УДК 621-50

А.А. Стенин, Е.Ю. Мелкумян, Ю.В. Писаренко, М.А. Солдатова

АДАПТИВНАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ СПЛАЙН-ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Аннотация: В данной статье предлагается адаптивный поход к определению переменных по длительности рабочих подинтервалов параметрической идентификации линейных квазистационарных систем, позволяющий существенно повысить точность оценки параметров, что подтверждается приведенным практическим примером.

Ключевые слова: нестационарные системы, квазистационарность параметров, параметрическая идентификация, сплайн-функции, адаптивный алгоритм.

Введение

Известно, что все реальные объекты управления в той или иной мере являются нелинейными и нестационарными. Задача идентификации параметров таких объектов представляет собой сложную математическую проблему, решение которой до настоящего времени получено для некоторых частных случаев [1].

В частности, большой класс объектов управления позволяет принять в качестве математической модели нестационарную и линеаризованную систему уравнений. Обобщенный алгоритм идентификации линейных динамических систем дан авторами в работе [2], однако для конкретной динамической системы из этого класса этот алгоритм имеет свои особенности при его практическом применении. Для синтеза алгоритмов параметрической идентификации исходной информацией являются вид математической модели и наблюдения входныхи выходных переменных. Во многих случаях исследователь также располагает априорной информацией о характере изменения оцениваемых параметров, при этом можно выделить следующие наиболее характерные случаи.

1. Параметры объекта изменяются достаточно медленно по сравнению с длительностью переходных процессов, вызванных изменением входных воздействий. При оценке параметров таких объектов можно применить принцип квазистационарности [3]. Это означает, что на некоторых интервалах времени параметры объекта остаются неизменными.

2. Параметры объекта носят существенно нестационарный характер.

3. Параметры объекта изменяются как во времени, так и в пространстве.

Предметная область исследований в данной статье ограничена классом непрерывных линейных нестационарных систем (ЛНС) с монотонными и знакопостоянными параметрами, к которым можно применить указанный выше принцип квазистационарности.

Математическая модель такой системы может быть представлена в виде

$$\dot{x}\left(t\right)=A\left(t\right)x\left(t\right)+B\left(t\right)u\left(t\right),\ t\in\left[t_{0},T_{f}\right],\ x\left(t_{0}\right)=x^{\left(0\right)} \tag{1}$$

где $A\left(t\right)=\left\{a_{ij}\left(t\right)\right\}$, $B\left(t\right)=\left\{b_{ik}\left(t\right)\right\}$ – матрицы размера $n\times n$ и $n\times m$ соответственно, элементы которых являются знакопостоянными.

$$\operatorname{sign}\left[a_{ij}\left(t\right)\right]=\mathrm{const},\ \operatorname{sign}\left[b_{ik}\left(t\right)\right]=\mathrm{const}, \tag{2}$$

монотонными

$$\operatorname{sign}\left[da_{ij}\left(t\right)/dt\right]=\mathrm{const},\ \operatorname{sign}\left[db_{ik}\left(t\right)/dt\right]=\mathrm{const} \tag{3}$$

функциями, имеют непрерывные первые производные и ограниченные области определения на интервале времени $\left[t_{0},T_{f}\right]$.

Постановка задачи

Для квазистационарной системы вида (1)–(3) весь интервал наблюдения $\left[t_{0},T_{f}\right]$ некоторым образом разбивается на подинтервалы $\left[t_{l},t_{l}+T_{l}\right]$, где коэффициенты $a_{ij}\left(T_{l}\right)$, $b_{ik}\left(T_{l}\right)\left(i,j=1,n\right)$, $\left(k=1,m\right)$ матриц $A\left(t\right)$, $B\left(t\right)$ соответственно, можно считать неизменными. Идентификация осуществляется на каждом из интервалов постоянства параметров, при этом для последующего интервала заново оценивается матрица параметров, тогда как данные, не относящиеся к рассматриваемому подинтервалу, полностью игнорируются. Очевидно, что коэффициенты $a_{ij}\left(T_{l}\right)$, $b_{ik}\left(T_{l}\right)\left(l=1,L\right)$ на отдельных подинтервалах могут быть различными. Для системы (1)–(3) при условии, что вектор управления $u\left(t\right)$ задан, а вектор-функция состояния $x\left(t\right)$ определена на отрезке $\left[t_{l},t_{l}+T_{l}\right]$ своими значениями $x^{\left(i\right)}x\left(t_{i}\right)$, $t_{i}\in\left[t_{l},t_{l}+T_{l}\right]\left(i=0,N\right)$, задача идентификации состоит в нахождении оценок $\hat{a}_{ij}^{l}=\hat{a}_{ij}\left(T_{l}\right)$, $\hat{b}_{ik}^{l}=\hat{b}_{ik}\left(T_{l}\right)$ $\left(i,j=1,n\right)$, $\left(k=1,m\right)$ неизвестных параметров $a_{ij}\left(T_{l}\right)$, $b_{ik}\left(T_{l}\right)$ матриц A и B, обеспечивающих минимум квадратичного критерия (5) внутри рассматриваемого подинтервала $\left[t_{l},t_{l}+T_{l}\right]$.

