

## КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАНИПУЛЯЦИОННОЙ СИСТЕМЫ РОБОТА

А.А. Тропина, доцент, к.ф.-м.н., С.Н. Марасов, студент, ХНАДУ

*Аннотация.* На основе матричного метода исследования проведен кинематический анализ манипуляционной системы промышленного робота. Определены основные кинематические характеристики звеньев манипулятора при заданном управлении, образованном линейной комбинацией рассогласований и их производных.

*Ключевые слова:* матричный метод, манипуляционная система, кинематический анализ.

### Введение

В последнее время большое внимание уделяется роботизации различных технологических процессов. Для этих целей широко используются манипуляционные роботы разнообразных конструкций. Эффективность и надежность работы манипуляционных систем роботов определяется как кинематикой звеньев, так и системой их управления. В этой работе на основе матричного метода исследования проводится кинематический анализ манипуляционной системы промышленного робота с целью выбора управления, решающего задачу захвата манипулятором движущейся по заданной траектории детали.

### Анализ публикаций

Решение проблемы управления движением манипуляционных роботов является достаточно сложной задачей, решению которой посвящено большое количество работ. Наиболее распространенным формализованным подходом к моделированию манипуляционных робототехнических систем является матричный подход [1].

На основе этого подхода в работе [2] проведено математическое моделирование поведения манипуляционных систем роботов шарнирного типа. В работе [3] динамическая модель манипуляционного робота строится с учетом минимизации динамических ошибок. Аналогичный матричный подход применен

авторами работы [4] для оптимизации управления манипуляционными роботами с помощью алгоритма преследования. В этой работе матричный подход используется в сочетании с линейной теорией управления для проведения кинематического анализа манипуляционного механизма.

Задача исследования состоит в выборе управления, решающего поставленную задачу захвата манипулятором движущейся детали, и в исследовании движения манипулятора при заданном управлении.

### Цель и постановка задачи

Объектом исследования является универсальный промышленный робот ПР-350, который представляет собой манипуляционный робот шарнирного типа с шестью степенями свободы (рис. 1). Данный робот используется при выполнении различных технологических операций, таких как контактная сварка, складирование, транспортировка деталей, и является частью сборочного конвейера по выпуску автомобилей ВАЗ.

Манипуляционная система робота представляет собой разомкнутую кинематическую цепь, состоящую из  $n$  звеньев, последовательно соединенных вращательными или поступательными кинематическими парами пятого класса. Для определения координат центра масс захватного устройства манипулятора воспользуемся матричным методом.

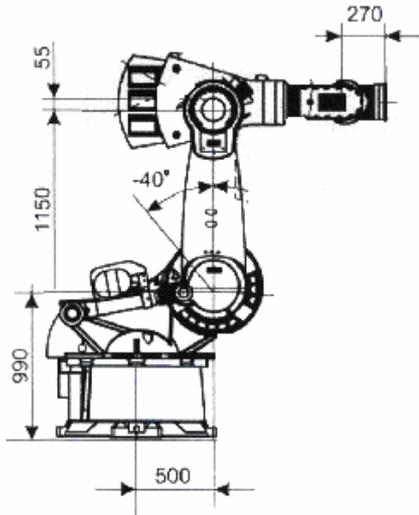


Рис. 1. Манипуляционный робот ПР-350

При этом с каждым звеном связывается собственная система координат с началом в центре первого шарнира (одна из координатных осей системы направлена вдоль оси шарнира). При таком выборе осей координат (метод Денавита-Хартенберга) матрицы перехода от одной системы координат к другой будут матрицами поворотов вокруг соответствующих координатных осей.

Кинематическое описание схемы манипулятора дополняется векторами переноса, определяющими сдвиг относительной системы координат относительно друг друга. Движение звена  $i$  относительно звена  $(i-1)$  определяется обобщенными координатами  $q_i$  и соответствующей матрицей перехода  $B_{(i-1),i}$ . Движение звена  $i$  относительно стойки описывается произведением матриц вида

$$B_{0i}(q_1, q_2, \dots, q_i) = B_{01}(q_1) \cdot B_{12}(q_2) \cdot \dots \cdot B_{(i-1),i}(q_i).$$

Если известны координаты центров масс звеньев  $C_i$  ( $i = 1..n$ ) в локальной системе координат  $\overline{r_i^{C_i}}$ , связанной с  $i$ -ым звеном, тогда в неподвижной системе координат получим, что

$$\overline{r_i^{C_i}} = B_{0i} \cdot \overline{r_i^{C_i}}.$$

Целью исследования является выбор управления, решающего задачу захвата манипулятором движущейся по заданной траектории детали, и определение кинематических характеристик манипулятора при заданном управлении.

