УДК 656.61.052

Астайкин Д.В., Алексейчук Б.М.
ОНМА

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАВИГАЦИОННЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ СМЕШАННЫМИ ЗАКОНАМИ ДВУХ ТИПОВ

В последнее время во многих случаях при обработке статистических данных погрешностей навигационных измерений, полученных в натурных наблюдениях, обнаружено, что они не подчиняются нормальному закону [1, 2]. Это обстоятельство повело к поиску альтернативных законов распределения вероятностей погрешностей навигационных измерений, в качестве которых предложены смешанные законы двух типов, причем их плотность распределения выражается в элементарных функциях [1, 3, 4].

Смешанные законы распределения, плотность которых выражается в явном виде, получены в работе [5], однако отсутствуют выражения для их функции распределения, что затрудняет проверку статических гипотез распределения случайных погрешностей навигационных измерений, полученных в натурных наблюдениях.

Целью статьи является вывод аналитических выражений функции распределения вероятностей случайных погрешностей измерения навигационных параметров, подчиняющихся смешанным законам первого и второго типа для идентификации законов распределения навигационных погрешностей.

В работе [5] получены выражения для плотностей двух типов смешанных законов распределения вероятностей погрешностей навигационных измерений, имеющих вид:

$$f_1(x) = \frac{2^n \alpha^{n+\frac{1}{2}} n!}{\sqrt{2\pi}\ 1\cdot 3\cdot (2n-1)} \ \frac{1}{(x^2/2+\alpha)^{n+1}} \ \ (n \le 6);$$

$$f_2(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot (2n+1)\alpha^{n+1}}{\sqrt{2}\,2^{n+1} n!} \ \frac{1}{(x^2/2+\alpha)^{n+1,5}} \ \ (n \le 5),$$

где α – масштабный параметр; n – существенный параметр.

Однако в работе [5] отсутствуют выражения функций распределения смешанных законов, поэтому найдем аналитическое выражение для функций распределения.

Функция распределения смешанного закона первого типа определяется выражением:

$$F_{kn}(x)=\frac{2^n\alpha^{n+\frac{1}{2}}n!}{\sqrt{2\pi}\;1\cdot 3\cdot(2n-1)}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{d\xi}{(0{,}5\xi^2+\alpha)^{n+1}}\,.$$

Заменим переменную: $y=\frac{\xi}{\sqrt{2}}$, $d\xi=\sqrt{2}dy$ и получим:

$$F_{kn}(x)=\frac{2^n\alpha^{n+\frac{1}{2}}n!}{\sqrt{2\pi}\;1\cdot 3\cdot(2n-1)}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\frac{dy}{(y^2+\alpha)^{n+1}}\,.$$

Данный интеграл имеет известное решение с помощью рекуррентной формулы:

$$F_{kn}(x)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{n-i}\alpha^{(n-i)+\frac{1}{2}}(n-i)!}{\pi\;1\cdot 3\cdot[2n-(2i-1)]}\frac{y}{(y^2+\alpha)^{n+1-i}}\right\}\Bigg|_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}}+\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\frac{dy}{(y^2+\alpha)}\,.$$

Подставляя пределы интегрирования, получим функцию распределения

$$F_{kn}(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2\alpha}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{n-i}\alpha^{(n-i)+\frac{1}{2}}(n-i)!}{\sqrt{2\pi}\;1\cdot 3\cdot[2n-(2i-1)]}\frac{x}{(0{,}5x^2+\alpha)^{n+1-i}}\quad (n\le 6).\quad (1)$$

Графики функции распределения $F_{k1}(x)...F_{k6}(x)$ представлены на рис. 1, причем нормированная случайная величина изменяется в пределах от – 6 до 6 с.к.о.

Обращаем внимание на то обстоятельство, что с ростом существенного параметра n смешанное распределение стремится к распределению Гаусса.

