



УДК 625.72, 625.04, 625.7, 528.48

- © П.І. Баран, докт. техн. наук, професор, заст. директора (Українжгеодезія),
- © К.О. Буряк, докт. техн. наук, доцент, зав. кафедри (ІФНТУНГ)

## НОВИЙ МЕТОД РОЗТАШУВАННЯ І З'ЄДНАННЯ КЛОТОЇДИ З КОЛОВОЮ КРИВОЮ

**Анотація.** Запропонований новий метод розміщення і вибору параметрів перехідної кривої (клотоїди) для автошляхів та залізниць, який забезпечує з'єднання клотоїди з коловою кривою без її зміщення та збереження радіуса кривої, включаючи й клотоїдні криві. Завдяки цьому спрощуються розрахунки елементів прив'язування клотоїди до траси при проектуванні та їх розмічування на місцевості.

**Ключові слова:** колова крива, клотоїда, клотоїдна криві, елементи кривої.

**Аннотация.** Предложен новый метод размещения и выбора параметров переходной кривой (клотоиды) для автомобильных и железных дорог, который обеспечивает соединение клотоиды с круговой кривой без ее смещения и сохранения радиуса кривой, включая и образующие клотоидных кривых. Благодаря этому упрощаются расчеты элементов привязки клотоиды к трассе при проектировании и их разбивка на местности.

**Ключевые слова:** круговая кривая, клотоида, клотоидная кривая, элементы кривой.

**Annotation.** A new method of allocation and selection parameters of the transition curve (clothoid) for roads and railways, which provides a connection clothoid of circular curve without bias and its preservation radius curve, including clothoid curves. This simplifies the calculations clothoid binding elements to route the design and Layout view them on the ground.

**Key words:** circular curve, clothoid, clothoid curves, curve elements.

### Вступ

При будівництві автомобільних доріг, залізниць, монорейкових доріг тощо, широко використовують перехідні криві типу радіоїдальної спіралі (клотоїди) для поступового погашення впливу відцентрової сили при переході транспорту з прямої ділянки на колову криву. Зараз у практиці застосовують переважно перехідну криву зі зміщеним центром колової кривої, в якій зберігається радіус зміщеної колової кривої [1, 2, 5]. Але через невіддале розташування середини перехідної кривої стосовно початку (кінця) колової кривої дуже ускладнюються теоретичні викладки і практичні розрахунки під час проектування і розмічування кривих на місцевості.

У даній статті дається новий метод розміщення перехідної кривої, в якому її середина зміщується майже на 8 % від її довжини до вершини кривої. Завдяки цьому перехідна крива зміщується від заміної частини колової кривої на незначну відстань, що важливо при реконструкції шляхів у межах відведеного земляного полотна.

### Основна частина

Під час руху транспорту на криволінійних ділянках автошляху виникає відцентрова сила, для врівноваження дії якої влаштовують віраж, тобто односкатний поперечний профіль з нахилом до

центра кривої. Для цього використовують перехідну криву, наприклад, клотоїду, один кінець якої пристиковується до прямої вставки, а другий – до колової кривої у відповідному місці. Радіус таких кривих невідмінно змінюється від нескінченності на їх початку до радіуса колової кривої в її кінці, чим забезпечується поступове зменшення відцентрового прискорення.

У параметричній формі прямокутні координати точок клотоїди описуються рівняннями:

$$x = l \left( 1 - \frac{l^4}{40C^2} \left( 1 - \frac{l^4}{86,4C^2} \right) \right); y = \frac{l^3}{6C} \left( 1 - \frac{l^4}{56C^2} \left( 1 - \frac{l^4}{125,7C^2} \right) \right), (1)$$

де  $R$  – радіус колової кривої;

$L$  – довжина перехідної кривої;

$l$  – віддалення біжучої точки кривої від її початку;

$C = RL$  – постійна перехідної кривої.

Координати кінця клотоїди обчислюють при  $l = L$  за цими ж формулами, які мають вигляд:

$$x_L = L \left( 1 - \frac{L^2}{40R^2} \left( 1 - \frac{L^2}{86,4R^2} \right) - \dots \right); (2)$$

$$y_L = \frac{L^2}{6R} \left( 1 - \frac{L^2}{56R^2} \left( 1 - \frac{L^2}{125,7R^2} \right) - \dots \right).$$



Згідно з ДБН В.2.3–4 на автошляхах нормативні значення довжин перехідних кривих назначають в межах від 35 м до 130 м при радіусах кривих від 50 м до 2 000 м. На залізницях, згідно з ДБН В.2.3–19 довжина цих кривих становить від 20 м до 300 м, а у метрополітенах, за ДБН В.2.3–7 – від 20 м до 80 м.

