УДК 656.61.052

ARTICLE HISTORY
Received 16.05.2018
Accepted 26.05.2018

Повышение точности обсервации судна при избыточных измерениях

Ворохобин И.И., Фусар И.Ю.
НУ "Одесская морская академия", Одесса, Украина

Increase of exactness of observation of ship at the surplus measuring

Vorokhobin Igor, Fusar Igor
NU "Odessa Maritime Academy", Odessa, Ukraine

Аннотация –Для стандартной плотности закона распределения Гаусса ненормированной погрешности навигационных измерений доказана ортогональность полиномов Эрмита, что позволило определить аналитические выражения коэффициентов ряда Грамма - Шарлье типа А.

Abstract –Decomposition of normal closeness of the rationed error in a row Gramme - Sharl'e type A by the orthogonal polynomials of Ermyt is a classic result, however for the standard closeness of law of Gauss of the unrationed error in work the coefficients of row are certain Gramme - Sharl'e type A, and proved the ortogonal polynomials of Ermyt.

Для обеспечения максимально возможной точности обсерваций места судна при наличии избыточных измерений навигационных параметров необходимо знать закон распределения их погрешностей. Однако при ограниченном объеме выборки статистических материалов погрешностей не удается с помощью стандартной процедуры определить закон их распределения, хотя имеется возможность оценить центральные моменты распределения. При этом если гистограмма выборки имеет положительный эксцесс, то можно использовать разложение плотности распределения погрешностей с помощью ортогональных полиномов Эрмита, не располагая ее аналитическим выражением, и применить его в качестве плотности распределения.

Вопросы оценки и повышения точности определения места судна освещены во многих работах отечественных и зарубежных авторов. Результаты анализа статистических материалов точности определения места судна с помощью приёмника спутниковой радионавигационной системы представлены в работе [1]. Из них следует, что предположение о распределении случайных погрешностей определения широты и долготы по закону Гаусса не является корректным и требует альтернативного подхода. В работах [2, 3] представлен анализ статистических данных погрешностей навигационных измерений, полученных в натурных наблюдениях, который показал, что погрешности навигационных измерений не подчиняются нормальному закону распределения, а эксцесс выборки является положительным.

Для описания случайных погрешностей навигационных измерений в работе [4] предложен обобщенный закон Пуассона, а в работе [5] с этой же целью предложены смешанные законы двух типов.

Результаты идентификации законов распределения погрешностей навигационных измерений приведены в работе [6], из которых следует, что погрешности измерений радиолокационных пеленгов и расстояний подчиняются в основном смешанным законам первого и второго типа.

В работе [7] приведены результаты исследования возможности описания систем зависимых случайных величин с помощью обобщенного распределения Пуассона с базовым нормальным распределением.

В работе [8] произведена оценка эффективности обсервованных координат судна при избыточных линиях положения и показано, что при смешанных законах распределениях эффективность меньше единицы, и с ростом существенного параметра она стремится по величине к единице.

Анализ рассмотренных работ показывает, что разнообразие законов распределения вероятностей случайных величин, особенностью которых является наличие положительного эксцесса, может быть унифицировано использованием ортогонального разложение с полученными значениями центральных моментов высших порядков. Разложение плотности нормированной погрешности в ряд Грамма - Шарлье типа А с помощью ортогональных полиномов Эрмита приведено в работе [9], однако для стандартной плотности ненормированной погрешности необходимо определить коэффициенты ряда Грамма - Шарлье типа А, доказав ортогональность полиномов Эрмита. Это позволит разработать алгоритм расчета обсервованных координат судна при избыточных измерениях, обеспечивающий их максимальную точность независимо от закона распределения погрешностей измерений.

Целью данной статьи является повышение точности обсерваций судна применением ортогонального разложения плотности распределения погрешности измерений.

Распределение погрешностей навигационных измерений близко к нормальному, поэтому можно воспользоваться результатами работы [9], в которой показано, что плотность распределения $f(x)$ центрированной и нормированной случайной величины x можно представить в виде разложения, которое называется рядом Грамма - Шарлье типа А:

$$f(x)=c_0\,\varphi(x)+c_1\,\varphi^{(1)}(x)+c_2\,\varphi^{(2)}(x)/2!\,...+c_i\,\varphi^{(i)}(x)/i!...,$$

где $\varphi(x)=(2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$ - нормальная плотность нормированной случайной величины.

