УДК 621.0:519.873

В.Я. Копп, М.В. Заморенов, Ю.Е. Обжерин, О.В. Филиппович

МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЛУМАРКОВСКИХ СИСТЕМ.

Аннотация: В статье доказана теорема о функциях распределения времен пребывания полумарковской системы в отдельных состояниях, какого либо подмножества с учетом повторных попаданий в них. На основании теоремы предложены точные методы определения функции распределения времени пребывания полумарковской системы в исследуемом подмножестве, как при заданном начальном состоянии, так и вне зависимости от начального состояния. Рассмотрен пример моделирования производственной структуры, состоящей из технологической ячейки, обладающей конечной надежностью, и абсолютно надежного накопителя, позволяющего структуре продолжать функционировать некоторое время при отказе ячейки. Произведено сравнение функций распределения времени наработки на отказ, полученных двумя методами: классическим и предлагаемым в статье, подтвердившее правильность предлагаемого метода.

Ключевые слова: полумарковские системы, моделирование производственной структуры

При стохастическом моделировании полумарковских (ПМ) систем часто возникают задачи, требующие определения не только стационарных характеристик, но и функций распределения (ФР) случайных величин, которыми являются времена пребывания, как в отдельных состояниях, так и в подмножествах состояний. Так, например, такие задачи возникают при построении моделей производственных и информационных систем со сложной, иерархически подчиненной структурой [1]. В этих случаях, как правило, при построении модели верхнего уровня иерархии необходимо, чтобы были известны ФР, описывающие функционирование элементов нижних уровней иерархии, причем эти ФР являются исходными данными для построения модели верхнего уровня (вертикальные связи). Следует отметить, что и внутри каждого уровня иерархии для учета влияния элементов друг на друга при их стыковке необходимо знать ФР отдельных элементов (горизонтальные связи).

Целью статьи является построение методов, позволяющих находить ФР времен пребывания ПМ системы, как в отдельных состояниях с учетом повторных попаданий в них, так и в подмножествах состояний.

Рассмотрим ПМ систему с общим фазовым пространством состояний M. Выделим в фазовом пространстве состояний M полумарковского процесса два подмножества M_+ и M_-, таких, что $M_+ \cup M_- = M$. Времена однократного пребывания в состояниях

$S_i \in M_+$ являются случайными величинами α_i, имеющими математические ожидания m_i, функции $F_i(t)$ и плотности $f_i(t)$ распределения, с изображениями в комплексной области $F_i(s)$ и $f_i(s)$ соответственно. Случайная величина θ_Σ – время пребывания системы в подмножестве M_+, имеющая математическое ожидание T_+. Времена многократного пребывания системы в состоянии $S_i \in M_+$ за счет повторных попаданий в них за время θ_Σ являются случайными величинами θ_i, имеющими математические ожидания m_i^θ, функции $F_i^\theta(t)$ и плотности $f_i^\theta(t)$ распределения, с изображениями в комплексной области $F_i^\theta(s)$ и $f_i^\theta(s)$ соответственно. Описываемому полумарковскому процессу соответствует распределение вложенной цепи Маркова, характеризующееся удельными частотами ρ_i попадания в каждое из состояний $S_i \in M_+$, и вероятностями переходов P_{ij} из состояний $S_i \in M_+$ в состояния $S_j \in M_-$. Прямой переход из M_+ в M_- могут иметь не все состояния $S_i \in M_+$, тогда целесообразно выделить подмножество $E \subset M_+$ состояний $S_e \in E$ множества M_+ из которых возможен прямой переход во множество M_-.

Теорема о функциях распределения времен пребывания полумарковской системы в состояниях какого либо подмножества с учетом повторных попаданий в них.