Теорія перехідних кривих описується в багатьох джерелах [1 – 11], в яких вона розміщується симетрично початку (кінця) колової кривої, що призводить до зміщення самої колової кривої до її центра кривини та зменшення радіуса на величину:

$$p \approx L^2 / 24R. \quad (3)$$

Для усунення цього недоліку в практиці [2, 4, 8, 9] одночасно із зміщенням колової кривої зміщують її центр її кривизни, залишаючи незмінним радіус  $R$ . Не дивлячись на це, основний недолік такої перехідної кривої – це спосіб її розташування, при якому колова крива зміщується зі свого первісного (проектного) положення, що призвело до суттєвого ускладнення методики розрахунку параметрів кривих та їх розмічування на місцевості.

#### Теоретичне обґрунтування методу

В основу нового методу розміщення перехідної кривої та її з'єднання з незміщеною коловою кривою покладено зміщення її середини на незначну відстань вздовж траси від ПК до вершини кривої. При цьому параметри клотоїди задовольняють вимоги норм і залишаються незмінними.

Розташування клотоїди та її з'єднання з коловою кривою новим методом показано в першій половині кривої на **рис. 1** (на другій половині показано клотоїдний варіант траси).

Для визначення положення кінців клотоїди стосовно вершини кута повороту траси треба визначити кут  $\varphi_k$ , а потім абсцису  $x_k$  і ординату  $y_k$  колової кривої в точці КПК відносно початку колової кривої ПК за формулами:

$$\varphi_k = \frac{180^\circ k}{\pi R} = \frac{k}{R}; \quad x_k = R \sin \varphi_k;$$

$$y_k = R(1 - \cos \varphi_k) \approx \frac{k^2}{2R} \left( 1 - \frac{k^2}{12R^2} + \frac{k^4}{360R^4} - \dots \right), \quad (4)$$

в якій кут  $\varphi_k$  подається у кутовій та радіанній мірах. Значення  $k$  визначають за формулою (8). Прямокутні координати  $x_L$ ,  $y_L$  точки КПК відносно початку перехідної кривої визначають за формулами (2).

Таким чином, в кінці перехідної кривої має витримуватися умова, щоби  $y_L = y_k$ , або

$$\frac{L^2}{6R} \left( 1 - \frac{L^2}{56R^2} \left( 1 - \frac{L^2}{125,7R^2} \right) - \dots \right) =$$

$$= \frac{k^2}{2R} \left( 1 - \frac{k^2}{12R^2} \left( 1 - \frac{k^2}{30R^2} \right) - \dots \right) \quad (5)$$

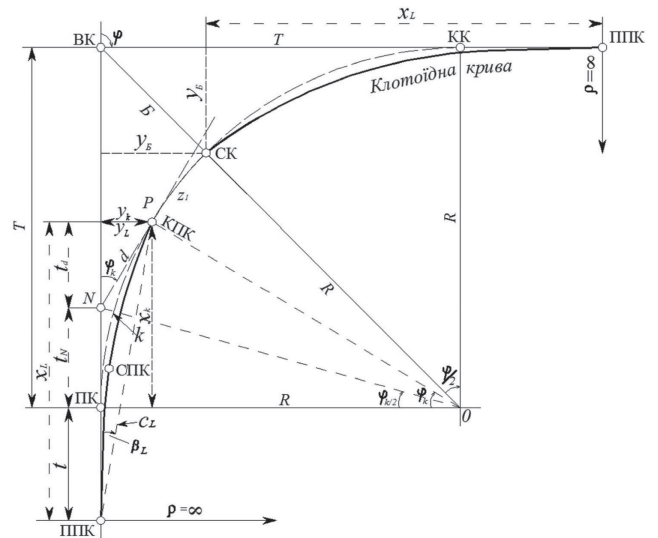


Рис. 1. Розміщення перехідної кривої

Звідси легко визначити  $k$  залежно від нормативної довжини клотоїди  $L$  або навпаки – довжину  $L$  від  $k$ , а саме:

$$k = \frac{L}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{L^2}{56R^2} \left( 1 - \frac{L^2}{125,7R^2} \right) - \dots} \approx \frac{L}{\sqrt{3}}; \quad (6)$$

$$\sqrt{1 - \frac{k^2}{12R^2} \left( 1 - \frac{k^2}{30R^2} \right) - \dots}$$

$$L = \frac{k \sqrt{3 \left( 1 - \frac{k^2}{12R^2} \left( 1 - \frac{k^2}{30R^2} \right) - \dots \right)}}{\sqrt{1 - \frac{L^2}{56R^2} \left( 1 - \frac{L^2}{125,7R^2} \right) - \dots}} \approx k\sqrt{3}. \quad (7)$$

Першу формулу застосовують тоді, коли до колової кривої приєднується перехідна крива заданої (нормативної) довжини, а друга, коли колова крива замінюється клотоїдною кривою.

