

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ЗВ'ЯЗКІВ АНТРОПОМОРФНОГО КРОКУЮЧОГО АПАРАТА

*Анотація:* У роботі побудовано тривимірну математичну модель кінематичних зв'язків антропоморфного крокуючого апарата, який характеризується сімома твердотілими ланками, дванадцятьма ступенями свободи у кінематичних парах і шістьма ступенями свободи апарата відносно базової системи координат. Для формалізації моделі використано матриці напрямних косинусів та матриці переносу.

*Ключові слова:* Антропоморфний крокуючий апарат, кінематична модель, матриця повороту, матриця переміщення, рівновага антропоморфного апарата, крокуючий робот; виродження матриці.

### Вступ

Однією з основних проблем синтезу антропоморфного крокуючого апарата (АКА) є побудова математичної моделі його кінематичних зв'язків, яка дає можливість дослідити динамічні характеристики АКА, у тому числі такі, як дотримання рівноваги, зміна фази руху тощо [1,2].

Перші спроби математичної формалізації кінематики АКА здійснені ще у роботах В.В. Белецького [3]. Подальше розширення функціональних можливостей АКА призвело до зростання вимог до їх кінематичних схем, у результаті чого на сьогодні існує декілька класифікацій кінематичних схем [4], розроблених такими вченими, як *T. McGeer* [5], *W. Blajzer* [6], *В. Тимошенко* [7], *S. Gruber* [8], *L. Yang* [9], *D. Braun* [10]. Спільною рисою їхніх робіт є вирішення таких задач механіки, як: переміщення ланок, проковзування на опорній поверхні, подання апарата у вигляді оберненого маятника, аналіз моментів та інерції у шарнірах. Однак, жодної кінематичної моделі АКА, придатної для моделювання дотримання рівноваги АКА на опорній поверхні, за даними про розподіл сил реакції опори, побудовано не було [4,11].

### Формування кінематичної схеми АКА

Розглянута у роботі кінематична схема АКА (рисунок 1) складається із семи ланок  $AB$ ,  $BC_1$ ,  $BC_2$ ,  $C_1D_1$ ,  $C_2D_2$ ,  $D_1E_1$ ,  $D_2E_2$ , що мають відповідні довжини  $L_{AB}$ ,  $L_{BC_1}$ ,  $L_{BC_2}$ ,  $L_{C_1D_1}$ ,  $L_{C_2D_2}$ ,  $L_{D_1E_1}$ ,  $L_{D_2E_2}$  і визначають корпус, стегна, гомілки і стопи апарата. Пари ланок, об'єднані шарніром, визначають ступені свободи АКА. Так, ланки  $BC_i$ , де  $i = [1..2]$ , мають три ступені свободи відносно ланки  $AB$ , які задаються кутами  $\alpha_1^C$ ,  $\beta_1^C$ ,  $\gamma_1^C$ ,  $\alpha_2^C$ ,  $\beta_2^C$ ,  $\gamma_2^C$ . Ланки

$C_i D_i, i = [1..2]$  мають по одній ступені свободи, що задані відносно ланок  $BC_i$  кутами  $\gamma_i^D$ . Ланки  $D_i E_i$  мають по дві ступені свободи відносно ланок  $C_i D_i$ , які задані кутами  $\alpha_i^E, \gamma_i^E$ . Ланка  $AB$  зберігає свою просторову позицію у системі координат  $OXYZ$ .

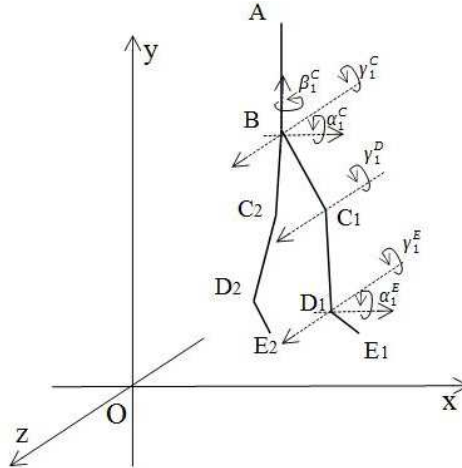


Рис. 1 – Загальна кінематична схема АКА

$AB, BC_1, BC_2, C_1 D_1, C_2 D_2, D_1 E_1, D_2 E_2$  – ланки АКА;  $\alpha_1^C, \alpha_1^E, \beta_1^C, \gamma_1^C, \gamma_1^D, \gamma_1^E$  – кути кінематичних пар АКА