Производные высших порядков $\varphi^{(i)}(x)$, как показано в работе [9], выражаются через ортогональные полиномы Эрмита $H_i(x)$:

$$\varphi^{(i)}(x)=(-1)^i\,H_i(x)\varphi(x)\ ,$$

где $H_i(x)=(-1)^i\{\frac{d^i}{dx^i}[\exp(-x^2/2)]\}\exp(-x^2/2)$, причем коэффициенты

$$c_i=(2\pi)^{-1/2}(-1)^i\int\limits_{-\infty}^{\infty}H_i(x)\exp(-x^2/2)\,\mathrm{d}x\,.$$

В работе [9] показано, что определение коэффициентов c_i возможно благодаря ортогональности полиномов Эрмита, которая для нормированной нормальной плотности выражается следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)\exp(-x^2/2)\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } m\neq n;\\ n!, & \text{при } m=n.\end{cases} \qquad (1)$$

В случае нормальной плотности $f(x)=(2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\exp(-x^2/2\sigma^2)$ ненормированной погрешности ортогональность полиномов Эрмита должна удовлетворять условию:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}H_m(x/\sigma^2)H_n(x/\sigma^2)\exp(-x^2/2\sigma^2)\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } m\neq n;\\ \sigma^{-2n}\,n!, & \text{при } m=n.\end{cases} \qquad (2)$$

Покажем это, записывая выражения для полиномов $H_m(x)$ и $H_n(x)$ при четных и нечетных m. Четные m представим, как $m=2\nu$, а нечетные – как $m=2r+1$ ($v,\ r=1, 2, 3...$).

Рассмотрим несобственные интегралы от произведений полиномов Эрмита для нормальной плотности ненормированной случайной погрешности. Для случая $m\neq n$ и четных найдем несобственный интеграл

$$R_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m(x/\sigma^2)H_n(x/\sigma^2)\exp(-x^2/2\sigma^2)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{v}(-1)^i a_{iv} x^{2(v-i)}\times$$

$$\sigma^{-[2(2v-i)+2(2r-j)]}\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\ a_{jr}\ \mathrm{x}^{2(r-j)}\exp(-x^2/2\sigma^2)\,dx=$$

$$\sigma^{-[2(2v-i)+2(2r-j)]}\sum_{i=0}^{v}\ \sum_{j=0}^{r}(-1)^{i+j}a_{iv}a_{jr}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^{2(v-i)+2(r-j)}\exp(-x^2/2\sigma^2)\,dx.$$

В работе [9] показано, что справедливо равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^{2(v-i)+2(r-j)}\exp(-x^2/2\sigma^2)\,dx=1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots[2(v+r-i-j)-1]\sigma^{2(v+r-i-j)}.$$

Поэтому искомый интеграл

$$R_1=\sigma^{-2(v+r)}\{\sum_{i=0}^{v}\ \sum_{j=0}^{r}\ (-1)^{i+j}a_{iv}\,a_{jr}1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots[(2(v+r-i-j)-1]\}.$$

Выражение в фигурных скобках полученной формулы согласно (1) равно нулю. Следовательно,

$$R_1=\sigma^{-2(v+r)}\{\sum_{i=0}^{v}\ \sum_{j=0}^{r}\ (-1)^{i+j}a_{iv}\,a_{jr}1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots[(2(v+r-i-j)-1]\}=0. \quad (3)$$

Найдем выражение для интеграла R_2 при $m\neq n$ и нечетных. Аналогично предыдущему случаю:

$$R_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m(x/\sigma^2)H_n(x/\sigma^2)\exp(-x^2/2\sigma^2)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{v}(-1)^i a_{iv} x^{2(v-i)+1}\times$$

$$\sigma^{-[2(2v-i)+2(2r-j)+2]}\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\ a_{jr}\ x^{2(r-j)+1}\exp(-x^2/2\sigma^2)\,dx=$$

$$\sigma^{-2(v+r)\text{-}1}\{\sum_{i=0}^{v}\ \sum_{j=0}^{r}\ (-1)^{i+j}a_{iv}\,a_{jr}1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots[2(v+r-i-j+1)-1]\}.$$

Выражение в фигурных скобках, как и в предыдущем случае, равно нулю. Следовательно, справедливо следующее равенство:

$$R_2=\sigma^{-2(v+r)-1}\{\sum_{i=0}^{v}\sum_{j=0}^{r}(-1)^{i+j}a_{iv}\,a_{jr}1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots[2(v+r-i-j+1)-1]\}=0. \quad (4)$$

В третьем рассматриваемом случае находим интеграл R_3 при $n=m$ и четных с учетом обозначения $\alpha=(2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}$:

$$R_3=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}H_n(x/\sigma^2)H_n(x/\sigma^2)\exp(-x^2/2\sigma^2)\,dx=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{v}(-1)^i a_{iv}\,x^{2(v-i)}\times$$

$$\sigma^{-[2(2v-i)+2(2v-j)]}\sum_{j=0}^{v}(-1)^j\,a_{jv}\,x^{2(v-j)}\exp(-x^2/2\sigma^2)\,dx=$$

$$\sigma^{-2(2v-i)-2(2r-j)}\sum_{i=0}^{v}\sum_{j=0}^{v}(-1)^{i+j}a_{iv}\,a_{jv}1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots[2(2v-i-j)-1]\sigma^{2(2v-i-j)},$$

или выражение для интеграла принимает следующий вид:

$$R_3=\sigma^{-4v}\{\sum_{i=0}^{v}\sum_{j=0}^{v}(-1)^{i+j}a_{iv}\,a_{jv}1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots[2(2v-i-j)-1]\}. \quad (5)$$

Выражение в фигурных скобках последней формулы согласно (1) равно $n!$, поэтому $R_3=\sigma^{-2n}\,n!$, так как $4v=2n$.

