ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБСЕРВОВАННЫХ КООРДИНАТ СУДНА ПРИ СМЕШАННЫХ ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАВИГАЦИОННЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

В ряде случаев обработка статистических данных погрешностей навигационных измерений, полученных в натуральных наблюдениях, показала, что их гистограммы неудовлетворительно описываются нормальным законом распределения. В работах [1, 2] также показано, что погрешности навигационных измерений не подчиняются нормальному закону. Модели смешанного распределения разных типов рассмотрены в работах [1, 3, 4].

Смешанные законы распределения, плотность которых выражается в явном виде, получены в работе [5], однако не учтена ситуация, когда исходная выборка содержит нормально распределенные погрешности навигационных измерений с различными дисперсиями, что определило выбор тематики настоящей работы.

Целью статьи является оценка эффективности координат судна, рассчитанных методом наименьших квадратов в случае смешанного распределения погрешностей навигационных измерений выборки.

Допустим, погрешности общей выборки являются нормально распределенными случайными величинами, принадлежащими различным частным выборкам с определенным значением дисперсии σ_i^2 . Другими словами, общая выборка является смесью частных выборок нормально распределенных погрешностей с различными дисперсиями, причем с.к.о. σ выборок является дискретным распределением со значениями $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n$. Тогда плотность распределения общей выборки $f_s(\xi)$ имеет следующий вид:

$$f_s(\xi) = \sum_{i=1}^n f_N(\xi, \sigma_i) p_i.$$

Учитывая выражение для нормальной плотности $f_N(\xi, \sigma_i)$, получим:

$$f_s(\xi) = \sum_{i=1}^n p_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_i^2}\right).$$

Плотность распределения $f_s(\xi)$ зависит от значений n , p_i и σ_i , причем должны соблюдаться следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad (1)$$

$$\sigma_m^2 = \sum_{i=1}^n p_i \sigma_i^2. \quad (2)$$

Набор вероятностей $\{p_i\}$ определяется уравнением (1). Рассмотрим наборы, каждый член которого пропорционально изменяется относительно минимального значения, т.е. имеет место соотношение:

$$p_i = p_{\min} + i\Delta p.$$

Значение Δp находится из равенства:

$$\sum_{i=1}^n (p_{\min} + i\Delta p) = 1,$$

откуда

$$\Delta p = \frac{1 - np_{\min}}{\sum_{i=1}^n i}. \quad (3)$$

Анализ выражения (3) показывает, что значение Δp зависит от величины параметра $p_{\min}$, причем при значении $p_{\min} = 0$ величина $\Delta p > 0$ и принимает наибольшее значение $\Delta p = np_{\min} / \sum_{i=1}^n i$, при увеличении $p_{\min}$ до значения $p_{\min} = 1/n$ величина Δp обращается в ноль и последовательность $\{p_i\}$ содержит одинаковые значения $p_i = p_{\min}$. При дальнейшем росте $p_{\min} > 1/n$ величина Δp становится отрицательной, а набор вероятностей $\{p_i\}$ становится убывающим, при этом существует некоторое наибольшее значение

$$p_{\min}^m < \frac{n}{n^2 - \sum_{i=1}^n i},$$

при котором последний член p_n убывающего набора $\{p_i\}$ является положительным.

Набор с.к.о. $\{\sigma_i\}$ определяется выбранным набором $\{p_i\}$ с учетом условия (2), причем набор $\{\sigma_i\}$ содержит пропорционально изменяющиеся члены σ_i в соответствии с зависимостью:

$$\sigma_i^2 = \sigma_{\min}^2 + i\Delta\sigma_i^2.$$

Величина

$$\sigma_m^2 = \sum_{i=1}^n p_i (\sigma_{\min}^2 + i\Delta\sigma_i^2),$$

откуда:

$$\Delta\sigma_i^2 = \frac{\sigma_m^2 - \sigma_{\min}^2}{\sum_{i=1}^n ip_i}.$$

Имеет смысл рассматривать только неубывающие последовательности $\{\sigma_i\}$, при которых $\Delta\sigma_i^2 \geq 0$. Поэтому параметр $\sigma_{\min}^2$ может принимать значения из интервала с границами 0 и σ_m^2 , причем в случае $\sigma_{\min}^2 = \sigma_m^2$ смешанная выборка является выборкой нормально распределенных погрешностей с дисперсией σ_m^2 .

