

МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ПОГРЕШНОСТЕЙ НАВИГАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Обеспечение безопасного судовождения требует высокоточной информации о текущем положении судна и его параметрах движения. В свою очередь, точность определения места судна при избыточных измерениях существенным образом зависит от закона распределения их погрешностей.

До недавнего времени повсеместно считалось, что погрешности измерения навигационных параметров распределены по нормальному закону, однако, как показали статистические исследования последних десятков лет, их закон распределения может отличаться от нормального закона [1, 2]. Это обстоятельство привело к поиску альтернативных законов распределения вероятностей погрешностей навигационных измерений.

Целью статьи является рассмотрение моделей формирования законов распределения погрешностей навигационных измерений и проверка их на статистических материалах натурных наблюдений.

Погрешности измерения навигационных параметров ξ подчинены закону распределения с плотностью $f(\xi)$. По выборкам обширного статистического материала погрешностей навигационных измерений были построены гистограммы, из которых следует, что плотности распределения $f(\xi)$ должны удовлетворять следующим требованиям:

иметь область определения $+\infty, -\infty$;

быть симметричным относительно математического ожидания;

в ряде случаев иметь "утяжеленные" хвосты по отношению к плотности нормального распределения.

С математических позиций указанные требования, накладываемые на $f(\xi)$, заключаются в следующем [3]:

плотности распределения $f(\xi)$ должны иметь непрерывную первую производную;

должна существовать дисперсия распределения с плотностью $f(\xi)$;

плотность $f(\xi)$ должна быть устойчивой или безгранично делимой для учета случая зависимых погрешностей измерений;

для получения эффективных обсервованных координат судна методом максимального правдоподобия плотность распределения $f(\xi)$ должна аналитически выражаться в явном виде.

Рассмотрим некоторые модели формирования законов распределения случайных погрешностей измерений навигационных параметров, начиная с нормального распределения.

Нормальный закон распределения, который также называют законом Гаусса, играет исключительно важную роль в теории вероятности, - он наиболее часто встречается на практике. Главная особенность этого закона состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при некоторых типичных условиях.

Плотность нормального закона распределения [4]:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right],$$

где m и σ – соответственно математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

В теории вероятностей доказано [5], что сумма достаточно большого числа независимых случайных величин, подчиненных каким угодно законам распределения, приближенно подчиняется нормальному закону, и это выполняется тем точнее, чем большее количество случайных величин суммируется. Так, погрешности измерения навигационных параметров могут быть представлены как сумма весьма большого числа сравнительно малых слагаемых – элементарных погрешностей, каждая из которых вызвана действием отдельной причины, не зависящей от остальных.

Каким бы законам распределения ни были подчинены отдельные элементарные погрешности, особенности этих распределений в сумме большого числа слагаемых нивелируются, и сумма оказывается подчинена закону, близкому к нормальному.

Основное ограничение, налагаемое на суммируемые погрешности, состоит в том, чтобы они все играли в общей сумме относительно малую роль.

Как ранее отмечалось, во многих случаях статистические данные погрешностей навигационных измерений, полученные в натурных наблюдениях, не подчиняются нормальному закону, в силу чего была предложена модель смешанного закона распределения вероятностей погрешностей навигационных измерений [1, 2, 3].

Основанием для ее применения являются две следующие предположки.

1. Погрешности навигационных измерений при неизменных условиях наблюдений имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием.

2. Вариации условий наблюдения ведут к случайному изменению

σ нормального распределения. Причем σ , как случайная величина, имеет плотность распределения $\varphi(\sigma)$, которая должна удовлетворять условиям:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \varphi(\sigma) = 0, \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \varphi(\sigma) = 0 \text{ и } \sigma > 0.$$

В этом случае плотность смешанного распределения $f(\xi)$ является плотностью распределения погрешностей навигационных измерений и для централизованной погрешности имеет вид:

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right] d\sigma. \quad (1)$$

Очевидно, что возможность получения плотности смешанного распределения $f(\xi)$ в явном виде и ее основные закономерности определяются плотностью распределения $\varphi(\sigma)$. В работе [6], используя модельные гипотезы, предложено в качестве $\varphi(\sigma)$ выбрать два закона распределения с плотностями $\varphi_1(\sigma)$ и $\varphi_2(\sigma)$, которые позволяют получить смешанные плотности в явном виде, причем:

$$\varphi_1(\sigma) = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\alpha}{\sigma^2}\right); \quad \varphi_2(\sigma) = 2\alpha \frac{1}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{\alpha}{\sigma^2}\right).$$