Модель (1)–(3) в общем случае имеет $n\times\left(n+m\right)$ идентифицируемых параметров, которые могут быть представлены матрицей размера $\left(n+m\right)\times n$

$$G\left(t\right)=\left[g^{\left(1\right)}\ldots g^{\left(i\right)}\ldots g^{\left(n\right)}\right], \tag{4}$$

где $g^{T\left(i\right)}=\left\{a_{i1}\left(t\right),\ldots,a_{ij}\left(t\right),\ldots a\left(t\right),b_{i1}\left(t\right),\ldots,b_{ik}\left(t\right),\ldots,b_{\Im}\left(t\right)\right\}$ – $\left(n+m\right)$-мерный вектор, соответствующий i-ым строкам матриц $A\left(t\right)$, $B\left(t\right)$.

Таким образом, задачу идентификации ЛНС (1)–(3) определим как нахождение оценки $G\left(t\right)$ матрицы параметров (4), обеспечивающей минимум критерия невязки

$$Q(\hat{G}) \min_{G} Q(G) = \min_{G} \left\{ \int_{t_0}^{T_f} \left[\dot{\overline{x}}(t) - A(t)\overline{x}(t) - B(t)\overline{u}(t) \right]^2 dt \right\}. \qquad (5)$$

Решение задачи

Используя, согласно работе авторов [2], кубические сплайны для интерполирования значений вектора $\bar{x}^{(i)}$ $(i = 0, N)$

$$\hat{x}_1(t) \to S_1(t), \ldots, \hat{x}_i(t) \to S_i(t), \ldots, \hat{x}_n(t) \to S_n(t)$$

получаем аналитическое выражение для оценки $\hat{\bar{x}}$ вектор-функции состояния, осуществив таким образом переход от $\bar{x}(t_i)\,(i = 0, N)$ к $\bar{S}(t)$, где $\bar{S}(t)$ – n-мерная вектор-функция, каждая составляющая $\bar{S}_i(t)\,(i = 1, N)$ которой является кубической сплайн-функцией. В силу свойства дифференцируемости сплайнов определяем приближение $\dot{x}_i(t) - \widehat{\dot{x}}_i(t)$ как производную от сплайна $S_i(t) - S_l(t)$. Тогда модель системы (1)–(3) имеет вид

$$\dot{S}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^l S_j(t) + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}^l u_k(t)\,(i = \overline{1,n}),\ t \in [t_l, t_l + T_l] \qquad (6)$$

а интегральный квадратичный критерий невязки вида (5) модели (1)–(3) может быть представлен как

$$Q_i\left(g_l^i\right) = \int_{t_l}^{t_l+T_l} \left[\dot{S}_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^l S_j(t) - \sum_{k=1}^{m} b_{ik}^l u_k(t) \right]^2 dt\ \left(i = \overline{1,n}\right) \qquad (7)$$

Используя необходимые условия минимума функционала (7), дифференцируем невязки $Q_i\left(i = \overline{1,N}\right)$ по элементам матриц A и B и приравниваем нулю

$$\frac{\partial Q_i\left(g_l^{(i)}\right)}{\partial a_{ij}^l} = 0,\ \frac{\partial Q_i\left(g_l^{(i)}\right)}{\partial b_{ik}^l} = 0\ \left(j = \overline{1,n}\right), \left(k = \overline{1,m}\right)$$