### Формалізація кінематичних зв'язків АКА

Початкове положення ланок  $AB, BC_1, BC_2, C_1 D_1, C_2 D_2, D_1 E_1, D_2 E_2$  АКА у системі координат  $OXYZ$  задається положенням відповідних точок  $A, B_i, C_i, D_i, E_i$  (рисунок 2), які належать цим ланкам. Кожна із вказаних точок задається вектором координат:

$$\begin{array}{cccc}
 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
 A = & 10 & ; & B = 7 & ; & C_1 = 4 & ; & C_2 = 4 & ; \\
 & 1 & & 1 & & -1.5 & & 1.5 \\
 & 1 & & 1 & & 2 & & 2 \\
 D_1 = & 1 & ; & D_2 = 1 & ; & E_1 = 1 & ; & E_2 = 1 & . \\
 & -2 & & 2 & & -2 & & 2
 \end{array} \quad (1)$$

у тривимірному просторі у відповідності з пропорціями тіла людини:

Розглянемо два типи переміщення кінематичних пар: кутове переміщення (КП), при якому точка ланки радіально переміщується відносно заданого центру, та лінійне переміщення (ЛП), при якому точка ланки переміщується на задані величини відносно осей системи координат.

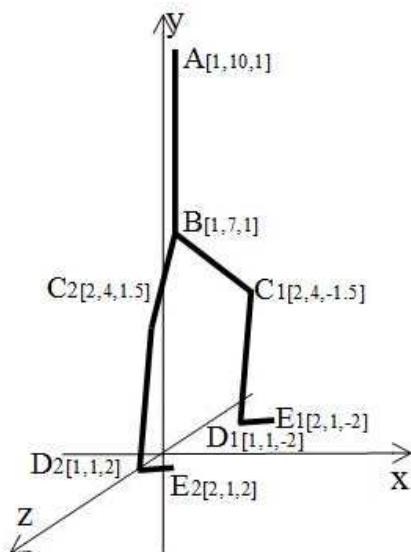


Рис. 2 – Загальна схема кінематичних пар та координат точок у ланках АКА

### Опис кутового переміщення кінематичних пар АКА

Так, згідно з рисунком 1, КП ланки стегна АКА  $BC_1$  відносно ланки корпуса  $AB$  тотожне переміщенню точки  $C_1$  відносно системи координат з центом у точці  $B$  і осями, що співпадають за напрямом з  $OX, OY, OZ$ . Розглянута кінематична пара має три кутові ступені свободи, що описані кутами  $\alpha_1^C, \beta_1^C, \gamma_1^C$ . Переміщення відносно кожного з цих кутів може бути описане наступним чином:

$$C_1^{Rx\alpha_1^C} = C_1 \cdot M_{rot}^X(\alpha_1^C),$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1.5 \end{pmatrix},$$

$$M_{rot}^X(\alpha_1^C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_1^C) & -\sin(\alpha_1^C) \\ 0 & \sin(\alpha_1^C) & \cos(\alpha_1^C) \end{pmatrix};$$

$$C_1^{Ry\beta_1^C} = C_1 \cdot M_{rot}^Y(\beta_1^C),$$

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ -1.5 \end{matrix} & (2) \\
 M_{rot}^Y(\beta_1^C) &= \begin{matrix} \cos(\beta_1^C) & 0 & \sin(\beta_1^C) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta_1^C) & 0 & \cos(\beta_1^C) \end{matrix}; \\
 C_1^{Rz\gamma_1^C} &= C_1 \cdot M_{rot}^Z(\gamma_1^C), \\
 C_1 &= \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ -1.5 \end{matrix} \\
 M_{rot}^Z(\gamma_1^C) &= \begin{matrix} \cos(\gamma_1^C) & -\sin(\gamma_1^C) & 0 \\ \sin(\gamma_1^C) & \cos(\gamma_1^C) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}.
 \end{aligned}$$

