УДК 532.5, 621.6

К.С. Бовсуновська, Л.М. Семанишин

ДО ВИЗНАЧЕННЯ СТРУКТУРИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ГІДРОДИНАМІКИ

Анотація: Розглядається задача еквівалентного спрощення виразів, що отримуються при розв'язанні системи квазілійних рівнянь Нав'є—Стокса. Запропоновано алгоритм спрощення, що ґрунтується на використанні теорії ланцюгових дробів.

Ключові слова: інтегральні перетворення, ітераційна схема, конвективно-дифузійний перенос, ланцюгові дроби, рівняння Нав'є-Стокса.

У результаті застосування числово-аналітичного методу розв'язання нелінійних рівнянь із частинними похідними [1] до розв'язання системи рівнянь гідродинаміки (рівнянь Нав'є–Стокса) [2] отримують розв'язання для компонент швидкості руху субстанції $u = [u_x, u_y, u_z]$ (рідинне або газове середовище) у такому вигляді (на першій ітерації):

$$u_x^{(1)}(x,y,z,t) = u_x^{(0)}(x,y,z,t) + \\ + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} X_i(\alpha_i, x) Y_j(\beta_{i,j}, y) Z_k(\gamma_{i,j,k}, z) \left[U1_{i,j,k}^{(1)} + U2_{i,j,k}^{(1)} \right] e^{-\delta_{i,j,k} t}. \tag{1}$$

Згідно загальної схеми ітераційного процесу лінійна частина розв'язання системи нестаціонарних рівнянь гідродинаміки, яка містить і рівняння Нав'є–Стокса, може бути подана у вигляді ряду:

$$u_x^{(0)}(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} X_{u_x}(\alpha_i, x) Y_{u_x}(\beta_{i,j}, y) Z_{u_x}(\gamma_{i,j,k}, z) \\ \left[U1_{i,j,k}^{(0)} + U2_{i,j,k}^{(0)} \right] e^{-\delta x_{i,j,k} t}. \tag{2}$$

Тут $X_{u_x}(\alpha_i, x)$, $Y_{u_x}(\beta_{i,j} y)$, $Z_{u_x}(\gamma_{i,j,k} z)$ – власні функції лінійної частини крайової задачі на власні значення і функції стосовно компоненти швидкості u_x [3]. Числа N_x, N_y, N_z визначають кількість членів ряду, що враховуються у розв'язанні з погляду на потрібну точність розв'язання. Величини $U1_{i,j,k}^{(0)}$, $U2_{i,j,k}^{(0)}$ визначаються початковими і межовими умовами відповідної крайової задачі, що підпорядковуються відповідним інтегральним перетворенням.

Аналогічно можна записати розв'язання лінійної частини відносно компонент швидкості u_y, u_z:

$$u_y^{(0)}(x,y,z,t)=\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z}X_{u_y}(\alpha_i,x)\,Y_{u_y}(\beta_{i,j},y)\,Z_{u_y}(\gamma_{i,j,k},z)\left[V1_{i,j,k}^{(0)}+V2_{i,j,k}^{(0)}\right]e^{-\delta_{i,j,k}t}. \tag{3}$$

$$u_z^{(0)}(x,y,z,t)=\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z}X_{u_z}(\alpha_i,x)\,Y_{u_z}(\beta_{i,j},y)\,Z_{u_z}(\gamma_{i,j,k},z)\left[W1_{i,j,k}^{(0)}+W2_{i,j,k}^{(0)}\right]e^{-\delta_{i,j,k}t}. \tag{4}$$

Наступний етап полягає обчисленні інтегральних перетворень від добутку шуканих функцій у конвективній частині квазілінійних рівнянь Нав'є–Стокса – $u_x\partial u_x/\partial x$, $u_y\partial u_x/\partial y$, $u_z\partial u_x/\partial z$ у першому рівнянні, $u_x\partial u_y/\partial x$, $u_y\partial u_y/\partial y$, $u_z\partial u_y/\partial z$ – у другому та $u_x\partial u_z/\partial x$, $u_y\partial u_z/\partial y$, $u_z\partial u_z/\partial z$ у третьому рівнянні системи. Те саме стосується й рівняння відносно температури потока рідини або газу.

Добуток виразів типу (2), (3) і застосування інтегральних перетворень за просторовими змінними дає вираз вигляду

$$\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z}\sum_{l=1}^{N_x}\sum_{m=1}^{N_y}\sum_{n=1}^{N_z}U3_{i,j,k}e^{-\delta x_{i,j,k}t}V3_{l,m,n}e^{-\delta_{i,j,k}t} \tag{5}$$

Виконання подальших ітерацій кожного разу призводить до подвоєння сум відносно часової змінної, що фактично унеможливлює подальше використання такого вигляду виразів.

У зв'язку з цим у роботі вирішується проблема еквівалнтного спрощення виразів вигляду (5) таким чином, щоб уніфікувати отримані розв'язання з метою їхнього подальшого використання для розв'язання квазілінійної системи рівнянь Нав'є–Стокса.