Тогда для минимума Q_i невязки, получаем

$$\begin{array}{l} \int\limits_{t_l}^{t_l+T_l} \left[\dot{S}(t) - \sum\limits_{j=1}^{n} \widehat{a}_{ij}^l S_j(t) - \sum\limits_{k=1}^{m} \widehat{b}_{ik}^l u_k(t) - S_j(t) \right] dt = 0, \\ \int\limits_{t_l}^{t_l+T_l} \left[\dot{S}_i(t) - \sum\limits_{j=1}^{n} \widehat{a}_{ij}^l S_j(t) - \sum\limits_{k=1}^{m} \widehat{b}_{ik}^l u_k(t) - u_k(t) \right] dt = 0, \\ (j = \overline{1,n}),\ (k = \overline{1,m}) \end{array}.$$

После ряда преобразований для определения вектора оценок $g_l^{(i)}$ на подинтервале $[t_l, t_l + T_l]$ получим систему линейных алгебраических уравнений

$$C^{(i)}\bar{g}_l^{(i)} = d^{(i)} \tag{8}$$

Здесь $C^{(i)}$ – матрица размера $(n+m)\times(n+m)$, имеющая блочную структуру

$$C^{(i)} = \begin{bmatrix} C^{(i)}_{(n\times n)} & \vdots & C^{(i)}_{(n\times m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C^{(i)}_{(m\times n)} & \vdots & C^{(i)}_{(m\times m)} \end{bmatrix}$$

элементы которой определяются следующим образом:

$$C^i_{(n\times n)} = \{c^{(i)}_{i_1,j}\},\; c^{(i)}_{i_1,j} = \int\limits_{t_l}^{t_l+T_l} S_{i_1}(t)S_j(t)dt, \tag{9}$$

$$C^i_{(n\times m)} = \{c^{(i)}_{i_1,k}\},\; c^{(i)}_{i_1,k} = \int\limits_{t_l}^{t_l+T_l} S_{i_1}(t)u_k(t)dt, \tag{10}$$

$$C^i_{(m\times n)} = \{c^{(i)}_{kj}\},\; c^{(i)}_{kj} = \int\limits_{t_l}^{t_l+T_l} u_k(t)S_j(t)dt, \tag{11}$$

$$C^i_{(m\times m)} = \{c^{(i)}_{i_2,k}\},\; c^{(i)}_{i_2,k} = \int\limits_{t_l}^{t_l+T_l} u_{i_2}(t)u_k(t)dt; \tag{12}$$

$\overline{d}^{(i)T} = \{d_1^{(i)},\ldots,d_n^{(i)},d_{n+1}^{(i)}\ldots,d_{n+m}^{(i)}\}$ – $(n+m)$-мерный вектор свободных членов, элементы которого определяются следующим образом:

$$d^{(i)}_{l_1} = \int\limits_{t_l}^{t_l+T_l} S_{l_1}(t)\dot{S}_i(t)dt\,(l_1=\overline{1,n}), \tag{13}$$

$$d^{(i)}_{l_2} = \int\limits_{t_l}^{t_l+T_l} u_{l_2-n}(t)\dot{S}_i(t)dt\,(l_2=\overline{n+1,n+m}), \tag{14}$$

$\bar{g}_l^{(i)} = \left\{a^l_{il},\ldots,a^l,b^l_{il},\ldots,b^l_{n+m}\right\}$ – $(n+m)$-мерный вектор оценок неизвестных параметров на интервале квазистационарности $[t_l,t_l+T_l]$.

Заметим, что входные данные (коэффициенты матрицы и правой части) системы (8) определяются с погрешностью, зависящей от погрешности приближения состояния системы (1)–(3) сплайнами и аппроксимации соотношений (9)–(14) формулами численного интегрирования и которую всегда можно оценить. В силу приближенного задания коэффициентов матриц $C^{(i)}$, $d^{(i)}$, устойчивое решение системы (8) может быть получено методом регуляризации А.Н. Тихонова [4,5].

Таким образом, алгоритм оценки параметров линейной квазистационарной системы (6) сведен к решению n систем линейных алгебраических уравнений вида (8) на каждом из интервалов постоянства параметров T_l.

Перейдем к вопросу о выборе интервалов квазистационарности. Рассмотрим два способа разбиения интервала наблюдения $[t_0, T_f]$.

1. Алгоритм с фиксированным разбиением интервала. Такой метод эффективен при наличии некоторой априорной информации о динамике изменения неизвестных параметров во времени. В этом случае удается построить хорошее равномерное или неравномерное разбиение интервала. При выборе длительности интервала квазистационарности можно положить $T_l \geqslant t_{рег}$, где $t_{рег}$ – время переходного процесса.

2. Алгоритм с адаптивным выбором разбиения. Текущую информацию о поведении системы (наблюдения состояния в некоторых точках) можно использовать для адаптивного выбора величина временных интервалов при кусочно-постоянной аппроксимации неизвестных параметров. Алгоритм строится следующим образом.