Если для полумарковской системы с дискретными состояниями S_i известны функции $F_i(t)$ и плотности $f_i(t)$ распределения, то функция $F_i^\theta(s)$ и плотность $f_i^\theta(s)$ распределения времени θ_i пребывания системы в состоянии $S_i \in M_+$ с учетом повторных попаданий в них в области изображений равны:

$$F_i^\theta(s) = \frac{F_i(s)}{c_i - (c_i - 1)\, f_i\,(s)}, \tag{1}$$

$$f_i^\theta(s) = \frac{f_i(s)}{c_i - (c_i - 1)\, f_i\,(s)}, \tag{2}$$

а в области оригинала они имеют вид:

$$F_i^\theta(t) = \frac{1}{c_i} F_i(t) + \frac{1}{c_i} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{c_i}\right)^m F_{i(*)m}(t),$$

$$f_i^\theta(t) = P_i \cdot f_i(t) + P_i \sum_{m=1}^{\infty} (1 - P_i)^m f_i^{(*)m+1}(t) \tag{3}$$

где c_i – коэффициент увеличения времени пребывания системы в состояниях $S_i \in M_+$ за счет повторных попаданий в него, равный:

$$c_i = \frac{\rho_i}{\sum\limits_{e \in E \subset M_+} \left[\rho_e \cdot \sum\limits_{j \in M_-} P_{ej} \right]}.$$

Доказательство.

Времена пребывания системы в состояниях ($S_i \in M_+$) увеличиваются за счет повторных попаданий системы с какой-то вероятностью в эти состояния за время пребывания всей системы во множестве M_+, и больше ни за счет чего они увеличиться не могут, что очевидно. Но это означает, что число попаданий системы подчиняется геометрическому закону распределения с вероятностью P того, что система выйдет из этого состояния, а вероятность того, что останется в нем $1 - P$. При этом граф, описывающий поведение системы в данном состоянии при известной ФР $F_i(t)$ времени пребывания в данном состоянии S_i имеет вид, представленный на рисунке 1.

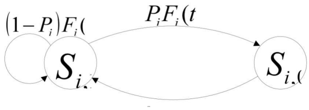

Рис. 1 – Граф состояний соответствующих геометрическому распределению.

Условные обозначения приняты следующие: $S_{i,0}$ – мгновенное состояние соответствует выходу системы из состояния S_i; $S_{i,1}$ – исследуемое состояние S_i, суммарное время пребывания в котором определяется; P_i – вероятность перехода системы из $S_{i,1}$ в $S_{i,0}$; $(1 - P_i)$ – вероятность повторного попадания системы в состояние $S_{i,1}$; $F_i(t)$ – ФР случайной величины α_i, имеющей м.о. m_i.

По данному графу составляем УМВ:

$$F_i^{\theta}(t) = (1 - P_i) \int\limits_0^t f_i(t-s) F_i^{\theta}(s) ds + P_i F_i(t). \tag{4}$$

Итерируя полученное уравнение (4), имеем [2]:

$$\begin{aligned} F_i^{\theta}(t) &= P_i \cdot F_i(t) + P_i \sum_{m=1}^{\infty} (1 - P_i)^m F_i^{(*)m}(t) = \\ &= P_i F_i(t) + P_i \sum_{m=1}^{\infty} (1 - P_i)^m f_i^{(*)m}(t) * F_i(t). \end{aligned} \tag{5}$$

Плотность распределения $k_1(t)$ имеет вид:

$$f_i^{\theta}(t) = P_i \cdot f_i(t) + P_i \sum_{m=1}^{\infty} (1 - P_i)^m f_i^{(*)m+1}(t)$$

Неизвестной величиной здесь, которую необходимо определить, является P_i.

Известно, что при геометрическом законе распределения $m\theta_i = \frac{m_i}{P_i}$, отсюда следует:

$$P_i = \frac{m_i}{m\theta_i}. \tag{6}$$

Найдем $m\theta_i$.

По известной теореме [3] можно точно определить T_+. Для дискретных состояний формула имеет вид:

$$T_+ = \frac{\sum\limits_{i \in M_+} m_i \rho_i}{\sum\limits_{e \in E \subset M_+} \sum\limits_{j \in M_-} P_{ej} \rho_i} = \sum_{e \in M_+} m_i \frac{\rho_i}{\sum\limits_{e \in E \subset M_+} \sum\limits_{j \in M_-} P_{ej} \rho_e}.$$

Тогда

$$m\theta_i = m_i \cdot \frac{\rho_i}{\sum\limits_{e \in E \subset M_+} \sum\limits_{j \in M_-} P_{ej} \rho_e}. \tag{7}$$