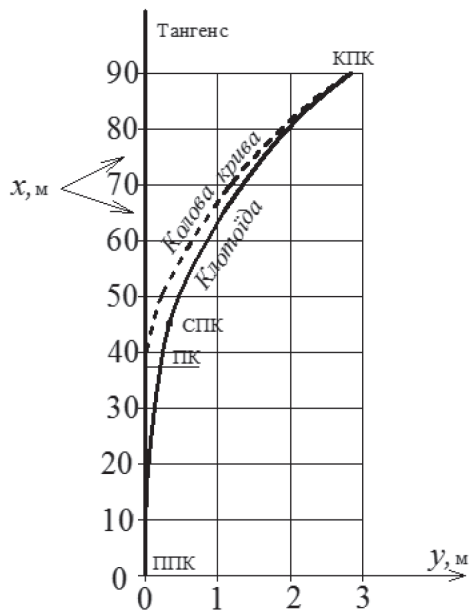
Для обчислення точних (до 1 мм) значень  $k$  або  $L$  треба спочатку задати наближені значення  $k' \approx L/\sqrt{3}$  або  $L' \approx k\sqrt{3}$ , а потім методом ітерацій при незмінному чисельнику обчислити точне значення знаменників указаних формул. Так,



наприклад, для отримання  $L_0 = 90,000$  м спочатку при радіусі колової кривої  $R = 500$  м обчислюють чисельник 51,9465 і наближене значення  $k' \approx 51,962$  м, а потім за точною формулою (6) при знаменнику 0,9995497 – точне значення  $k = 51,970$  м.

При необхідності отримані значення  $L$  корегують у бік збільшення або зменшення для забезпечення оптимальних умов розташування кривих.

Перехідна крива відхиляється менше від прямої вставки у першій її половині і більше від замінної частини колової кривої – у другій (до КПК), де обидві криві збігаються, що показано на **рис. 2** ( $R = 500$  м,  $L = 90$  м).



**Рис. 2.** Взаємне розміщення колової кривої і клоатоїди

Середнє інтегральне зміщення кривих на всій довжині перехідної кривої становить:

$$\Delta\bar{y} = \frac{L^2}{104R}, \quad (8)$$

яке для вищевказаних кривих дорівнює всього 0,15 м. Очевидно, що для зменшення цього зміщення треба брати коротшу клоатоїду, оскільки збільшення радіуса може бути недоцільним, наприклад, під час реконструкції шляху.

Завдяки такому зближенню кривих пікетажні значення кінцевих точок кривих, прийняті під час вишукувань або проектування, зменшуються на незначну величину:

$$\Delta P = (K + t_1 + t_2) - (L_1 + z_1 + z_2 + L_2), \quad (9)$$

яка переважно не перевищує 50 мм.

Таким чином, метод дозволяє визначити умови розташування перехідної кривої, в кінці якої змінний радіус кривини клоатоїди  $\rho = R$ . Вказані вище характеристики наближення клоатоїди до колової

кривої особливо ефективні під час реконструкції автошляхів та залізниць.

Формула (6) вважається найефективнішою, оскільки при вишукуваннях транспортних споруд в камеральних або польових умовах спочатку за нормативним значенням радіуса визначають елементи колової кривої, зокрема її довжину  $K$ , а потім, після вибору довжини перехідної кривої, розраховують її основні елементи для фіксації положення кривих у геометрії траси, зокрема із використанням таблиць кривих за величинами  $R$  і  $L$ .

Інші параметри клоатоїди, необхідні для її розмічування на місцевості, визначають за формулами:

$$t = x_L - x_k; c_L = \sqrt{x_L^2 + y_L^2}; \beta_L = \arctg(y_L/x_L), \quad (10)$$

де  $x_k$  – абсциса точки КПК від ПК;

$t$  – абсциса ПК відносно ППК.