0 шаг. Пусть $l = 1$.

1 шаг. На интервале $\left[t_l^{(i)}, t_{l+1}^{(i)H}\right]$, где $t_{l+1}^{(i)H} = t_l^{(i)} + \delta_l, \delta_l > 0$ получена оценка $g_l^{(i)}$ по приведенному алгоритму идентификации.

2 шаг. На интервале $\left[t_{l+1}^{(i)H}, t_{l+1}^{(i)}\right]$, где $t_{l+1}^{(i)} = t_l^{(i)H} + \eta_0\delta_l$, по уравнениям состояния (3.5) с оценками $g_l^{(i)}$ рассчитывается состояние модели $x_i^M\left(t\right)$, при этом полагаем $x_i^M\left(t_{l+1}^{(i)H}\right) = x_i\left(t_{l+1}^{(i)H}\right)$.

3 шаг. В окрестности $\left[t_{l+1}^{(i)'} - \delta'\right]$, $[t_{l+1}^{(i)'} - \delta', t_{l+1}^{(i)'}]$ $(\delta' < t_{l+1}^{(i)'} - t_{l+1}^{(i)H})$ интервала $\left[t_{l+1}^{(i)H}, t_{l+1}^{(i)'}\right]$ рассматривается функционал $I = 1/P\sum\limits_{p=1}^{P}\left(x_i(t_p) - x_i^M(t_p)\right)^2$.

Если:

1)

$$I > \varepsilon, \tag{15}$$

где $\varepsilon > 0$, то параметр η_0 уменьшается, вводится параметр$\eta_1 = \mu\eta_0\,(0 < \mu < 1,\, \mu = \mathrm{const})$ и происходит переход к шагу 2. Если через m шагов$\eta_m = \mu^m\eta_0 \approx 0$, то переход к шагу 4.

2)

$$I \leqslant \varepsilon .$$

Условие (15) не выполнилось ни на одном из шагов, то формируется интервал $\left[t_l^{(i)}, t_{l+1}^{(i)'}\right]$, где принимается оценка $g_l^{(i)}, t_{l+1}^{(i)H} = t_{l+1}^{(i)'}$ и переход к шагу 2. В противном случае переход к шагу 4.

4 шаг. На интервале $\left[t_l^{(i)}, t_{l+1}^{(i)}\right]$, где $t_{l+1}^{(i)} = t_{l+1}^{(i)'}$ принимается оценка $g_l^{(i)}$ $(i = 1, n)$.

5 шаг. Полагаем $l = l + 1$ и осуществляем переход к шагу 1.

Алгоритм продолжается до тех пор, пока не будет просмотрен весь интервал наблюдения. Схема алгоритма идентификации линейных квазистационарных систем с адаптивным выбором разбиения временного интервала представлена на рис. 1.

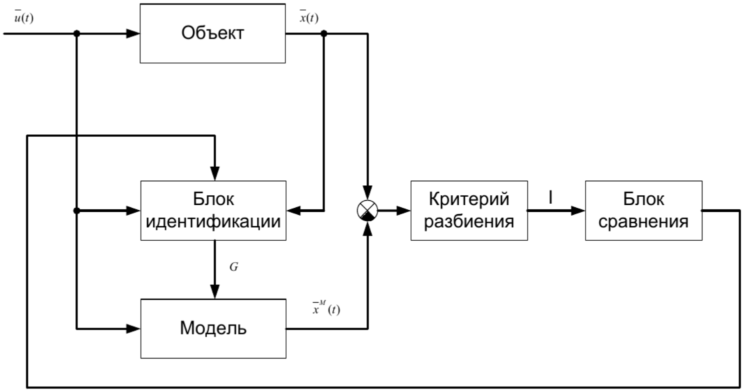

Рис. 1 – Схема алгоритма идентификации линейных квазистационарных систем с адаптивным выбором разбиения временного интервала

Для дальнейшего использования полученных оценок $g_l^{(i)}$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$, $\left(l = \overline{1, L}\right)$ в алгоритмах управления их удобно представить в виде

$$\widehat{a}_{ij}(t) = \sum_{l=1}^{L} \widehat{a}_{ij}^{(l)} \beta_i^{(l)}(t), \widehat{b}_{ik}(t) = \sum \widehat{b}_{ik}^{(l)} \beta_i^{(l)}(t),$$