Введем коэффициент c_i увеличения времени пребывания системы в состояниях S_i равный

$$c_i = \frac{\rho_i}{\sum\limits_{e \in E \subset M_+} \sum\limits_{j \in M_-} P_{ej} \rho_e}. \tag{8}$$

Тогда:

$m\theta_i = m_i \cdot c_i$, а вероятность P_i определяется из условия обеспечения увеличения m_i до величины $m\theta_i$, то есть из равенства $m\theta_i = m_i \cdot c_i$, откуда следует, что искомая вероятность P_i, исходя из (6), равна:

$$P_i = \frac{m_i}{m\theta_i} = \frac{1}{c_i}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (5) получаем (3).

Применяя к формуле (5) преобразование Лапласа, получим

$$\begin{gathered} F_i^\theta(s) = P_i F(s) + P_i \sum_{m=1}^{\infty} (1 - P_i)^m f_{i^m}(s) F(s) = \\ = P_i F(s) + P_i F(s) \sum_{m=1}^{\infty} (1 - P_i)^m f_{i^m}(s) = \\ = P_i F_i(s) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (1 - P_i)^m f_{i^m}(s) \right) = P_i F_i(s) \sum_{m=0}^{\infty} (1 - P_i)^m f_{i^m}(s) \end{gathered} \tag{10}$$

Полученное выражение представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Возьмем предел выражения $\sum\limits_{m=0}^{\infty} (1 - P_i)^m f^m(s)$:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{1-(1-P_i)f_i(s)}.$$

Тогда выражение (10) будет иметь вид:

$$F_i^{\theta}(s)=\frac{P_iF_i(s)}{1-(1-P_i)\,f_i\,(s)}. \tag{11}$$

Соответственно изображение ПР $f_i^{\theta}(t)$ будет иметь вид:

$$f_i^{\theta}(s)=\frac{sP_iF_i(s)}{1-(1-P_i)\,f_i\,(s)}=\frac{P_if_i(s)}{1-(1-P_i)\,f_i\,(s)}. \tag{12}$$

Подставляя (9) в (11) и (12) получим

$$F_i^{\theta}(s)=\frac{\frac{1}{c_i}F_i(s)}{1-\left(1-\frac{1}{c_i}\right)f_i\,(s)}=\frac{F_i(s)}{c_i-(c_i-1)\,f_i\,(s)},$$

и

$$f_i^{\theta}(s)=\frac{\frac{1}{c_i}f_i(s)}{1-\left(1-\frac{1}{c_i}\right)f_i\,(s)}=\frac{f_i(s)}{c_i-(c_i-1)\,f_i\,(s)}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.

Время θ_Σ пребывания системы во множестве M_+ равна сумме всех СВ θ_i $\quad \theta_\Sigma=\sum\limits_{1}^{n}\theta_i$, а, значит, ФР F_Σ^{θ} времени θ_Σ – пребывания системы во множестве M_+, равна последовательной свертке всех ФР F_i^{θ}:

$$F_\Sigma^{\theta}=F_0^{\theta}*F_1^{\theta}*F_2^{\theta}*\ldots*F_i^{\theta}*\ldots*F_n^{\theta}. \tag{13}$$

где n – число состояний входящих в подмножество M_+.

Следствие 2.

Если выход в подмножество M_- возможен переход только из одного состояния $E=\{S_e\}$, тогда выражения (7) и (8) имеют вид:

$$m\theta_e=m_e\cdot\frac{1}{\sum\limits_{j\in M_-}P_{ej}},\ c_e=\frac{1}{\sum\limits_{j\in M_-}P_{ej}}$$

Если же существует единственный выход из одного состояния $E=\{S_e\}$ подмножества M_+ в одно состояние $S_g\in M_-$, тогда

$$m\theta_e=m_e\cdot\frac{1}{P_{eg}},\ c_e=\frac{1}{P_{eg}}$$

 ISSN 1560-8956

Приведенная теорема позволяет предложить методы моделирования для решения следующих двух задач:

- первая задача: определение времени пребывания системы в подмножестве M_+ вне зависимости от начального состояния;
- вторая задача: определение времени пребывания системы в подмножестве M_+ в зависимости от начального состояния.