Смешанное распределение первого типа применимо для существенного параметра $n\le 6$, поэтому в табл. 1 приведены аналитические выражения функции распределения $F_{k1}(x)...\,F_{k6}(x)$.

В приведенных выражениях для функций распределения принимается выражение:

$$F_k(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2\alpha}}\,.$$

Аналогично находим функцию распределения $F_{Pn}(x)$ для смешанного распределения второго типа:

$$F_{Pn}(x)=1-2^n 1\cdot 3\cdot 5\cdot(2n+1)\left\{\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!(n-j)!(n+1+j)}\frac{\alpha^{n+1+j}}{\left(x^2+2\alpha+x\sqrt{x^2+2\alpha^{n+1+j}}\right)}\right\}.\quad (2)$$

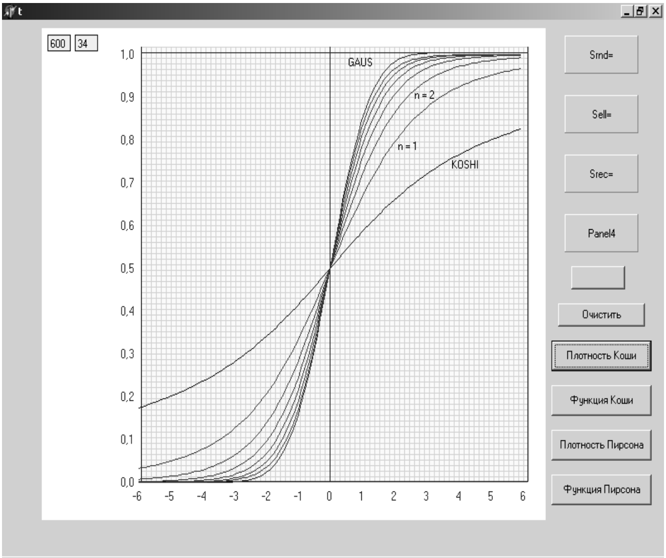

Рис. 1. Функции распределения смешанного закона первого типа

Таблица 1

Функции распределения смешанных распределений первого типа

$F_{kn}(x)$	Аналитические выражения
$F_{k1}(x)$	$F_k(x)+\dfrac{\alpha^{1/2}x}{\sqrt{2}\pi(x^2/2+\alpha)}$
$F_{k2}(x)$	$F_{k1}(x)+\dfrac{2\alpha^{3/2}x}{3\sqrt{2}\pi(x^2/2+\alpha)^2}$
$F_{k3}(x)$	$F_{k2}(x)+\dfrac{8\alpha^{5/2}x}{15\sqrt{2}\pi(x^2/2+\alpha)^3}$
$F_{k4}(x)$	$F_{k3}(x)+\dfrac{48\alpha^{7/2}x}{105\sqrt{2}\pi(x^2/2+\alpha)^4}$
$F_{k5}(x)$	$F_{k4}(x)+\dfrac{384\alpha^{9/2}x}{945\sqrt{2}\pi(x^2/2+\alpha)^5}$
$F_{k6}(x)$	$F_{k5}(x)+\dfrac{3840\alpha^{11/2}x}{10395\sqrt{2}\pi(x^2/2+\alpha)^6}$

Так как смешанное распределение второго типа применимо для существенного параметра $n \le 5$, то в табл. 2 приведены аналитические выражения функции распределения $F_{P1}(x)...F_{P5}(x)$, а их графики представлены на рис. 2.