где $a_{ij}^{(l)}$, $b_{ik}^{(l)}$ – постоянные коэффициенты, полученные в результате алгоритма идентификации на интервале $\beta_i^{(l)}(t)$ – известные функции, определяемые следующим образом:

$$\beta_i^{(l)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [t_l^{(i)},\, t_{l+1}^{(i)}) \subset [t_0,\, T_f], \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases},$$

Пример решения задачи

В качестве примера рассмотрим задачу идентификации нестационарного объекта второго порядка

$$\dot{x}_1(t) = a_{12}(t)x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = b_2(t)u(t),\ t \in [0, 100]$$

$x_1(0) = 30$, $x_2(0) = 50$, $b_2(t) = 1$, $u(t) = -1$. Точное значение оцениваемого параметра $a_{12}(t) = 0.000012t^3 - 0.0014t^2 + 0.033t + 2$. Параметры алгоритмов разбиения временного интервала задавались следующими: $L = 10$; $P = 5$; $\delta' = 1$; $\delta_l = 1$ для всех l; $\eta_0 = 10$; $\varepsilon = 0.2$; $\mu = 0.5$. Результаты оценки $a_{12}(t)$ для фиксированного $(L = 10)$ и адаптивного разбиений интервала приводятся на рис. 2, где кривая 1 точное значение $a_{12}(t)$; кривая 2 – оценка $a_{12}(t)$ при фиксированном разбиении; кривая 3 – оценка $a_{12}(t)$ при адаптивном разбиении. Точность оценки параметра $a_{12}(t)$ характеризуется величиной

$$\delta^2 = \sum_{m=0}^{M} [\delta\widehat{a}_{12}(t_m)]^2 \Bigg/ \sum_{m=0}^{M} [a_{12}(t_m)]^2 .$$

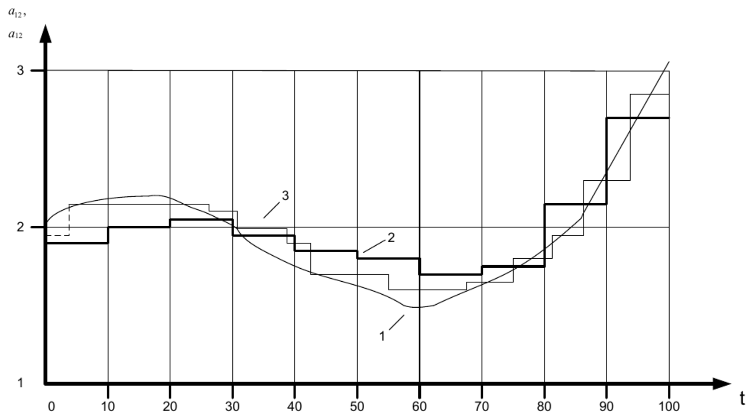

Рис. 2 – Результаты оценки $\hat{a}_{12}(t)$ для фиксированного (L) и адаптивного разбиений интервала

Сравнение оценок, полученных при фиксированном и адаптивном разбиении временного интервала, для рассмотренного примера позволяет сделать вывод, что точность оценки параметра $a_{12}(t)$

может быть повышена в 3 раза при использовании алгоритма с адаптивным выбором интервала квазистационарности.

Заключение

Основная трудность идентификации квазистационарных систем состоит в разбиении исследуемого интервалана подынтервалы постоянства параметров, длительность которых обычно подбирается в зависимости от заданной точности аппроксимации с помощью ЭВМ многократным повторением решения при различных вариантах дробления данного интервала. Однако, при наличии значительного числа переменных коэффициентов эта процедура оказывается весьма длительной. Одно из решений данной проблемы состоит в предложенном в данной статье адаптивном подходе к определению рабочих подынтервалов.

Список использованных источников

1. Справочник по теории автоматического управления / Красовский А.А. – М.: Наука. – 1997. – 712 с.
2. Обобщенный алгоритм идентификации линейных динамических систем на базе сплайн-функций и функций Уолша / Стенин А.А., Ткач М.М., Мелкумян Е.Ю. // Міжвідомчий науково-технічний збірник “Адаптивні системи автоматичного управління”. – 2012. – Вип. 20(40). – С. 131–136.
3. Теория и методы исследования нестационарных линейных систем / Михайлов Ф.А. – 1986. – 820 с.
4. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач / Морозов В.А. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
5. Методы решения некорректных задач / Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. – М.:Наука, 1986. – 288 с.

Отримано 29.30.2014 р.