Тоді поворот ланки відносно трьох осей має вигляд:

$$C_1^{Rot} = \left[ \left( C_1^{Rx\alpha_1^C} \cdot M_{rot}^X(\alpha_1^C) \right) \cdot M_{rot}^Y(\beta_1^C) \cdot M_{rot}^Z(\gamma_1^C) \right]. \quad (3)$$

Ідентично до КП ланки  $BC_1$ , поворот ланки  $BC_2$  буде виглядати так:

$$C_2^{Rot} = \left[ M_{rot}^Y(\beta_2^C) \cdot M_{rot}^Z(\gamma_2^C) \cdot \left( M_{rot}^X(\alpha_2^C) \cdot C_2^{Rx\alpha_2^C} \right) \right]. \quad (4)$$

Тоді повний опис КП стегових ланок має такий вигляд:

$$C_i^{Rot} = \left[ M_{rot}^Y(\beta_i^C) \cdot M_{rot}^Z(\gamma_i^C) \cdot \left( M_{rot}^X(\alpha_i^C) \cdot C_i^{Rx\alpha_i^C} \right) \right], i = [1, 2]. \quad (5)$$

Кутове переміщення гомілкових ланок АКА  $C_iD_i, i = [1, 2]$  задається подібно до КП ланок  $BC_i$ , проте, на відміну від попереднього випадку, дане переміщення характеризується одним ступенем свободи, який заданий відносно осі  $Z$ . Таким чином опис КП ланок  $C_iD_i$  має вигляд:

$$\begin{aligned}
 D_1^{Rz\gamma_1^D} &= M_{rot}^Z(\gamma_1^D) \cdot D_1, \\
 D_1 &= \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{matrix}, \\
 M_{rot}^Z(\gamma_1^D) &= \begin{matrix} \cos(\gamma_1^D) & -\sin(\gamma_1^D) & 0 \\ \sin(\gamma_1^D) & \cos(\gamma_1^D) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix},
 \end{aligned} \quad (6)$$

де  $\gamma_1^D$  – кут повороту точки  $D_1$  відносно осі  $Z$  навколо центру в точці  $C_1$ . Ідентично до КП точки  $D_1$ , переміщення точки  $D_2$  у площині  $Z$  задається таким рівнянням:

$$D_2^{Rz\gamma_2^D} = M_{rot}^Z(\gamma_2^D) \cdot D_2. \quad (7)$$

Повний опис КП гомілкових ланок має вигляд:

$$D_i^{Rz\gamma_2^D} = M_{rot}^Z(\gamma_i^D) \cdot D_i, \quad i = [1, 2]. \quad (8)$$

Кутове переміщення ланок стопи АКА  $D_i E_i$  також подібне до КП ланок  $BC_i, C_i D_i$ . Однак розглянута кінематична пара ланок має два ступені свободи, що визначені відносно осей  $OX, OZ$  і задані кутами  $\alpha_i^E, \gamma_i^E, i = [1, 2]$ , відповідно до рисунка 1.

Так, КП точки  $E_1$  відносно  $D_1$  в однонаправленій з  $OXYZ$  системи координат складається з КП відносно  $OX$ , яке описано рівнянням (9) та КП відносно  $OZ$ , описане рівнянням (10).

$$E_1^{Rx\alpha_1^E} = M_{rot}^X(\alpha_1^E) \cdot E_1. \quad (9)$$

$$E_1^{Rz\gamma_1^E} = M_{rot}^Z(\gamma_1^E) \cdot E_1. \quad (10)$$

Тоді КП  $E_2$  відносно  $D_2$  описується так:

$$E_2^{Rx\alpha_2^E} = M_{rot}^X(\alpha_2^E) \cdot E_2, \quad (11)$$

$$E_2^{Rz\gamma_2^E} = M_{rot}^Z(\gamma_2^E) \cdot E_2. \quad (12)$$

Повний опис КП ланок стоп АКА  $D_i E_i$  відносно осей  $OX, OZ$  має вигляд:

$$E_i^{Rot} = \left[ M_{rot}^Z(\gamma_i^E) \cdot M_{rot}^Y(\beta_i^E) \cdot \left( M_{rot}^X(\alpha_i^E) \cdot E_i \right) \right], \quad i = [1, 2]. \quad (13)$$

Таким чином, згідно з рівняннями (5, 8, 13), АКА буде мати дванадцять ступенів свободи у шарнірах. Окрім того, він буде мати ще шість ступенів свободи відносно базової системи координат, які визначаються рівняннями (5).