## Результаты исследования

Первым этапом кинематического анализа является задание координат опорных точек в локальной системе координат звена. При этом в качестве опорных точек каждого звена выбираем центр масс звена, граничные точки и точки крепления соседнего звена. Используется метод аффинных преобразований в расширенном пространстве.

Так, в частности для звеньев 1 и 3, соответствующие матрицы опорных точек  $U_1, U_3$  с учетом конструктивной схемы и размеров манипулятора, приведенных на рис.1, имеют вид (координаты заданы в дм)

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4,5 & 4,5 & 0 & 0 & -1,25 & 1,25 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4,5 & 4,5 & 0 & 0 & -3,5 & 3,5 \\ 0 & 0 & 0 & 4,6 & 11,5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $B_{06}$ , задающая перемещения точек захвата манипулятора, равна произведению матриц формы и матриц опорных точек, и для рассматриваемого случая принимает вид

$$B_{06} = \left[ \prod_{i=1}^n \Phi_i R_i \right] U_6,$$

где  $U_6$  – матрица опорных точек захватного устройства,  $\Phi_i$  – матрицы формы, связанные с матрицами переходов, задающими ориентацию локальных систем координат относительно стойки,  $R_i$  – матрицы поворотов относительно локальных осей координат.

В качестве обобщенных координат выбирают:

- 1) углы поворота звеньев 1,3,5 вокруг оси  $OX$  –  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ;
- 2) углы поворота звеньев 4,6 вокруг оси  $OY$  –  $\psi_1, \psi_2$ ;
- 3) угол поворота звена 2 вокруг оси  $OZ$  –  $\theta_1$ .

Тогда, например, матрицы поворотов  $R_4, R_5$  звеньев 4,5 принимают вид

$$R_4 = \begin{pmatrix} \cos(\psi_1) & 0 & \sin(\psi_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\psi_1) & 0 & -\cos(\psi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_3) & -\sin(\varphi_3) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi_3) & \cos(\varphi_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из полученной матрицы  $B_{06}$  можно выделить аналитические выражения для координат центра масс захватного устройства, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$x_C = f_0 + f_1 + f_2, \quad y_C = f_3 + f_4 + f_5 + f_6, \quad (1)$$

$$f_0 = -l_5 \sin \theta_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 + l_5 \cos \theta_1 \sin \psi_1 \sin \varphi_3,$$

$$f_1 = l_5 \sin \theta_1 \sin \varphi_2 \sin \psi_1 \sin \varphi_3 - l_4 \sin \theta_1 \cos \varphi_2,$$

$$f_2 = l_{4-1} \sin \theta_1 \cos \varphi_2 + l_3 \sin \theta_1 \sin \varphi_2 - l_2 \sin \theta_1 + l_1,$$

$$f_3 = l_5 \cos \theta_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 \cos \varphi_2 - l_5 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3,$$

$$f_4 = l_5 \sin \theta_1 \sin \psi_1 \sin \varphi_3 \cos \varphi_1 - l_5 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \cos \theta_1 \cos \psi_1,$$

$$f_5 = l_5 \cos \psi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_1 + l_4 \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 \cos \theta_1,$$

$$f_7 = -l_3 \sin \varphi_2 \cos \theta_1 \cos \varphi_1 + l_3 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + l_2 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 + l_1,$$

$$f_6 = -l_4 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 - l_{4-1} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \theta_1 + l_{4-1} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2,$$

где  $l_i (i=1..6)$  – длина звеньев манипулятора. Аналитическое выражение для координаты  $z$  центра масс захватного устройства не приводится в силу его громоздкости.

Управление движением манипулятора будем осуществлять по линейной комбинации рассогласований координат движения точки А (детали) и центра масс (точки С) захвата, а также их производных. Координаты точки С захвата определяются выражениями (1). Координаты точки А, движущейся вдоль прямой с постоянной скоростью, зададим параметрическими уравнениями вида

$$x_A = x_A(0) + V_{Ax} \cdot t, \\ y_A = y_A(0) + V_{Ay} \cdot t, \quad z_A = z_A(0) + V_{Az} \cdot t, \quad (2)$$

где  $t$  – время,  $V_{Ax}, V_{Ay}, V_{Az}$  – проекции вектора скорости точки А на оси неподвижной системы координат.