Первый метод решает первую задачу, второй метод, в дальнейшем называемый методом траекторий, – вторую.

Метод позволяет получить точное решение в обоих случаях, а также исключить решение уравнений марковского восстановления. С другой стороны можно сказать, что эти методы позволяют найти точное решение уравнений марковского восстановления (интегральных уравнений Вольтерра второго рода с полустохастическим ядром).

Рассмотрим методы.

Метод определения ФР времени пребывания системы в подмножестве M_+.

На основании теоремы о функциях распределения времен пребывания полумарковской системы в подмножестве состояний разработан метод моделирования полумарковских систем, который состоит в последовательном выполнении следующих шагов.

Первый шаг. Переход от системы с непрерывными состояниями к системе с дискретными состояниями $S_i \in M_+$. При этом определяются ФР F_i времен пребывания системы в новых дискретных состояниях, вероятности перехода P_{ij} из этих состояний в другие состояния (переходные вероятности) удельные частоты ρ_i попадания в состояния (стационарное распределение вложенной цепи Маркова) и стационарные вероятности пребывания в состояниях (стационарное распределение полумарковского процесса). Процедура проводится известными методами моделирования ПМ систем.

Второй шаг. На основании выше изложенной теоремы, заменяются времена пребывания в состояниях α_i на θ_i – для них определяются плотности и функции распределения времен пребывания системы в состояниях $S_i \in M_+$ с учетом повторных возвратов в соответствии с приведенной теоремой.

Третий шаг. В соответствии со следствием 1 теоремы, определяем время пребывания системы в подмножестве M_+, как сумму времен пребывания в каждом состоянии с учетом повторных возвратов, для которого ФР равна последовательной свертке ФР времен пребывания в каждом из состояний подмножества M_+.

Рассмотрим второй метод моделирования полумарковских систем. Назовём предлагаемый ниже метод **методом траекторий**.

Траекторией называется множество состояний, в которых система должна побывать, чтобы выйти из подмножества M_+ в M_-

(или наоборот), причем $M_+ \cup M_- = M$, где M – все фазовое пространство состояний.

Метод траекторий

Первые два шага (переход от непрерывной системы к дискретной и замена α_i на θ_i) выполняются, как и в предыдущем методе.

Третий шаг включает в себя разбиение каждого из подмножеств M_+ и M_- на пересекающиеся и непересекающиеся, если есть, подмножества D_{+j} и D_{-l} таким образом, чтобы получившиеся подмножества, представляющие собой траектории выхода в M_- (или M_+), начинались в каждом из состояний множества M_+ (или M_-) и содержали состояния имеющие прямой переход (за один шаг) в множества M_- (или M_+) соответственно. Далее будем говорить о множестве M_+ и его подмножествах D_{+j}, так как все сказанное о них полностью соответствует для M_- и D_{-l}.

Четвертый шаг. Выделим еще одно подмножество E_+, содержащее только состояния, имеющие прямой переход (за один шаг) в M_-. Формируется подмножество траекторий перехода из M_+ в M_- с началом в каждом из состояний подмножества M_+.

Пятый шаг. Рассмотрим время выхода из состояния S_i по каждой из траекторий. Это делается следующим образом. Все множество M разбивается на два подмножества. В одно входят состояния, составляющие данную траекторию. В другое – все остальные состояния. С помощью приведенной теоремы определяется ФР времени пребывания системы в этом подмножестве – после того, как изменены ФР времен пребывания в состояниях, время выхода системы по конкретной траектории в подмножество M_- определяется сложением случайных величин θ_i (времен пребывания системы в состоянии $S_i \in M_+$ с учетом повторных попаданий в них), входящих в данную траекторию (осуществляется свертка). Так же определяются ФР для всех возможных траекторий выхода системы из S_i в M_-.

