



3. Гоголюк П.Ф., Теория автоматического управления: навальный посібник/ П.Ф.Гоголюк, Т.М.Гречин.– Львів: Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2009.– 280с.
4. Гультьев А.К. Визуальное моделирование в среде MATLAB6 / А.К. Гультьев. – СПб.: Питер, 2000.– 432с.

УДК 519.852.33

## ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С ИДЕАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ДЛЯ ПОИСКА КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ НА ВЗВЕШЕННОМ ОРИЕНТИРОВАННОМ ГРАФЕ

Гнатенко В.Ю.<sup>1</sup>, Ступень П.В.<sup>2</sup>, Дікусар К.В.<sup>3</sup>, Шутєєв Е.І.<sup>4</sup><sup>1,2,3,4</sup>Одесский национальный политехнический университет, г.Одесса, Украина<sup>1</sup>E-mail: [valera.gnatenko@gmail.com](mailto:valera.gnatenko@gmail.com), <sup>2</sup>[stek2000@gmail.com](mailto:stek2000@gmail.com), <sup>3</sup>[semuella@gmail.com](mailto:semuella@gmail.com), <sup>4</sup>[edshh489@gmail.com](mailto:edshh489@gmail.com)

Copyright © 2018 by author and the journal “Automation technologies and business - processes.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>

DOI: 10.15673/atbp.v10i2.976

*Аннотация.* Рассмотрена проблема определения кратчайшего пути во взвешенном ориентированном графе с применением электрической модели с идеальными диодами, источниками напряжения и тока. Проведены теоретические исследования в области математического моделирования электрических схем с идеальными элементами. Рассмотрен пример определения кратчайшего пути в заданном взвешенном ориентированном графе.

*В задачах небольшой размерности можно использовать аналоговые электрические модели. Однако для больших графов аналоговые модели становятся весьма громоздкими из-за необходимости включения в каждую цепь изолированного источника электрической энергии, а точность решения низкой из-за неидеальности характеристик элементов.*

*В данной статье рассматривается развитие модели представления взвешенного ориентированного графа без использования структурной матрицы или каких-либо других топологических матриц. Вместо этого предлагается формировать и обрабатывать в процессе анализа список ветвей с присущими им характеристиками и параметрами. Целью работы является обоснование электрической модели для поиска кратчайшего пути во взвешенном ориентированном графе, представление алгоритма для реализации и иллюстрации эффективности метода.*

*Так как исходная электрическая цепь не содержит накопителей энергии и в ней в принципе невозможен переходный процесс, предлагается преобразовать исходную электрическую цепь в динамическую путем присоединения к каждому узлу схемы по емкости, другой конец которой соединить с базисным узлом, не принадлежащим данной схеме и общим для всех емкостей. В результате становится возможным протекание переходного процесса, по окончании которого токи емкостей станут равными нулю и не будут оказывать влияния на распределение токов и напряжений в схеме.*

*Abstract.* The problem of determining the shortest path in a weighted and directed graph is considered using an electric model with ideal diodes, voltage and current sources. Theoretical studies in the field of mathematical modeling of electrical circuits with ideal elements have been carried out. An example of determining the shortest path in a given weighted directed graph is considered.

*In problems of small dimension, analog electric models can be used. However, for large graphs, analog models become very cumbersome because of the need to include an isolated source of electrical energy in each circuit, and the accuracy of the solution is low because of the non-ideality of the characteristics of the elements.*

*In this paper, we consider the development of a representation model of a weighted and directed graph without the use of a structural matrix or any other topological matrices. Instead, it is proposed to form and process in the process of analysis a list of branches with their inherent characteristics and parameters.*



*The aim of the paper is to justify the electric model for finding the shortest path in a weighted oriented graph, the representation of the algorithm for implementing and illustrating the effectiveness of the method.*

*Since the initial electric circuit does not contain energy storage devices and, in principle, a transient process is not possible in it, it is proposed to convert the initial electric circuit to a dynamic one by attaching to each node of the circuit in capacity, the other end of which is connected to a basic node that does not belong to this scheme and is common to all containers. As a result, a transient process becomes possible, at the end of which the capacitance currents will become equal to zero and will not affect the distribution of currents and voltages in the circuit.*

Ключевые слова: электрическая модель, взвешенный ориентированный граф, кратчайший путь, метод узловых потенциалов, метод установления

Keywords: electric model, weighted and directed graph, shortest path, node potential method, method of setting

## Введение

Известны методы решения задач линейного программирования на электрических моделях постоянного тока [1, 2]. В этих работах устанавливается тесная связь между теорией электрических цепей и математическим программированием, которая объясняется оптимальным по мощности распределением значений токов и напряжений в электрической цепи и нахождением оптимального пути во взвешенном ориентированном графе. Такие электрические модели содержат нелинейные элементы, такие, например, как диоды, источники электрической энергии.

В задачах небольшой размерности можно использовать аналоговые электрические модели. Однако для больших графов аналоговые модели становятся весьма громоздкими из-за необходимости включения в каждую цепь изолированного источника электрической энергии, а точность решения низкой из-за не идеальности характеристик элементов.