Розмічування проміжних точок перехідної кривої ведуть за їх прямокутними координатами  $x_i, y_i$ , які обчислюють за формулами (1) з використанням віддалення  $l_i$  біжучої точки від (ППК) або вибирають із таблиць кривих. Одночасно обчислюють відстань  $l_{ПК}$  від ППК до точки клоатоїди в ПК та її ординату  $y_{ПК}$  за формулами:

$$l_{ПК} = t / \sqrt{\left(1 - \frac{t^2}{40C^2} \left(1 - \frac{t^2}{86,4C^2} - \dots\right)\right)}; y_{ПК} \approx \frac{l_{ПК}^3}{6C}. \quad (11)$$

При необхідності за формулою (4) при  $l = L/2$  обчислюють абсцису й ординату середини СПК клоатоїди.

Для розмічування залишкової колової кривої способами прямокутних або полярних координат доцільно визначити дотичну  $NP$ , початкову точку  $N$  якої розмічують від точки ПК за відстанями:

$$t_N = d = R \operatorname{tg} \varphi_k / 2; t_d = d \cos \varphi_k. \quad (12)$$

Треба відзначити, що розміщення перехідних кривих можна здійснити при умовах:

$$z_i = \frac{K}{2} - k_i; k_1 + z_1 + z_2 + k_2 \leq K \text{ або } \frac{L_1 + L_2}{\sqrt{3}} + z_1 + z_2 \leq K, \quad (13)$$

де  $z_1, z_2$  – залишкові колові криві, сума яких повинна мати відповідну довжину (20 – 40 м) залежно від типу споруди.

Якщо ця вимога не задовольняється, то збільшують нормативне значення радіуса, а, отже, і довжину колової кривої  $K$  або скорочують довжину перехідної кривої.

Ілюстрація практичного застосування способу дається на основі колової кривої з такими вихідними даними та обчисленими її елементами:

$$\varphi = 26^\circ 16'; R = 500 \text{ м}; T = 116,660 \text{ м};$$

$$K = 229,220; B = 13,429 \text{ і } D = 4,101 \text{ м}.$$



Довжину  $L$  перехідної кривої взято рівною 90,000 м та обчислено відповідні величини для визначення довжини заміної колової кривої та розмічування перехідної кривої на місцевості:

$$k' \approx 51,962 : k = 51,970 \text{ м}; \varphi_k = 5^\circ 57' 19,2''; x_k = 51,876;$$

$$y_k = 2,6984; x_L = 89,927; y_L = 2,6984 \text{ м (контроль обчислень);}$$

$$t = x_L - x_k = 38,051; c_L = 89,968 \text{ м}; \beta_L = 1^\circ 43' 07,4''; y_{ПК} = 0,204;$$

$$t_N = 26,008; d = 26,008; t_d = 25,868 \text{ м.}$$

Як бачимо, обрана довжина клотоїди забезпечує вихід траси на залишкову колову криву, половина довжини якої становить  $z_1 = 229,220/2 - 51,970 = 62,64$  м, що створює значний резерв для збільшення довжини клотоїди на 20 – 30 м. Аналогічно розташовують клотоїду на другій половині кривої (симетричні перехідні криві) або клотоїди іншої довжини (несиметричні перехідні криві). Очевидно, що у першому випадку залишкові відрізки колової кривої матимуть однакову довжину, а в другому – різну та ще й з несиметричним розташуванням.

Елементи кривої з несиметричними клотоїдами обчислюють за формулами:

$$T_{П1} = T + t_1; T_{П2} = T + t_2; K_{П1} = L_1 + z_1 + z_2 + L_2;$$

$$B_{П1} = B; D_{П1} = (2T + t_1 + t_2) - (L_1 + z_1 + z_2 + L_2), \quad (14)$$

де  $T, K, B, D$  – елементи колової кривої.

Аналіз величин  $x_k$  і  $t$  свідчить, що менша частина перехідної кривої (42 %) займає зону прямолінійної частини траси (до ПК), а більша (58 %) – зону колової кривої. Більше того, ці частини співвідносяться як  $k \div 0,73k$  (сума коефіцієнтів при  $k$  дорівнює  $\sqrt{3}$ ). Нагадаємо, що у традиційній системі розміщення клотоїди, яка використовується зараз у практиці, ця крива поділяється стосовно ПК на дві половини, що призвело до суттєвого ускладнення технології розмічування кривих транспортних споруд. У новому ж методі зміщення середини перехідної кривої СПК відносно ПК становить всього  $\Delta x_{СПК} = 0,0772L$  із суттєвим техніко-економічним ефектом. У нашому прикладі  $x_{СПК} = 44,988; y_{СПК} = 0,338$  м, а віддалення СПК від ПК становить  $\Delta x_{СПК} = 6,948$  м.