Таблица 2

Функции распределения смешанных распределений второго типа

$F_{Pn}(x)$	Аналитические выражения
$F_{P1}(x)$	$1-[\frac{3\alpha^2}{z^2}-\frac{2\alpha^3}{z^3}]$
$F_{P2}(x)$	$1-[\frac{10\alpha^3}{z^3}-\frac{15\alpha^4}{z^4}+\frac{6\alpha^5}{z^5}]$
$F_{P3}(x)$	$1-[\frac{35\alpha^4}{z^4}-\frac{84\alpha^5}{z^5}+\frac{70\alpha^6}{z^6}-\frac{20\alpha^7}{z^7}]$
$F_{P4}(x)$	$1-[\frac{126\alpha^5}{z^5}-\frac{420\alpha^6}{z^6}+\frac{540\alpha^7}{z^7}-\frac{315\alpha^8}{z^8}+\frac{70\alpha^9}{z^9}]$
$F_{P5}(x)$	$1-[\frac{462\alpha^6}{z^6}-\frac{1980\alpha^7}{z^7}+\frac{3465\alpha^8}{z^8}-\frac{3080\alpha^9}{z^9}+\frac{1386\alpha^{10}}{z^{10}}-\frac{252\alpha^{11}}{z^{11}}]$

В приведенных выражениях принято обозначение

$$z = x^2 + 2\alpha + x\sqrt{x^2 + 2\alpha}\ .$$

Для проверки правильности полученных выражений функции распределения смешанных законов обоих типов с помощью численного интегрирования методом Симпсона рассчитывались значения

$$F_{ik,P}(x,\alpha,n) = \int_{-\infty}^{x} f_{1,2}(\xi,\alpha,n)d\xi$$

для заданных значений x и для этих же значений рассчитываются значения функций распределения $F_{kn}(x)$ и $F_{Pn}(x)$ по формулам (1) и (4). Значения $F_{ik}(x,\alpha,n)$ сравниваются с $F_{kn}(x)$, и $F_{iP}(x,\alpha,n)$ с $F_{Pn}(x)$, на основании чего делается заключение о корректности выражений для функций распределения $F_{kn}(x)$ и $F_{Pn}(x)$. Результаты расчетов представлены на рис. 3 и 4.

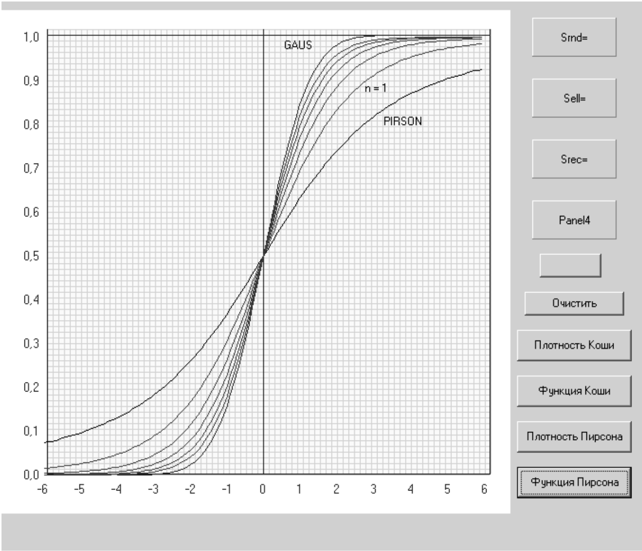

Рис. 2. Функции распределения смешанного закона второго типа

ОБОБЩЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОШИ																
n	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4	4,4	4,8	5,2	5,6	6
1	5005	5690	6348	6922	7479	7931	8289	8600	8863	9064	9226	9356	9456	9545	9611	9671
	5000	5690	6348	6950	7479	7931	8306	8614	8863	9064	9226	9356	9460	9545	9614	9671
2	5007	5916	6771	7483	8133	8618	8971	9248	9459	9604	9707	9782	9834	9876	9904	9927
	5000	5916	6771	7517	8133	8618	8987	9260	9459	9604	9707	9782	9837	9876	9905	9927
3	5009	6095	7093	7890	8572	9042	9354	9577	9730	9823	9883	9922	9946	9964	9975	9982
	5000	6095	7093	7927	8572	9042	9368	9586	9730	9823	9883	9922	9947	9964	9975	9982
4	5010	6247	7357	8206	8888	9321	9585	9756	9861	9918	9952	9971	9982	9989	9993	9995
	5000	6247	7357	8244	8888	9321	9596	9762	9861	9918	9952	9971	9982	9989	9993	9995
5	5011	6380	7581	8460	9124	9513	9729	9857	9927	9962	9980	9989	9994	9996	9998	9998
	5000	6380	7581	8499	9124	9513	9738	9861	9927	9962	9980	9989	9994	9996	9998	9998
6	5012	6500	7775	8669	9304	9647	9821	9915	9961	9982	9991	9995	9997	9999	9999	9999
	5000	6500	7775	8708	9304	9647	9828	9918	9961	9982	9991	9995	9998	9999	9999	9999

