УДК 656.61.052

Северин В.В., Казак Ю.В.
НУ "ОМА"

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА БОКОВОГО ОТКЛОНЕНИЯ СУДНА ПРИ ПРОВОДКЕ ПО ЗАДАННОМУ МАРШРУТУ

Решение проблемы обеспечения безаварийного плавания в стесненных районах способствует снижению числа аварий, возникающих по причине посадок судов на мель и навалов на причал. Одним из аспектов обеспечения безаварийного плавания является использование математической модели оценки вероятности безопасного судовождения, которая позволяет выявить существенные факторы и предупредить их отрицательное влияние на процесс судовождения. При этом векториальную позиционную погрешность, как указывается в работе [1], следует преобразовать в погрешность бокового отклонения и найти ее закон распределения.

Вопросы по оценке надежности судовождения в случае, когда судно следует мимо выделяющихся (точечных) навигационных опасностей рассматривались в работе [2], а работа [3] посвящена обоснованию критерия навигационной безопасности.

Целью статьи является определение параметров распределения бокового отклонения судна от программной траектории движения при наиболее часто применяемом нормальном законе распределения векториальной траекторной погрешности.

В работе [1] показано, что для оценки вероятности безаварийного плавания судна по выбранному маршруту целесообразно применение математической модели с одномерной плотностью распределения бокового отклонения судна от программной траектории движения, когда известна двумерная плотность распределения векториальной траекторной погрешности. Поэтому требуется найти выражение одномерной плотности $f_b(s)$ бокового отклонения s при заданной двумерной плотности распределения вероятностей траекторной погрешности $f_\Sigma(x,y)$.

Траекторная векториальная погрешность ξ_Σ является суммой позиционной векториальной погрешности ξ_p, возникающей при определении места судна, и векториальной погрешности управления ξ_c, которая обусловлена погрешностями выбранных параметров управляющих воздействий.

Допустим, что исходные векториальные погрешности ξ_p и ξ_c подчинены устойчивому закону распределения, например, нормальному, тогда и траекторная центрированная погрешность ξ_Σ распределена по нормальному закону с плотностью

$$f_\Sigma(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_{\Sigma x}\sigma_{\Sigma y}}\exp[-(\frac{x^2}{\sigma_{\Sigma x}{}^2}+\frac{y^2}{\sigma_{\Sigma y}{}^2}+2\frac{xy}{\sigma_{\Sigma xy}})],$$

где $\sigma_{\Sigma x}$ и $\sigma_{\Sigma y}$ - средние квадратические отклонения векториальной траекторной погрешности ξ_Σ соответственно по осям x и y, причем:

$$\sigma_{\Sigma x}=\sqrt{D_{\Sigma x}}=\sqrt{D_{px}+D_{cx}}\ ,\ \sigma_{\Sigma y}=\sqrt{D_{\Sigma y}}=\sqrt{D_{py}+D_{cy}}\ \text{ и } \sigma_{\Sigma xy}=\sqrt{D_{\Sigma xy}}\ .$$

В последних выражениях D_{px}, D_{cx} и D_{py}, D_{cy} - дисперсии составляющих погрешностей ξ_p и ξ_c соответственно на оси x и y.

С другой стороны, ковариационная матрица $K_\Sigma(x,y)_{\min}$ выражается через центральные и смешанные моменты второго порядка:

$$K_\Sigma(x,y)_{\min}=\begin{Vmatrix} D_{\Sigma x} & D_{\Sigma xy} \\ D_{\Sigma yx} & D_{\Sigma y} \end{Vmatrix}.$$

Для исключения недиагонального элемента $D_{\Sigma xy}$ ковариационной матрицы $K_\Sigma(x,y)_{\min}$ при известных элементах $D_{\Sigma x}$, $D_{\Sigma y}$ и $D_{\Sigma xy}$, необходимо рассчитать угол поворота γ, который определяется условием [4]:

$$\operatorname{tg}2\gamma=\frac{2D_{\Sigma xy}}{D_{\Sigma x}-D_{\Sigma y}}.$$

При повороте на этот угол изменяются значения дисперсий $D_{\Sigma x}$ и $D_{\Sigma y}$, характеризующие диагональную ковариационную матрицу, которую обозначим $K_\Sigma(x,y)_{\min 1}$, а новые значения дисперсий обозначены $D_{\Sigma x1}$ и $D_{\Sigma y1}$, т.е.:

$$K_\Sigma(x,y)_{\min 1}=\begin{Vmatrix} D_{\Sigma x1} & 0 \\ 0 & D_{\Sigma y1} \end{Vmatrix}.$$

Матрицу $K_\Sigma(x,y)_{\min 1}$ и, следовательно, ее элементы $D_{\Sigma x1}$ и $D_{\Sigma y1}$ находятся с помощью соотношения [4]:

$$K_\Sigma(x,y)_{\min 1}=GK_\Sigma(x,y)_{\min}G^T,$$

где G – матрица преобразования, элементы которой, как показано в [4], определяются следующими формулами:

$$g_{11} = g_{22}\{\frac{1}{2}[1+\frac{(D_{\Sigma x}-D_{\Sigma y})}{\sqrt{4D^2_{\Sigma xy}+(D_{\Sigma x}-D_{\Sigma y})^2}}]\}^{1/2},$$

$$g_{21} = -g_{12} = \{\frac{1}{2}[1-\frac{(D_{\Sigma x}-D_{\Sigma y})}{\sqrt{4D^2_{\Sigma xy}+(D_{\Sigma x}-D_{\Sigma y})^2}}]\}^{1/2}.$$