У симетричних клотоїдних кривих згідно з рис. 1 виконується умова  $L_1 = L_2 = L; \varphi_k = \varphi/2$ . Тоді за проекцією  $y_k = y_B = B \cos \varphi/2$  бісектриси колової кривої на вісь ординат визначають довжину клотоїди за формулою (7):

$$L = \frac{\sqrt{6R B \cos \varphi/2}}{\sqrt{1 - \frac{L^2}{56R^2} \left(1 - \frac{L^2}{12R^2}\right)}} \approx \sqrt{6R B \cos \varphi/2}. \quad (15)$$

Зауважимо, що вказані клотоїдні криві стикаються на середині колової кривої СК і є симетричними, мають дробні значення і без залишкової колової кривої.

Згідно з вищенаведеним прикладом для  $B = 13,429$  м;  $y_k = 13,077$  і  $R = 500$  м отримуємо значення  $L = 198,353$  м. Для контролю визначення  $L$  за формулою (2) можна обчислити значення  $y_L$ . Очевидно, радіус кривини клотоїди в точці СК дорівнює нормативному радіусу колової кривої.

Аналогічно до попереднього обчислюють допоміжні величини й елементи кривих:

$$t = x_L - x_k; \Delta P = K + 2t - 2L;$$

$$T_{П1} = T + t; K_{П1} = L_1 + L_2; B_{П1} = B; D_{П1} = 2(L - t). \quad (16)$$

### Висновки

1. Зміщення середини перехідної кривої від початку колової кривої ПК у бік її вершини на величину  $0,772L$  забезпечує просте з'єднання кривих без зміщення колової кривої з первісного свого положення, вибраного в процесі польового вишукування або проектування.

2. Метод забезпечує максимальне (до 0,5 м) зближення перехідної і колової кривих, що практично не призводить до зміни пікетажу і сприяє використанню методу під час будівництва і реконструкції автошляхів та залізниць.

3. Завдяки простому поєднанню перехідної і колової кривих суттєво спрощується методика розмічування кривих на автошляхах та залізницях і скорочується кількість осей в лінійних транспортних спорудах, особливо в тунелебудуванні.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Баран, П.І. До теорії та практики розпланування сучасних перехідних кривих / П.І. Баран // Вісн. геодез. та картогр. – 1998. – № 3. – С. 20-26.
2. Баран, П.І. Інженерна геодезія / П.І. Баран. – К.: Віпол. – 2012. – 618 с.
3. Белятинский, А.А. Применение кривых нового типа при проектировании закруглений автомобильных дорог / А.А. Белятинский, А.М. Таранов // Строительство и архитектура. – 1981. – № 2. – С. 104-106.
4. Бобков, В.Ф. Дорожные условия и безопасность движения : учеб. для вузов / В.Ф. Бобков. – М.: Транспорт, 1993. – 271 с.
5. Бойчук, В.С. Довідник дорожника / В.С. Бойчук. – К.: Урожай, 2002. – 560 с.
6. ДБН В.2.3–4:2007. Державні будівельні норми. Споруди транспорту. Автомобільні дороги. – К.: Держбуд України, 2008. – 95 с.
7. Каменецкий, Б.И. Автомобильные дороги / Б.И. Каменецкий, И.Г. Кошкин. – М.: Транспорт, 1979. – 144 с.
8. Левчук, Г.П. Прикладная геодезия / Г.П. Левчук, В.Е. Новак, Н.Н. Лебедев. – М.: Недра, 1983. – 400 с.
9. Сокол, Э.Н. Кривые переменного радиуса и их применение на трубопроводном транспорте / Э.Н. Сокол. – Л.: Вища школа, Изд-во при Львов. ун-те, 1984. – 88 с.
10. Цилль, В. Инженерная геодезия : перевод с 6-го немецкого издания / В.Цилль. – М.: Недра, 1974. – 430 с.
11. Geodezja inżynieryjna. Tom 1. – Warszawa, PPWK. – 1979. – 638 p.
12. Баран, П.І. Новий спосіб розміщення клотоїди та її з'єднання з незміщеною коловою кривою / П.І. Баран, К.О. Бурак // Вісн. геодез. та картогр. – 2013. – № 3. – С. 11-14.