Астайкин_ОСТАЛЬНО... Delphi 5 Proj_gidr

Рис. 3. Проверка функции распределения смешанного закона первого типа

ОБОБЩЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПИРСОНА

n	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4	4,4	4,8	5,2	5,6	6
1	5006	5811	6576	7228	7843	8320	8683	8982	9223	9397	9529	9629	9703	9765	9809	9847
	5000	5811	6576	7260	7843	8320	8700	8995	9223	9397	9529	9629	9706	9765	9811	9847
2	5008	6010	6941	7700	8372	8853	9188	9439	9619	9736	9816	9870	9906	9934	9951	9965
	5000	6010	6941	7736	8372	8853	9202	9449	9619	9736	9816	9870	9908	9934	9952	9965
3	5009	6174	7231	8057	8742	9195	9483	9680	9807	9880	9925	9953	9969	9980	9987	9991
	5000	6174	7231	8095	8742	9195	9496	9687	9807	9880	9925	9953	9970	9980	9987	9991
4	5011	6315	7473	8339	9014	9426	9665	9813	9900	9944	9969	9982	9989	9994	9996	9997
	5000	6315	7473	8378	9014	9426	9675	9819	9900	9944	9969	9982	9990	9994	9996	9997
5	5012	6441	7681	8569	9220	9586	9780	9890	9947	9973	9987	9993	9996	9998	9999	9999
	5000	6441	7681	8608	9220	9586	9788	9894	9947	9973	9987	9993	9996	9998	9999	9999

Рис. 4. Проверка функции распределения смешанного закона второго типа

Для смешанного закона первого типа, принимая α=6,7, а также n =1…6 рассчитаны значения функции распределения $F_{ik}(x, \alpha, n)$, которые представлены на верхней строке каждого значения n в пределах от 0 до 6 с.к.о. (рис. 3). В нижней строке каждого значения n рассчитаны значения $F_{kn}(x)$ по формуле (1). Причем приведенные значения следует умножить на 10^{-4}.

Для того же значения α=6,7 и n =1…5 на рис. 4 представлены результаты расчета для смешанного закона второго типа по формуле (2).

Анализ таблиц на рис. 3 и 4 показывает, что результаты численного интегрирования практически совпадают с результатами расчета соответствующих функций распределения. Данное обстоятельство подтверждает корректность полученных выражений для функций распределения смешанных законов распределения обоих типов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кондрашихин В.Т. Определение места судна. – М.: Транспорт, 1989. – 250 с.

2. Hsu D. A. An analysis of error distribution in navigation // The Journal of Navigation. – Vol. 32. – № 3. – P. 426 – 429.

3. Ткаченко А.С. К вопросу формирования модели смешанного

распределения погрешностей навигационных измерений // Судовождение. – 2005. – № 10 – С. 118 – 122.

4. Алексишин В.Г. Ткаченко А.С. Требования к плотности распределения среднего квадратического отклонения в модели смешанного распределения // Судовождение. – 2006. – № 11. – С. 9 – 13.

5. Ткаченко А.С. Совершенствование методов контроля и прогноза места судна. Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.22.13. – Одесса: ОНМА, 2009. – 24 с.