Шестой шаг. Отдельно следует рассмотреть состояния подмножества M_+, в которые нет прямого перехода из подмножества M_-, но из которых имеется переход в одно из состояний M_-. В реальной системе стартовать из этих состояний траектория не может (так как в них нельзя попасть из M_-). Поэтому время пребывания системы в подмножестве M_+ с началом в одном из указанных состояний определяется следующим образом. Не нарушая общности рассуждений, предположим, что имеется только одно такое состояние S_e и в целом выход системы из M_+ в M_-возможен только через него. В этом случае ФР времени пребывания в подмножестве M_+ с началом в указанном состоянии определяется как смесь двух ФР. Одна, при прямом переходе в M_-, представляет собой ФР времени пребывания в состоянии S_e при условии перехода непосредственно в M_-. Другая ФР соответствует сумме двух времен: одно из них

 ISSN 1560-8956

это время пребывания в M_+ а другое – время пребывании в S_e при условии перехода из него в одно из состояний S_i подмножества M_+. Фактически, время пребывания в M_+ равно времени пребывания системы в подмножестве M_+ увеличенному на время однократного пребывания в указанном состоянии S_e, при условии перехода из него в одно из состояний M_+ (ниже поясняется на примере).

Седьмой шаг. В соответствии с теоремой о полной вероятности, определяются вероятности P_m реализации каждой из траекторий, на основании переходных вероятностей цепи Маркова.

Восьмой шаг. Находим ФР времени пребывания в M_+ с начальным состоянием S_i, которая определяется, как взвешенная смесь ФР каждой из траекторий выходящих из состояния S_i. Коэффициентами смеси служат найденные на седьмом шаге вероятности реализации траекторий.

Предложенный метод позволяет найти ФР времени пребывания системы в подмножестве M_+ с начальным состоянием S_i, что является точным решением системы уравнений марковского восстановления.

При необходимости, данным методом возможно найти ФР времени пребывания системы в подмножестве M_+. Для этого используется формула полной вероятности. При этом вероятностями гипотез служат условные вероятности пребывания системы в состояниях $S_i \in M_+$:

$$P(H_k) = \frac{P_k}{P\left\{S_i \in M_+\right\}} = \frac{P_k}{\sum\limits_{S_i \in M_+} P_i}.$$

Не теряя общности, поясним предлагаемый подход на конкретном примере:

Пусть имеется схема траекторий выхода дискретной системы из состояния S_1 в подмножество M_- (рисунок 2). Нам известны функции распределения $F_i^{\theta}(t)$ времен пребывания системы в состояниях с учетом повторных возвратов. Переходы из состояния в состояние на схеме показаны стрелками.

P_{ij} – вероятность перехода из состояния S_i в состояние S_j. Требуется определить функцию распределения времени пребывания системы в подмножестве M_+ с начальным состоянием в S_1.

Сформируем все возможные траектории выхода из состояния S_1 в M_-:

$$T_1 = \left\{S_1 S_3\right\},\ T_2 = \left\{S_1 S_4 S_6\right\},\ T_3 = \left\{S_1 S_4 S_7\right\}.$$

Для каждой из траекторий предполагаем следующее: все множество состояний M разделено на два подмножества, в одно из которых M_+^T входят состояния, образующие эту траекторию, а в другое M_-^T – все остальные состояние множества M. ФР $F_i^{\theta}(t)$ времен пребывания в каждом из состояний в траектории определяется по

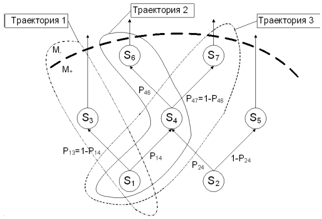

Рис. 2 – Траектории выхода системы из состояния S_1.

теореме, приведенной выше, с учетом перехода из подмножества M_+^T в M_-^T.

С помощью последовательной свертки определим ФР времени пребывания системы в каждой траектории.

$$F_{T_1}(t) = F_1^\theta(t) * F_3^\theta(t),\ F_{T_2}(t) = F_1^\theta(t) * F_4^\theta(t) * F_6^\theta(t),$$
$$F_{T_3}(t) = F_1^\theta(t) * F_4^\theta(t) * F_7^\theta(t),$$

где $F_{T_i}(t)$ – ФР времени пребывания i-ой траектории.

Найдем вероятности P_m реализации каждой из траекторий

$$P_{T_1} = P_{13},\ P_{T_2} = P_{14}P_{46},\ P_{T_3} = P_{14}P_{47}.$$

Причем $P_{T_1} + P_{T_2} + P_{T_3} = 1$.