У роботі пропонується алгоритм еквівалентного спрощення, що грунтується на застосуванні апарату ланцюгових дробів [3].

Застосуємо до виразу (5) інтегральне перетворення за Лапласом. Маємо

$$\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z}\sum_{l=1}^{N_x}\sum_{m=1}^{N_y}\sum_{n=1}^{N_z}\frac{R_{i,j,k,l,m,n}}{p+\delta x_{i,j,k}+\delta_{l,m,n}}. \tag{6}$$

Розглянемо спочатку часткову суму вигляду

$$Y(p)=\sum_{n=1}^{N}\frac{R_n}{p+\delta_n}. \tag{7}$$

Подамо її у вигляді дробово-раціональної функції

$$Y(p) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{N-1} b_n p^n}{\sum\limits_{n=0}^{N} a_n p^n}. \tag{8}$$

Застосування алгоритму еквівалентного спрощення [3] дає можливість отримати замість (8) такий вираз:

$$Y(p) \approx \frac{b_0 + b_1 p}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}. \tag{9}$$

У просторі оригіналів цьому виразу відповідає

$$y(t) = e^{-\alpha t}[A\varphi_1(t) + B\varphi_2(t)], \tag{10}$$

де

$$\varphi_1(t) = \left(\begin{array}{ll} \cos\omega t, & \omega > 0 \\ \cosh\omega t, & \omega < 0. \end{array} \right.$$

$$\varphi_2(t) = \left(\begin{array}{ll} \sin\omega t, & \omega > 0 \\ \sinh\omega t, & \omega < 0. \end{array} \right.$$

Повторне застосування алгоритму (8)–(9) до решти складових ряду (5) дозволяє отримати вираз вигляду (10). Обгрунтування такого підходу – будь-яка система високого порядку наближено веде себе як система другого порядку із запізненням.

Отже,

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z}\sum_{l=1}^{N_x}\sum_{m=1}^{N_y}\sum_{n=1}^{N_z} U3_{i,j,k} e^{-\delta x_{i,j,k} t} V3_{l,m,n} e^{-\delta_{i,j,k} t} \approx \\ \approx e^{-\alpha t}\left[A\varphi_1(t) + B\varphi_2(t)\right]. \end{gathered} \tag{11}$$

Тоді розв'язання, наприклад, першого рівняння (1) системи квазілійних рівнянь Нав'є–Стокса можна наближено подати у вигляді функції

$$u_x^{(1)}(x,y,z,t) = u_x^{(0)}(x,y,z,t)$$

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z} X_i\left(\alpha_i, x\right) Y_j\left(\beta_{i,j}, y\right) Z_k\left(\gamma_{i,j,k}, z\right) \times \\ \times\, e^{-\alpha_{i,j,k} t}\left[A_{i,j,k}\varphi_1(\omega_{i,j,k} t) + B_{i,j,k}\varphi_2(\omega_{i,j,k} t)\right]. \end{gathered} \tag{12}$$

Похибки, що накопичуються за рахунок такої апроксимації, поперше, не є суттєві (рис. 1), по-друге, їх можна скопенсувати за рахунок додаткових ітерацій під час розв'язання системи рівнянь.

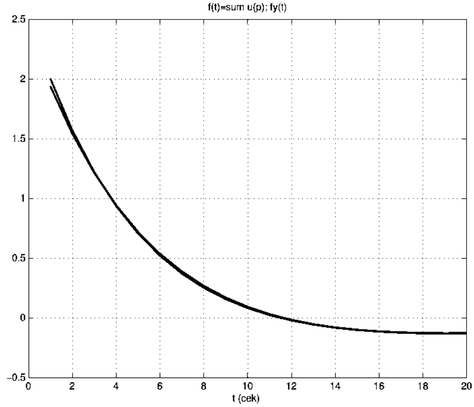

Рис. 1 – Похибки, що накопичуються за рахунок апроксимації

Наведений алгоритм може ефективно застосовуватися до розв'язання широкого класу нестаціонарних нелінійних рівнянь математичної фізики.

Список використаних джерел

1. Зеленський К.Х. Ітераційний метод розв'язання нелінійних крайових задач: наукові нотатки / К.Х. Зеленський. Міжв. збірник. Вип. 26.—Луцьк, ЛНТУ, 2009.—С.92—100.
2. Теплообмен и гидродинамика в полях цент
3. Халатов А. А. Робежных массовых сил. Том 3.— Закрученные потоки: / А. А. Халатов, А. А. Авраменко, И. В. Шевчук // Институт техн. теплофизики НАНУ, 2000. –474 с.
4. Зеленський К. Х. Комп'ютерні методи прикладної математики/ К.Х. Зеленський, В. М. Ігнатенко, О. П. Коц // К.: Наукова думка, 2002. – 480 с.

Отримано 20.04.2015 р.