Подставляя данные плотности в выражение (1), после интегрирования получим базовые плотности смешанного распределения соответственно первого $f_{b1}(x)$ (Коши) и второго $f_{b2}(x)$ (Пирсона VII типа) вида:

$$f_{b1}(x) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(x^2/2 + \alpha)}; \quad f_{b2}(x) = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(x^2/2 + \alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Дифференцируя два полученных уравнения по параметру α можно получить множество плотностей смешанного закона распределения вероятностей навигационных погрешностей, выражающихся в явном виде:

$$f_1(x) = \frac{2^n \alpha^{n+\frac{1}{2}} n!}{\sqrt{2\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \frac{1}{(x^2/2 + \alpha)^{n+1}}, \quad (n \leq 6) \quad (2)$$

$$f_2(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1) \alpha^{n+1}}{\sqrt{2} 2^{n+1} n!} \frac{1}{(x^2/2 + \alpha)^{n+1,5}}, \quad (n \leq 5) \quad (3)$$

где α - масштабный параметр; n - существенный параметр.

Выражение (2) является плотностью распределения вероятностей смешанного закона первого типа, а выражение (3) - смешанного зако-

на второго типа, для которых характерно наличие "тяжелых хвостов", причем с ростом существенного параметра смешанный закон распределения приближается к нормальному закону.

Недостатком смешанных законов распределения является то, что они не относятся ни к устойчивым, ни к безгранично-делимым законам и, поэтому, не могут быть использованы в случае зависимых погрешностей навигационных измерений.

Очередная модель распределения случайных погрешностей позволяет получить плотность, которая удовлетворяет исходным требованиям, являясь безгранично-делимой и с утяжеленными хвостами. Ее особенностью является предположение о том, что количество факторов, одновременно действующее на точность измерений, является случайной величиной, т. е. вероятность наличия каждого из факторов в комплексе условий измерения параметра отлична от 1, т. е. влияние каждого из факторов на процесс измерения случайно, - в одних условиях фактор может влиять, а в других – отсутствовать.

Если вероятность появления каждого из факторов принять одинаковой и равной c/n , то вероятность одновременного влияния k факторов на точность измерения подчиняется распределению Пуассона:

$$P(N = k) = e^{-c} \frac{c^k}{k!}.$$

В этом случае погрешность навигационных измерений ξ равна случайной сумме элементарных погрешностей η_i , т.е. $\xi = \sum_{i=1}^N \eta_i$, где N – случайная дискретная величина. Причем плотность распределения ξ будет N -кратной сверткой плотности $g(\eta)$, такая свертка обозначается $g^{N*}(\eta)$.

Учитывая, что число факторов может изменяться от 1 до ∞ ($k = 1, \dots, \infty$), случайная величина (погрешность измерения) ξ принимает значения

$\sum_{i=1}^k \eta_i$ с вероятностью $\exp(-c)c^k/k!$, при этом ее

плотность распределения $g^{k*}(\eta)$ и, следовательно, для всего диапазона k плотность $f(\xi)$ определяется обобщенным пуассоновским распределением [5]:

$$f(\xi) = \exp(-c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} g^{k*}(\xi).$$

Согласно [5], распределение с плотностью $f(\xi)$ является семейством обобщенных распределений Пуассона, которое порождается плотностью $g(\eta)$.

Основным и очень важным достоинством обобщенных распределений Пуассона является их безграничная делимость. Причём плотность $f(\xi)$ можно разложить на составляющие с различными дисперсиями, что является решающим обстоятельством для случая зависимых измерений.

Для того, чтобы плотность распределения $f(\xi)$ могла быть использована для описания погрешностей навигационных измерений, плотность $g(\eta)$ должна иметь в явном виде k -кратную свертку сама с собой.

Рассмотрим обобщенное пуассоновское распределение, порождаемое распределением Гаусса. Выражения для производящей плотности и ее свертки имеют вид:

$$g(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right), \quad g^{k*}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}\sigma} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2k\sigma^2}\right).$$

Следовательно, обобщенное пуассоновское распределение с производящей плотностью Гаусса будет выражаться следующим образом:

$$f_G(\xi) = \exp(-c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2k\sigma^2}\right),$$

или после преобразования:

$$f_G(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} k^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2k\sigma^2}\right). \quad (4)$$

Плотности $f_G(\xi)$ соответствует характеристическая функция:

$$\Psi_G(t) = \exp\left[-c\left(e^{-\frac{t^2}{2}\sigma^2} - 1\right)\right].$$

Дисперсия и четвертый центральный момент определяются соответственно выражениями:

$$\mu_2 = c\sigma^2 \quad \text{и} \quad \mu_4 = 3c\sigma^4(c+1).$$

Для двух выборок погрешностей измерения дистанции D и пеленга П РЛС "Наяда-5", которые накапливались в течение продолжительного времени с числом членов каждой не менее 400, проводилась проверка гипотез их распределения по закону Гаусса (1) и обобщенному закону Пуассона (4).