Рассогласование движения определим следующим образом:

$$\Delta x = x_A - x_C, \quad \Delta y = y_A - y_C,$$

$$\Delta z = z_A - z_C. \quad (3)$$

При этом управление движением захвата будем осуществлять по сигналам управления  $u_x, u_y, u_z$ , образованным линейной комбинацией рассогласований и их производных

$$u_x = \Delta x + T_1 \frac{d}{dt} \Delta x, \quad u_y = \Delta y + T_2 \frac{d}{dt} \Delta y, \quad (4)$$

$$u_z = \Delta z + T_3 \frac{d}{dt} \Delta z, \quad (5)$$

где  $T_1, T_2, T_3$  – множители размерности времени, которые выбираются по заданному отклонению рассогласований от их начальных значений.

Сигналы  $u_x, u_y, u_z$  подаются на управление двигателя манипулятора с коэффициентом усиления  $k$ , который в современных высокоточных манипуляторах очень высок, что позволяет считать  $k \rightarrow \infty$ , тогда при условии конечности производных  $ku_x, ku_y, ku_z$ , получим, что  $u_x = u_y = u_z = 0$ .

Приближенные предельные уравнения, описывающие движение манипулятора с точностью до  $1/k$ , принимают вид

$$\frac{dx_C}{dt} = V_{Ax} + \frac{1}{T_1}(x_A - x_C), \quad (6)$$

$$\frac{dy_C}{dt} = V_{Ay} + \frac{1}{T_2}(y_A - y_C), \quad (7)$$

$$\frac{dz_C}{dt} = V_{Az} + \frac{1}{T_3}(z_A - z_C). \quad (8)$$

Кинематические уравнения (6) – (8) описывают движение центра масс захвата за пределами малого начального интервала времени  $\delta$  (за пределами погранслоя [5]). За время  $\delta$  сигналы  $u_x, u_y, u_z$  системой управления должны сводиться от конечных по величине значений до значений, близких к нулю.

При выполнении условий  $u_x = u_y = u_z = 0$  решения уравнений (4), (5) принимают однотипный вид

$$\Delta x = \Delta x(0) \exp(-t/T_1), \quad (9)$$

$$\Delta y = \Delta y(0) \exp(-t/T_2), \quad (10)$$

$$\Delta z = \Delta z(0) \exp(-t/T_3), \quad (11)$$

где  $\Delta x(0), \Delta y(0), \Delta z(0)$  – начальные рассогласования.

Учитывая, что к концу заданного временного интервала  $\tau$  рассогласования  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  должны быть достаточно малыми по сравнению с начальными рассогласованиями, получим, что

$$T_1 = -\tau / \ln(\Delta x / \Delta x(0)),$$

$$T_2 = -\tau / \ln(\Delta y / \Delta y(0)),$$

$$T_3 = -\tau / \ln(\Delta z / \Delta z(0)).$$

При выборе изотропного параметра рассогласования, т.е. при

$$\Delta x / \Delta x(0) = \Delta y / \Delta y(0) = \Delta z / \Delta z(0) = \gamma,$$

получаем одинаковый по всем направлениям коэффициент управления  $T^* = -\tau / \ln \gamma$ .

Для определения угловых скоростей звеньев манипулятора при заданном управлении и

полученном законе движения центра масс захватного устройства вида (1), используем обратные матричные преобразования

$$\bar{V}_k = \sum_{i=1}^6 L_{V,i} \bar{r}_{ki} \dot{q}_i, \quad (12)$$

где  $L_{V,i} = \frac{\partial B_{0i}}{\partial q_i} B_{i0}$  – матрица аналога скорости  $i$ -го звена,  $\dot{q}_i$  – обобщенные скорости.

Полученную систему уравнений (12) можно разрешить относительно угловых скоростей звеньев с учетом уравнений движения центра масс захватного устройства (1). При этом формируется система уравнений для определения значений угловых скоростей звеньев в данный момент времени при заданном управлении  $T^*$ .