### Опис лінійного переміщення кінематичних пар АКА

У результаті кутового переміщення, нове положення АКА визначається координатами точок  $A, B, C_i^{rot}, D_i^{rot}, E_i^{rot}$ , відстані між якими різняться від початкових. Так, для корекції моделі використано метод ЛП точок на величину похибки позиціонування  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , що задається формулою:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Для виконання операцій над векторами координат точок шарнірів АКА, опис цих векторів був доповнений вільним членом.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 10 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Так, переміщення точок  $D_i$  залежить від КП точок  $C_i$  і коректується за наступною формулою:

$$D_i^{mov} = D_i \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta C_i x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta C_i y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta C_i z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{де} \quad \begin{cases} \Delta C_i x = [D_i \mp D_i^{rot}] \cdot [1, 0, 0] \\ \Delta C_i y = [D_i \mp D_i^{rot}] \cdot [0, 1, 0] \\ \Delta C_i z = [D_i \mp D_i^{rot}] \cdot [0, 0, 1] \end{cases}, \quad (16)$$

а  $D_i$  — доповнений вектор координат точки.

Переміщення точки  $E_i$  виконується подібно до переміщення  $D_i$  та записується так:

$$E_i^{mov} = D_i \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta D_i x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta D_i y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta D_i z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{де} \quad \begin{cases} \Delta D_i x = [C_i \mp C_i^{rot}] \cdot [1, 0, 0] \\ \Delta D_i y = [C_i \mp C_i^{rot}] \cdot [0, 1, 0] \\ \Delta D_i z = [C_i \mp C_i^{rot}] \cdot [0, 0, 1] \end{cases}, \quad (17)$$

де  $C_i$  — доповнений вектор координат точки.

Загальне переміщення АКА формалізується за КП та ЛП кожної його ланки, КП та ЛП базової ланки та ЛП в'язаних ланок, яке додається для забезпечення цілісності структури АКА.

### Опис кутового переміщення ланки АВ АКА

Кутове переміщення точки  $A$  подано подібно до КП точок  $C_i$ :

$$\begin{aligned} A^{Rx\alpha^A} &= A \cdot M_{rot}^X(\alpha^A), \\ M_{rot}^X(\alpha^A) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha^A) & -\sin(\alpha^A) \\ 0 & \sin(\alpha^A) & \cos(\alpha^A) \end{pmatrix}; \\ A^{Ry\beta^A} &= A \cdot M_{rot}^Y(\beta^A), \\ M_{rot}^Y(\beta^A) &= \begin{pmatrix} \cos(\beta^A) & 0 & \sin(\beta^A) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta^A) & 0 & \cos(\beta^A) \end{pmatrix}; \\ A^{Rz\gamma^A} &= A \cdot M_{rot}^Z(\gamma^A), \\ M_{rot}^Z(\gamma^A) &= \begin{pmatrix} \cos(\gamma^A) & -\sin(\gamma^A) & 0 \\ \sin(\gamma^A) & \cos(\gamma^A) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

Тоді поворот ланки  $AB$  відносно трьох осей має такий вигляд:

$$A^{Rot} = \left[ \left( A^{R_{x\alpha^A}} \cdot M_{rot}^X \left( \alpha^A \right) \right) \cdot M_{rot}^Y \left( \beta^A \right) \cdot M_{rot}^Z \left( \gamma^A \right) \right]. \quad (19)$$

Крім кутового переміщення, ланка  $AB$  має можливість переміщуватися ще і вздовж трьох осей базової системи координат. Для опису ЛП АКА достатньо формалізувати ЛП точки  $A$ , що належить моделі АКА таким чином:

$$E_i^{mov} = D_i \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta Ax \\ 0 & 1 & 0 & \Delta Ay \\ 0 & 0 & 1 & \Delta Az \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

де  $\Delta Ax$ ,  $\Delta Ay$ ,  $\Delta Az$  вказують приріст координат точки  $A$  вздовж осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  базової системи координат.