Аналогично, используя выражение (1), убеждаемся, что при $n=m$ и нечетных интеграл:

$$R_4=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}H_n(x/\sigma^2)H_n(x/\sigma^2)\exp(-x^2/2\sigma^2)dx=\sigma^{-2n}\,n!. \quad (6)$$

Полученные соотношения (3) ÷ (6) доказывают справедливость выражения (2), т.е. полиномы Эрмита нормального распределения ненормированной случайной величины являются ортогональными. Поэтому коэффициенты c_{2s} выражаются следующим образом:

$c_4=\mu_4/\sigma^4-3$; (эксцесс)

$c_6=\mu_6/\sigma^6-15\mu_4/\sigma^4+30$;

$c_8=\mu_8/\sigma^8-28\mu_6/\sigma^6+210\mu_4/\sigma^4-315$;

$c_{10}=\mu_{10}/\sigma^{10}-45\mu_8/\sigma^8+630\mu_6/\sigma^6-3150\mu_4/\sigma^4+3780$;

$c_{12}=\mu_{12}/\sigma^{12}-66\mu_{10}/\sigma^{10}+1485\mu_8/\sigma^8-13860\mu_6/\sigma^6+51975$.

Выражение для ортогонального разложения плотности с учетом полученных результатов принимает вид:

$$f(x)=(2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\exp(-x^2/2\sigma^2)[1+\sum_{s=2}\frac{c_{2s}}{(2s)!}H_{2s}(x/\sigma^2)],$$

в котором σ^2 и μ_{2s} вычисляются по исходной плотности, а выражения для четных полиномов Эрмита приведены ниже:

$$H_4(y)= y^4-6y^2+3;$$

$$H_6(y)=y^6-15y^4+45y^2-15;$$

$$H_8(y)= y^8-28y^6+210y^4-420y^2+105;$$

$$H_{10}(y)=y^{10}-45y^8+630y^6-3150y^4+4725y^2-945;$$

$$H_{12}(y)=y^{12}-66y^{10}+1485y^8-13860y^6+51975y^4-62370y^2+10395.$$

В данных выражениях $y=x/\sigma^2$.

Таким образом, полученное ортогональное разложение в ряд Грамма - Шарлье типа А может использоваться в качестве плотности распределения вероятностей погрешности навигационных измерений, что позволяет предложить универсальный способ описания плотности распределения ненормированной случайной величины, который обеспечивает максимальную точность обсервации места судна при неизвестном законе распределения погрешностей измерений, имеющем положительный эксцесс.

ЛИТЕРАТУРА
REFERENCES

1. Monteiro Luis. What is the accuracy of DGPS? / Sardinia Monteiro Luis, Moore Terry, Hill Chris. // J. Navig. 2005. 58. – № 2. – P. 207 – 225.

2. Кондрашихин В.Т. Определение места судна / Кондрашихин В.Т. – М.: Транспорт, 1989. – 230 с.

3. Hsu D. A. An analysis of error distribution in navigation / Hsu D. A. // The Journal of Navigation. – Vol. 32. – № 3. – P. 426 – 429.

4. Сикирин В.Е. Описание навигационных погрешностей с помощью обобщенного распределения Пуассона/ Сикирин В.Е.// Судовождение: сб. научн. трудов. НУ «ОМА». – 2016. – Вып. 26. – С. 152 – 156.

5. Астайкин Д.В. Идентификация законов распределения навигационных погрешностей смешанными законами двух типов / Астайкин Д.В., Алексейчук Б.М. // Автоматизация судовых технических средств: науч. -техн. сб. – 2014. – Вып. 20. - Одесса: ОНМА. – С. 3 – 9.

6. Алексейчук Б.М. Идентификация закона распределения погрешностей измерений / Алексейчук Б.М., Пасечнюк С.С. // Судовождение:

сб. научн. трудов. НУ «ОМА». – 2016. – Вып. 27. – С. 10 – 14.

7. Астайкин Д.В. Оценка точности координат судна при избыточных измерениях/ Астайкин Д.В., Сикирин В.Е., Ворохобин И.И., Алексейчук Б.М. – Saarbrucken, Deutschland/Германия: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 274 с.

8. Бурмака И.А. Оценка эффективности обсервованных координат судна при избыточных измерениях / Бурмака И.А., Астайкин Д.В., Алексейчук Б.М. // Вестник Государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова. Санкт-Петербург.– 2016. – Выпуск 1 (35). – С. 24 – 29.

9. Крамер Г. Математические методы статистики / Крамер Г. – М.: Мир. – 1975. – 648 с.