При проверке гипотезы распределения погрешностей по закону

Гаусса критерий согласия χ_i^2 Пирсона обозначен χ_G^2 , а по обобщенному закону Пуассона - χ_P^2 . Результаты проверки приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты проверки статических гипотез

Тип погрешности	n	M	μ_2	μ_4	χ_G^2	χ_P^2
Погрешности D РЛС	462	0,0003 кбт	0,011	0,04235	33,983	17,57
Погрешности П РЛС	400	0,003°	0,64	3,2768	106,96	72,34

Из таблицы следует, что обе выборки погрешностей, полученные в течение продолжительного времени, лучше описываются обобщенным законом Пуассона, так как критерий согласия χ_P^2 гораздо меньше критерия χ_G^2 .

Во время рейса в 2015 году выполнялись натурные наблюдения, позволяющие получить погрешности измерения навигационных параметров. Для формирования исходных выборок погрешностей производились серии измерения навигационных параметров количеством более 100. Навигационные параметры измерялись на стоянке судна, причем с помощью РЛС измерялись дистанция и пеленг на неподвижный ориентир, а с помощью приемника спутниковой навигационной системы GPS фиксировались широта и долгота судна.

В течение рейса было получено 12 выборок погрешностей. В качестве альтернативных законов выбраны нормальный закон (1) и смешанные законы первого (2) и второго (3) типа. Итоговые результаты натурных наблюдений приведены в табл. 2.

Анализ итоговой таблицы показывает, что погрешности измерения навигационных параметров (пеленга и дистанции), полученные на ограниченном интервале времени (7 часов), подчиняются нормальному закону распределения вероятностей. Погрешности определения широты и долготы на том же интервале времени распределены по смешанным законам обоих типов. Это объясняется тем, что координаты судна рассчитываются по навигационным параметрам (псевдорасстояниям) и погрешности результатов расчета, т.е. координат, могут иметь распределение, отличное от нормального, что и показал анализ третьей и четвертой выборок.

Таблица 2

Итоговые результаты натурных наблюдений

№ выборки	Навигационный параметр	Количество членов	Закон рас- преде- ления	χ^2	Длительность наблюдения
1	пеленг	150	Гаусса	0,0065	7 часов
2	дистанция	150	Гаусса	0,006	7 часов
3	широта	150	1-го типа $n=3$	0,0131	7 часов
4	долгота	150	2-го типа $n=1$	0,015	7 часов
5	пеленг	210	1-го типа $n=2$	0,011	1 сутки
6	дистанция	210	2-го типа $n=2$	0,010	1 сутки
7	широта	210	1-го типа $n=6$	0,0094	1 сутки
8	долгота	210	1-го типа $n=1$	0,013	1 сутки
9	пеленг	250	2-го типа $n=3$	0,0088	2 суток
10	дистанция	250	1-го типа $n=4$	0,0088	2 суток
11	широта	250	1-го типа $n=1$	0,010	2 суток
12	долгота	250	2-го типа $n=1$	0,009	2 суток

Погрешности измерения пеленга и дистанции, не говоря о погрешностях широты и долготы, на большем интервале времени (сутки и

более) подчинены смешанным законам распределения, степень отличия которых от нормального закона пропорциональна интервалу времени измерения серии значений навигационного параметра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кондрашихин В. Т. Определение места судна / В.Т. Кондрашихин - М.: Транспорт, 1989. – 230 с.
2. Hsu D.A. An analysis of error distribution in navigation / D.A. Hsu // The Journal of Navigation. – Vol. 32. - № 3. – P. 426 - 429.
3. Ткаченко А.С. К вопросу формирования модели смешанного распределения погрешностей навигационных измерений/ А.С. Ткаченко // Судовождение. – 2005. - № 10. – С. 118 – 122.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Вентцель Е.С. - М.: Наука, 1969. - 576 с.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: - Т.2. / Феллер В. - М.: Мир, 1984. - 751 с.
6. Ткаченко А.С. Смешанные законы распределения погрешностей, плотности которых выражаются в явном виде / Ткаченко А.С.// Судовождение. – 2006. - № 12. – С. 93 – 99.