### Висновок

Основною характеристикою запропонованої моделі кінематичних зв'язків АКА є можливість її застосування для подальшого дослідження динамічних характеристик апарата у його статичних фазах. Також важливою областю застосування моделі є вивчення взаємодії АКА з рельєфною опорною поверхнею.

Однак у результаті застосування матриці напрямних косинусів і матриці переносу виникають проблеми з точністю моделювання кінематики АКА у двох випадках, а саме:

- коли координати точок апарата рівні нулю;
- коли кути у кінематичних парах рівняються 90 і 180 градусів.

Так, у першому випадку ЛП ланки здійснюється з похибкою. У другому випадку – матриця КП вироджується. Для вирішення означених недоліків у роботі здійснюється коригування критичних параметрів координат і кутів ланок. У результаті чого нагромадження помилок не відбувається.

### Список використаних джерел

1. Vukobratovic M. Towards a unified understanding of basic notions and terms in humanoid robotics/ M. Vukobratovic, B. Borovac, V. Potkonjak. *Robotica* 25, 2007 – 450 p.
2. Shabana, Ahmed A. Computational dynamics/ Ahmed A. Shabana.- 3rd ed., 2010 168 p.
3. Белецкий В.В. Двухногая ходьба: модельные задачи динамики и управления / В.В. Белецкий. - М.: Наука. Главная редакция ФМ литературы, 1984. - 288с.
4. van Oort, Gilu. Strategies for stabilizing a 3D dynamically walking robot/G. van Oort. - Report nr. 023CE2005 Controll Enginiring EE-Math-CS University of Twente. - 2005. - 87 p.

5. McGeer T. Passive Dynamic Walking/ T. McGeer. - CSS-IS-TR, 1988. – 88 p.
6. W. Blajer. Measur. Control/W. Blajer, W. Schiehlen. – ASME 1992. P. 30-42.
7. Бордюг Б.А. Задачи управления шагающими аппаратами/ Б.А. Бордюг, А.Б. Ларин, А.Г. Тимошенко. - Киев : Наук. Думка, 1985. - С 52-60.
8. Gruber S. Proceedings of the Thirteenth/ S.W. Gruber ISM-IFTToMM Symposium (Springer-Verlag, Wien, 2000). P. 433-433.
9. Yang L. Robotica/ Yang L., C. Chew, T. Zielinska. Report nr. 025CE2005 Control Engineering EE-Math-CS University of Twente. - 2005. - 87 p. 25, 549 (2005). P. 14-18.
10. Braun D.J BiPed robotics/ D.J. Braun, M. Goldfarb. IEEE Trans. Robot. 25, 1292 (2009). P. 22-42.
11. Vukobratovic M. Biological principles of control selection for a humanoid robot's dynamic balance preservation. /M. Vukobratovic. International Journal of Humanoid Robots. Vol. 5, No. 4 (2008) 639-678
12. Gumennyy D.A Hybrid Control Method for Stabilizing if Walking Robot on Irregular Surface Using Plantar Pressure Sensors./ Dmytro Gumennyy, Mikhail Tkach, Alexey Chkalov. ECCOMAS Multibody Dynamics 2013 1-4 July, 2013, University of Zagreb, Croatia, pp. 307 – 309
13. Ткач М.М. Моделювання руху антропоморфного крокуючого апарата на довільній твердій поверхні./ Ткач М.М., Гуменний Д.О., Якуніна Н.О. Адаптивні системи автоматичного управління. - 2012. - № 21(41). - С. 114-122.
14. Ткач М.М. Керування рівновагою антропоморфного крокуючого апарата за інформацією про екстремуми на поверхні руху/ Ткач М.М., Гуменний Д.О. Стратегии качества в промышленности и образовании, Proc. of Annual Conf. 2012.
15. Ткач М.М. Система управління дотримання рівноваги антропоморфним крокуючим апаратом/ Ткач М.М., Гуменний Д.О. Адаптивні системи автоматичного управління. - 2014 № 1. - с. 61 – 79.

Отримано 04.09.2014 р.