Следовательно, ковариационная матрица некоррелированных случайных величин

$$K_{\Sigma}(x,y)_{\min 1} = \begin{Vmatrix} D_{\Sigma x1} & 0 \\ 0 & D_{\Sigma y1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} D_{\Sigma x} & D_{\Sigma xy} \\ D_{\Sigma yx} & D_{\Sigma y} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{Vmatrix}.$$

Новые значения дисперсий рассчитываются по формулам:

$$D_{\Sigma x1} = \frac{1}{2}[D_{\Sigma x} + D_{\Sigma y} + \sqrt{4D_{\Sigma xy}{}^2 + (D_{\Sigma x} - D_{\Sigma y})^2}\,];$$

$$D_{\Sigma y1} = \frac{1}{2}[D_{\Sigma x} + D_{\Sigma y} - \sqrt{4D_{\Sigma xy}{}^2 + (D_{\Sigma x} - D_{\Sigma y})^2}\,].$$

После указанных преобразований выражение двумерной плотности $f(x, y)$ принимает следующий вид:

$$f_{\Sigma}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\Sigma x1}\sigma_{\Sigma y1}}\exp[-(\frac{x^2}{\sigma_{\Sigma x1}{}^2} + \frac{y^2}{\sigma_{\Sigma y1}{}^2})].$$

Следовательно, двумерная плотность $f_{\Sigma}(x,y)$ при нормальном законе распределения может быть представлена системой независимых составляющих x и y, второй смешанный момент которых равен нулю, а ковариационная матрица содержит дисперсии $\sigma^2_{\Sigma x1}$ и $\sigma^2_{\Sigma y1}$.

На рис. показана зависимость бокового отклонения z от составляющих x и y векториальной позиционной погрешности, а также курса судна К.

Из рис. следует:

$$z = x\sin(K - \frac{\pi}{2}) + y\cos(K - \frac{\pi}{2}), \text{ или } z = y\sin K - x\cos K.$$

В этом случае боковое отклонение z также будет подчиняться нормальному закону с параметрами [5]:

$$m_z = m_y \sin K - m_x \cos K;\ \sigma^2_z = \sigma^2_{\Sigma x1}\cos^2 K + \sigma^2_{\Sigma y1}\sin^2 K,$$

где m_z и σ^2_z - соответственно математическое ожидание и дисперсия бокового отклонения; m_x и m_y - математические ожидания составляющих x и y векториальной погрешности.

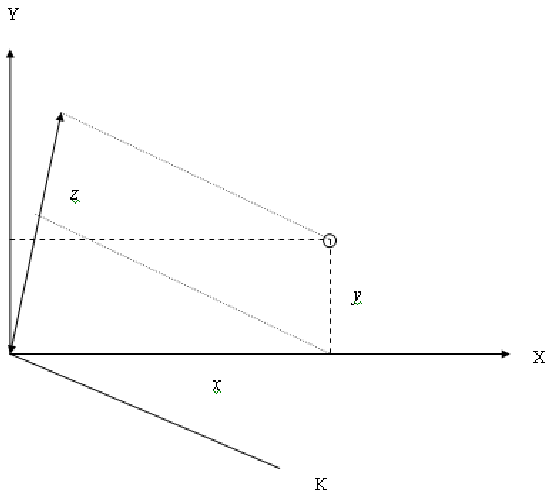

Рис. Зависимость бокового отклонения *z* от составляющих *x* и *y*

Поэтому

$$f_b(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z}\exp[-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}],$$

или

$$f_b(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_{\Sigma x1}^2\cos^2 K + \sigma_{\Sigma y1}^2\sin^2 K)}}\exp\{-\frac{[z-(m_y\sin K - m_x\cos K)]^2}{2(\sigma_{\Sigma x1}^2\cos^2 K + \sigma_{\Sigma y1}^2\sin^2 K)}\}.$$

Таким образом, получена процедура преобразования двумерной плотности нормального распределения позиционной погрешности в одномерную плотность погрешности бокового отклонения судна от программной траектории движения, которое зависит от дисперсий и вторых смешанных моментов позиционной погрешности и погрешности управления, что создает предпосылки для разработки математической модели численной оценки безопасности судовождения в стесненных водах, позволяющей минимизировать ее величину.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ворохобин И.И. Эквивалентность оценки вероятности безаварийного плавания судна в стесненном районе / Ворохобин И.И., Северин В.В, Казак Ю.В. // Судовождение: Сб. научн. трудов ОНМА. - Вып. 25./ – Одесса: "ИздатИнформ", 2015 - С. 47 - 55.

2. Кондрашихин В.Т. Определение места судна / Кондрашихин В.Т. - М.: Транспорт, 1989. – 230 с.

3. Мельник Е.Ф. Обоснование выбора критерия навигационной безопасности судовождения // Судовождение. – 2002. - № 5. – С. 65 - 73.

4. Корн Г. Справочник по математике / Корн Г., Корн Т. - М.: Наука, 1984.- 832 с.

5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Вентцель Е.С. - М.: Наука, 1969. - 576 с.