Отсюда становится возможным определить ФР $\varphi_1(t)$ времени пребывания системы в подмножестве M_+ с начальным состоянием в S_1, как смесь ФР времен пребывания системы в подмножестве каждой траектории с коэффициентами равными вероятностям реализации этих траекторий:

$$\varphi_1(t) = F_{T_1}(t) \cdot P_{T_1} + F_{T_2}(t) \cdot P_{T_2} + F_{T_3}(t) \cdot P_{T_3}.$$

Рассмотрим использование первого метода моделирования системы.

Имеется производственная структура, содержащая технологическую ячейку (ТЯ) и накопитель (Н), позволяющий данной структуре функционировать некоторое случайное время после отказа ТЯ. Задача ставится следующим образом: по известным функциям распределения $F_{01}(t)$, $F_{10}(t)$ и $F_{12}(t)$ времен наработки на отказ ξ_0и восстановление η_1 производственной ячейки, а также заданного временного резерва ξ_1, обеспечиваемого накопителем, являющихся случайными величинами общего вида [4], определить функцию распределения времени пребывания системы в подмножестве работоспособных состояний $M_+ = \{S_0, S_1\}$, являющегося временем наработки на отказ участка в целом. ФР $F_{01}(t)$, $F_{10}(t)$, $F_{12}(t)$ имеют плотности распределения $f_{01}(t)$, $f_{10}(t)$, $f_{12}(t)$. Отказ системы наступает в момент времени, когда время восстановления η_1

объекта после очередного нарушения его работоспособности превысит его резерв времени ξ_1 $(\eta_1 > \xi_1)$, и продолжается до окончания восстановления объекта.

Система имеет следующие состояния:

S_0 — ячейка исправна, продукция участком выдается, состояние работоспособное;

S_1— ячейка неисправна, резерв времени не израсходован, продукция участком выдается, состояние работоспособное;

S_{2x}— ячейка неисправна, резерв времени израсходован, продукция участком не выдается, до восстановления ТЯ осталось время x, состояние не работоспособное (отказовое).

Граф состояний системы представлен на рисунке 3.

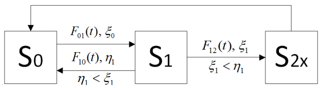

Рис. 3 – Граф состояний для исходной системы

Для данной системы известно решение классическим методом последовательных приближений [4], позволяющее определить ФР $F_{отк}(t)$ времени наработки на отказ:

$$F_{отк}(t) = \int_0^t F_{01}(t-y)\,\overline{F}_{10}(y)\,f_{12}(y)\,dy +$$
$$+ \int_0^t h(t-x)\,dx \int_0^x F_{01}(x-y)\,\overline{F}_{10}(y)\,f_{12}(y)\,dy$$

где $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_{01}(x) * \left(\overline{F}_{12}(x) \cdot f_{10}(x) \right) \right]$.

Получим решение предлагаемым точным методом определения ФР $F_{\Sigma}^{\theta}(t)$ времени наработки на отказ.

Первый шаг. Переход от системы с непрерывными состояниями к системе с дискретными состояниями $S_i \in M_+$.

Времена пребывания в состояниях

$$\theta_0 = \xi_0;\ \Theta_1 = (\xi_1 \wedge \eta_1);\Theta_{2x} = x \tag{14}$$

На основании (14) определяем ФР времен пребывания в состояниях:

$$F_0(t) = F_{01}(t);\ \overline{F}_1(t) = \overline{F}_{01}(t)\,\overline{F}_{12}(t);$$

$$F_1(t) = 1 - \overline{F}_1(t) = 1 - \overline{F}_{01}(t)\,\overline{F}_{12}(t);\ F_{2x}(t) = 1_x(t) = \begin{cases} 0, & t < x; \\ 1, & t \geqslant x. \end{cases} \tag{15}$$