Рассмотренная плотность распределения погрешностей измерений навигационного параметра является истинной плотностью распределения случайных величин смешанной выборки $f_s(x)$, а предполагаемая плотность $\varphi(x)$ является плотностью нормального распределения с дисперсией σ_m^2 . Для определения эффективности обсервованных координат судна, полученных методом наименьших квадратов при наличии избыточных измерений, найдем несобственные интегралы q_s , p_s и s_s [6].

Несобственный интеграл q_s зависит от предполагаемого нормального распределения $\varphi(x)$ [6]:

$$q_s = \int_{R1} f_s(x) \left\{ \frac{\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) \right] \varphi(x) - \left[\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \right]^2}{\varphi^2(x)} \right\} dx = -\frac{1}{\sigma_m^2}.$$

В свою очередь, несобственный интеграл [6]:

$$p_s = \int_{R1} f_s(x) \left\{ \left[\frac{\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x)}{\varphi(x)} \right]^2 \right\} dx = \int_{R1} \frac{x^2}{\sigma_m^4} f_s(x) dx = \frac{1}{\sigma_m^4} \sum_{i=1}^n p_i \sigma_i^2 .$$

Несобственный интеграл [6]:

$$s_s = \int_{R1} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial x} f_s(x) \right]^2}{f_s(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{R1} x^2 \frac{\left[\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\sigma_i^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}\right) \right]^2}{\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\sigma_i} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}\right)} dx .$$

С учетом полученных выражений для несобственных интегралов q_s , p_s и s_s эффективность [6]:

$$e = \frac{q_s^2}{p_s s_s} = \frac{\frac{1}{\sigma_m^4}}{\frac{1}{\sigma_m^4} \sum_{i=1}^n p_i \sigma_i^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{R1} x^2 \frac{\left[\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\sigma_i^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}\right) \right]^2}{\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\sigma_i} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}\right)} dx} ,$$

или

$$e = \frac{1}{\frac{\sigma_m^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{R1} x^2 \frac{\left[\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\sigma_i^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}\right) \right]^2}{\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\sigma_i} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}\right)} dx} .$$

С помощью данного выражения рассчитаны значения эффективности для значений n от 2 до 30 и для трех вариантов изменения последовательности $\{p_i\}$: возрастающей, постоянной и убывающей (соответственно варианты 1, 2 и 3). Результаты расчета представлены в табл.

Снижение точности обсервованных координат на 10 % происходит при значении эффективности, равной 0,909. Из анализа табл. следует, что при n , меньшем 8, снижение точности обсервации меньше 10 %. При реализации первого варианта последовательности $\{p_i\}$ снижение точности обсервации не превосходит 2 % независимо от значения n .

Для указанных ситуаций возможен расчет обсервованных координат методом наименьших квадратов при использовании избыточных измерений.

Таблица

Значения эффективности e в трех вариантах $\{p_i\}$

Количество составляющих выборок	1	2	3
2	0,993	0,988	1
3	0,987	0,971	0,983
4	0,984	0,957	0,962
5	0,982	0,945	0,944
6	0,980	0,934	0,928
7	0,980	0,926	0,915
8	0,979	0,918	0,903
9	0,979	0,912	0,893
10	0,978	0,906	0,884
15	0,977	0,884	0,851
20	0,977	0,870	0,829
25	0,977	0,860	0,813
30	0,977	0,852	0,801

Таким образом, получена оценка эффективности координат судна, рассчитанных методом наименьших квадратов в случае смешанного распределения погрешностей навигационных измерений выборки для трех возможных вариантов последовательностей $\{p_i\}$ и числе составляющих выборок до 30.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кондрашихин В.Т. Определение места судна. – М.: Транспорт, 1989. – 250 с.
2. Hsu D. A. An analysis of error distribution in navigation // The Journal of Navigation. – Vol. 32. – № 3. – P. 426 – 429.
3. Ткаченко А.С. К вопросу формирования модели смешанного распределения погрешностей навигационных измерений // Судовождение. – 2005. – № 10. – С. 118 – 122.
4. Алексишин В.Г. Требования к плотности распределения среднего квадратического отклонения в модели смешанного распределения / Алексишин В.Г., Ткаченко А.С. // Судовождение. – 2006. – № 11. – С. 9 – 13.

5. Ткаченко А.С. Совершенствование методов контроля и прогноза места судна. Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.22.13/ ОНМА.– Одесса, 2009. – 24 с.

6. Мудров В.М. Методы обработки измерений / В.М. Мудров, В.Л. Кушко – М.: Советское радио, 1976. – 192 с.