-2}z^2}} \right)^m \right]. \quad (19)$$

Аналітичність і гладкість моделі (19) дозволяє за необхідності, якщо  $x$  відома функція часу  $x(t)$ , обчислити аналітичні похідні  $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$  і т.і. При цьому для кінцевого значення числа  $m$  ці похідні будуть гладкими функціями часу, які можна обчислити вручну або за відповідних програм на ПЕОМ.

За 1-ою теоремою Веерштраса залежність  $y(x)$  (рис. 4) може бути представлена в області  $\pm a$  степеневим поліномом. Однак для достатньо широкої області  $(\pm x_{\max})$ , за однакової середньоквадратичної похибки апроксимації  $\varepsilon$ , модель (19) буде значно простішою степеневого поліному. Крім того, якщо вимірювання  $x, y$  зроблені з кроком  $\Delta x$ , то за високих степенів поліному з'являються пульсації  $\hat{y}(x)$  в інтервалах  $\Delta x$  між вимірюваннями.

Визначивши, таким чином, непараметричну модель статичної нелінійної складової моделі Гамерштейна (2) з довільної динаміки об'єкта ідентифікації, за умови компенсації (9) невідомої динаміки, та виконавши структурно-параметричну апроксимацію (11) цієї параметричної моделі нелінійності аналітичною в усьому діапазоні її існування моделлю, можна, за необхідністю, перейти до коректного визначення [3], лінійної динамічної складової моделі Гамерштейна, якщо тепер уже відомий сигнал  $f[U * (t)]$  на вході динамічної складової моделі буде достатньо інформативним [6].

## Висновок

Поданий в даній статті підхід до ідентифікації нелінійної статичної складової моделі Гамерштейна, який полягає в послідов-

ному використанні метода непараметричної, а потім структурно-параметричної ідентифікації, а далі, за необхідністю, і коректної ідентифікації динамічної складової [6], дає можливість ефективно вирішувати апріорі складну і, як наслідок, некоректну задачу ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів за реальними даними активного чи пасивного експерименту на обмеженій виборці даних.

### **Список використаних джерел**

1. Сильвестров А.Н. Два альтернативных подхода к идентификации реальных объектов // Проблемы управления и информатики. – 1996, №6. – С. 54–65.
2. K.S. Narendra, P.G. Gallman. An iterative method for identification of nonlinear systems using a Hammerstein model. IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC11, p. 546, 1966.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М: Наука, 1979. – 286 с.
4. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. М: Физматгиз, 1963. – 625 с.
5. Пухов Г.Е., Хатиашвили Ц.С. Модели технологических процессов. – К: Техніка, 1974. – 223 с.
6. Сильвестров А.Н., Чинаев П.И. Идентификация и оптимизация автоматических систем. – М: Энергия, 1983. – 200 с.

Отримано 25.03.2014 р.