Вероятности переходов с учетом (15) определяются из выражений:

$$\begin{cases} p_{01} = 1 \\ P\left\{(\xi_1 > \eta_1)\right\} = p_{10} = \int\limits_0^\infty F_{10}(t) f_{12}(t)\,dt \\ P\left\{S_1 \to S_{2x}\right\} = p_{1,2x} = \int\limits_0^\infty f_{10}(u+x) f_{12}(u)\,du \\ P\left\{S_{2x} \to S_0\right\} = p_{2x,0} = 1 \end{cases} \tag{16}$$

Стационарное распределение ВЦМ с учетом (15), (16) определяется по формуле [3] $\rho(x) = \int\limits_x p(y,x)\,\rho(y)\,dy$ и имеет вид:

$$\begin{cases} \rho_0 = \int\limits_0^\infty \rho_{2x} dx + \rho_1 \int\limits_0^\infty F_{10}(t) f_{12}(t)\,dt; \\ \rho_1 = \rho_0; \\ \rho_{2x} = \int\limits_0^\infty \rho_1 f_{10}(u+x) f_{12}(u)\,du; \\ \rho_0 + \rho_1 + \rho_{2x} = 1 \text{ – нормировочное условие.} \end{cases} \tag{17}$$

Решение системы (17) имеет вид

$$\rho_0 = \rho_1 = \frac{1}{2 + P\left\{\xi_1 < \eta_1\right\}}, \rho_{2x} = \frac{1}{2 + P\left\{\xi_1 < \eta_1\right\}} \cdot \int\limits_0^\infty f_{10}(u+x) f_{12}(u)\,du. \tag{18}$$

Так как состояние S_{2x} содержит непрерывную компоненту x, то оно представляет собой множество непрерывных состояний. Суммируя удельные частоты попадания в непрерывное множество состояний S_{2x} находим ρ_2 – частоту попадания во множество $2x$ в целом:

$$\rho_2 = \int\limits_0^\infty \rho_{2x} dx = \rho_0 \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty f_{10}(u+x) f_{12}(u)\,du = \\ = \tfrac{1}{2+P\{\xi_1<\eta_1\}} \cdot P\left\{\xi_1 < \eta_1\right\} = \tfrac{P\{\xi_1<\eta_1\}}{2+P\{\xi_1<\eta_1\}}.$$

Далее определим ФР $F_\theta(t)$ времени пребывания во множестве $2x$ в целом, вне зависимости от начального состояния, с помощью формулы усреднения [1]:

$$F_\theta(t) = \frac{\int\limits_{M_1} G_y(t) dy \int\limits_{M_2} p(x,dy)\rho(dx)}{\int\limits_{M_1} dy \int\limits_{2_-} p(x,dy)\rho(dx)}, \tag{19}$$

где x – непрерывная составляющая множества M_-; y – непрерывная составляющая множества M_+; $\rho(dx)$ – частота попадания системы в состояния на интервале $[x, x+dx]$ непрерывного множства M_-; $p(x,dy)$ – плотность вероятности перехода из состояний непрерывного множества M_- в состояния множества M_+ находящиеся на интервале $[y, y+dy]$; G_y – ФР времени выхода из состояний, находящихся на интервале $[y, y+dy]$, в множество M_-.

Подставляя в формулу (19) выражения для $p(x, dy)$ и $\rho(dx)$ из (17), (18), получим:

$$F_{2x}^{\theta}(t) = \frac{\int\limits_0^{\infty} dx \int\limits_0^{\infty} f_{10}(u+x) f_{12}(u) 1_x(t) du}{\int\limits_0^{\infty} dx \int\limits_0^{\infty} f_{10}(u+x) f_{12}(u) du} = F_2(t)$$

Проведя ряд преобразований, приводим полученное выражение к виду:

$$F_{2x}^{\theta}(t) = F_2(t) = \frac{\int\limits_0^{\infty} f_{12}(u) F_{10}(t+u) du - P\{\xi_1 > \eta_1\}}{P\{\xi_1 > \eta_1\}}.$$

Так как $F_0(t)$; $F_1(t)$ остались те же, что и ранее то, для перехода от системы с непрерывными состояниями к системе с дискретными состояниями осталось определить

P_{12}, которое найдем, интегрируя выражение для $p_{1,2x}$ по x:

$$p_{12} = \int\limits_0^{\infty} p_{1,2x} dx = \int\limits_0^{\infty} dx \int\limits_0^{\infty} f_{10}(u+x) f_{12}(u) du = P\{\xi_1 > \eta_1\}.$$

Первый шаг выполнен. Граф состояний дискретной системы представлен на рисунке 3.