Эта система уравнений для угловых скоростей дополняется кинематическими уравнениями, определяющими угловые скорости звеньев как производные от соответствующих углов поворота (обобщенных координат). Таким образом, задавая начальные значения обобщенных координат и обобщенных скоростей, можно найти решение полученной системы уравнений итерационным методом, что позволяет в первом безинерционном приближении оценить диапазон изменения кинематических характеристик звеньев.

В качестве начальных значений обобщенных координат выбирались следующие значения:

$$\varphi_{10} = \varphi_{20} = \varphi_{30} = \pi / 2, \quad (13)$$

$$\psi_{10} = \psi_{20} = \theta_{10} = 0. \quad (14)$$

Поскольку полученная система уравнений состоит из девяти уравнений первого порядка, а манипулятор является системой с шестью степенями свободы, из начальных значений переменных независимыми являются только шесть, а остальные определяются по значениям (13), (14) для рассматриваемой конструктивной схемы манипулятора.

На рис. 2 представлены расчетные траектории движения центра масс захватного устройства (точки С) и детали А на момент сближения ( $\tau = 1, 2$  с) при следующих значениях параметров:

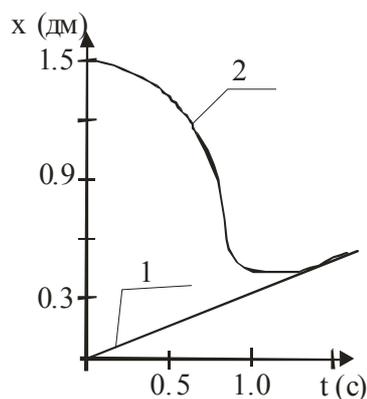


Рис. 2. Зависимости координат точки С (кривая 2) и точки А (кривая 1) от времени

$$\gamma = 0,001, V_A = 0,4 \text{ м/с}, x_A(0) = 0, \\ y_A(0) = 0, z_A(0) = 0,6 \text{ м}, T^* = 0,02.$$

Варьируя параметр  $T^*$ , можно менять характер сближения траекторий точек С и А. На рис. 3 представлены зависимости угловых скоростей звеньев от времени при полученной траектории движения точки С и выбранном управлении.

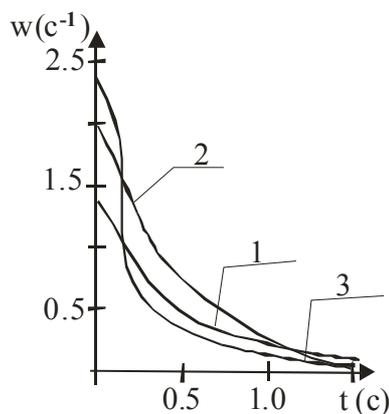


Рис. 3. Зависимости угловых скоростей звеньев от времени: 1 –  $\omega_1$ ; 2 –  $\omega_2$ ; 3 –  $\omega_3$

Таким образом, предложенный подход позволяет в первом (безинерционном) приближении определить диапазон изменения кинематических характеристик звеньев при решении задачи захвата манипулятором движущейся детали.

## Выводы

На основе матричного подхода и метода управления, основанного на линейной комбинации рассогласований и их производных, проведен кинематический анализ манипуляционной системы промышленного робота.

Определены угловые скорости звеньев манипулятора при заданном управлении с учетом малых отклонений рассогласований и их производных от начальных значений.

Полученные данные являются основой для формирования динамических уравнений движения манипулятора в виде уравнений Лагранжа второго рода, решение которых позволит оценить динамические ошибки и повысить точность системы управления.

## Литература

1. Попов Е.П., Письменный Г.В. Основы робототехники: введение в специальность. – М.: Высшая школа, 1990. – 286 с.
2. Mladenova С. Mathematical modeling and control of manipulator systems// J. Robotics and computer-integrating manufacturing. – 1998. – V.8. – №4. – P.233 – 242.
3. Hedjar R., Boucher P. Non-linear receding-horizon control of rigid link robot manipulators// Int. J. of Advanced Robotic Systems. –2005. – V.2. – №1. – P.15 – 24.
4. Chen W.H., Balance D.J., Gawthrop P.J. Optimal control of nonlinear systems: a predictive approach // Automatica. – 2003. –V.39. – P. 633 – 641.
5. Васильева А.В., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 192 с.

Рецензент: А.В. Бажинов, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 8 января 2008 г.