Второй шаг. На основании выше изложенной теоремы, заменяются времена пребывания в состояниях α_i, $(i = \overline{1,3})$ на времена θ_i, $(i = \overline{1,3})$ – для них определяются в области изображений функции $F_i^{\theta}(s)$ и плотности $f_i^{\theta}(s)$ распределения времен пребывания системы в состояниях $S_i \in M_+$, $(i = \overline{1,3})$ с учетом повторных возвратов по формулам (1), (2) в соответствии с приведенной теоремой. Далее, обратным преобразованием Лапласа определяются $F_i^{\theta}(t)$ $f_i^{\theta}(t)$. Второй шаг выполнен.

Третий шаг. В соответствии со следствием 1 теоремы, определяем время пребывания системы в подмножестве M_+, как сумму времен пребывания в каждом состоянии с учетом повторных возвратов, для которого ФР равна последовательной свертке ФР времен пребывания в каждом из состояний подмножества M_+ по формуле (13):

$$F_{\Sigma}^{\theta}(t) = F_0^{\theta}(t) * F_1^{\theta}(t),$$

где $*$ – обозначение оператора свертки.

Третий шаг выполнен. Задача решена.

Результаты сравнения полученных двумя методами функций распределения $F_{\Sigma}^{\theta}(t)$ и $F_{отк}(t)$ представлены на рисунке 4.

Исходными данными для моделирования служат:

ФР $F_{01}(t)$, $F_{10}(t)$ и $F_{12}(t)$ распределены по обобщенному закону Эрланга второго порядка с параметрами λ_1, λ_2; μ_1, μ_2; υ_1, υ_2 соответственно. Причем

$$f_{01}(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})}{\lambda_2 - \lambda_1}, \ \lambda_1 = 2.725(\boldsymbol{ч}^{-1}), \ \lambda_2 = 0.275(\boldsymbol{ч}^{-1});$$

$$f_{10}(t) = \frac{\mu_1 \mu_2 (e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t})}{\mu_2 - \mu_1}, \ \mu_1 = 80(\boldsymbol{ч}^{-1}), \ \mu_2 = 26.7(\boldsymbol{ч}^{-1}).$$

$$f_{12}(t) = \frac{\upsilon_1 \upsilon_2 (e^{-\upsilon_1 t} - e^{-\upsilon_2 t})}{\upsilon_2 - \upsilon_1}, \ \upsilon_1 = 46.294(\boldsymbol{ч}^{-1}), \ \upsilon_2 = 458.268(\boldsymbol{ч}^{-1}).$$

На рисунке 4 показаны результаты моделирования. Кривая 1 показывает, что результаты моделирования предложенным точным методом и приближенным (при 15 приближениях) практически совпадают. Кривые 2, 3, 4, 5 показывают стремление результата к точному решению в зависимости от количества приближений.

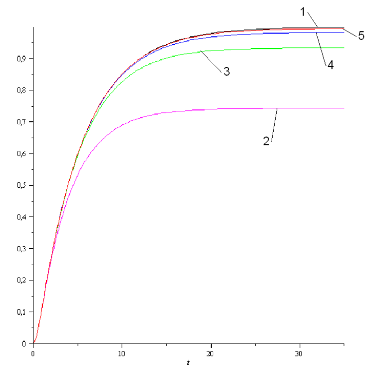

Рис. 4 – Сравнение результатов моделирования классическим приближенным методом последовательных приближений и предлагаемым точным методом. Кривая 1 – решение предлагаемым точным методом и приближенным методом при 15 приближениях; Кривая 2 – нулевое приближение; Кривая 3 – третье приближение; Кривая 4 – четвертое приближение; Кривая 5 – пятое приближение.

Вывод: проведенные исследования подтвердили правильность предложенного метода, что открывает новые широкие возможности в области моделирования стохастических систем. В дальнейших исследованиях планируется провести сравнение разработанного метода с классическим на примерах моделирования различных производственных и информационных систем.