В [3] предложен метод расчета одной из задач линейного программирования – поиска кратчайшего пути во взвешенном ориентированном графе с применением электрической модели с идеальными электрическими элементами: диодами, источниками напряжения и тока. Этот метод предполагает использование топологических уравнений с использованием структурной матрицы в прямом и транспонированном виде, размерность которой должна соответствовать топологии конкретной электрической схемы. Для схем большой размерности структурная матрица становится сильно разреженной, что не учитывается в упомянутом методе и приводит к бесполезным затратам ресурсов вычислительного устройства на арифметические и логические операции с операндами, имеющими нулевые значения.

## Цель работы

В данной статье рассматривается развитие предложенной в [3] модели представления взвешенного ориентированного графа, но без использования структурной матрицы или каких-либо других топологических матриц. Вместо этого предлагается формировать и обрабатывать в процессе анализа список ветвей с присущими им характеристиками и параметрами. Очевидным преимуществом использования списка ветвей перед структурной матрицей является его компактность. При использовании списка ветвей также облегчается возможность формирования динамически изменяемого списка ветвей, что позволяет оперативно изменять условия задачи поиска в процессе ее решения. Также рассмотрен вопрос динамического выбора шага численного интегрирования. Целью работы является обоснование электрической модели для поиска кратчайшего пути во взвешенном ориентированном графе, представление алгоритма для реализации и иллюстрации эффективности метода.

## Основная часть

Как известно, задача анализа электрической цепи сводится к формированию математической модели схемы путем объединения топологических (законы Кирхгофа) и компонентных (закон Ома) уравнений с последующим расчетом фазовых переменных (токов и напряжений) на основе решения системы уравнений модели [4].

Процесс получения математической модели схемы с двухполюсными элементами, например, методом узловых потенциалов, можно представить следующей последовательностью действий:

- создание описания схемы в виде перечня ветвей и способа их соединения, а также описания самой ветви как функции между током ветви и приложенного к ветви напряжения в виде разности потенциалов;
- формирования топологической структурной матрицы;
- формирование топологического уравнения, отражающего распределение токов в соответствии с первым законом Кирхгофа;
- формирование уравнений ветвей относительно токов ветвей, здесь используется транспонированная структурная матрица, объединение топологических и компонентных уравнений.

В матрично-векторной форме этот же процесс формирования модели состоит из нескольких шагов, при условии, что описание схемы уже подготовлено:

Первый шаг – формирование системы компонентных уравнений:

$$U(\varphi) = A^1 \varphi, \quad (1)$$

где  $U(\varphi)$  – вектор напряжения цепей,



$\varphi$  – вектор узловых потенциалов,

$A'$  – транспонированная структурная матрица,

Второй шаг – формирование вектора токов ветвей:

$$I(\varphi) = F(U(\varphi)), \quad (2)$$

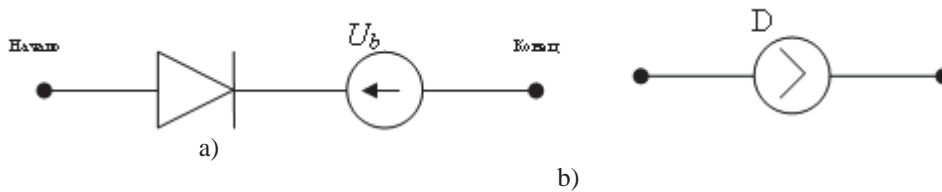
где  $F$  – функционал токов ветвей, отражающий нелинейность зависимости между фазовыми переменными.

Третий шаг – формирование топологической системы уравнений в соответствии с первым законом Кирхгофа:

$$A I(\varphi) - J = 0 \quad (3)$$

В результате решения системы (3) определяется вектор вектор узловых потенциалов  $\varphi$ , затем по (1) находятся напряжения ветвей и, наконец, по (2) – токи ветвей.

Будем считать, что каждая ветвь схемы содержит идеальный диод, принудительно задающий единственно возможное направление тока ветви и источник запирающего напряжения  $U_b$ . На рисунке 1 изображены электрическая схема ветви (рис.1 а) и ее условно-графическое обозначение (рис.1 б).



**Рис. 1 - Электрическая схема ветви (а) и ее условно-графическое обозначение (б)**

**Fig. 1 – The electrical scheme of branch (a) and its conditionally-graphic designation (b)**

Величина запирающего напряжения  $U_b$  эквивалентна весу ветви взвешенного ориентированного графа.

Каждый элемент списка ветвей графа содержит четыре поля:

- обозначение ветви;
- номер узла, с которым связано начало ветви (с вытекающим током);
- номер узла, с которым связан конец ветви (с втекающим током);
- величина запирающего диод напряжения.

Кроме того, обязательно должна быть еще дополнительная ветвь с задающим источником тока, под влиянием которого устанавливается искомое распределение токов и напряжений. Подключение ветви с источником тока между выбранными двумя узлами электрической схемы эквивалентно выбору двух вершин взвешенного ориентированного графа, между которыми ищется кратчайший путь. Ветви в списке могут располагаться в любом порядке.

С учетом упомянутого состава ветвей электрической схемы уравнение каждой ветви описывается выражением:

$$\text{если } U_i > U_{i,b}, \text{ то } I_i = J, \text{ иначе } I_i = 0, \quad (4)$$

где  $i$  – номер ветви,  $U_{i,b}$  – запирающее диод напряжение,  $J$  – единственный задающий ток схемы.

Так как ветви с идеальными диодами не имеют сопротивления определенной величины, их сопротивления равны нулю или бесконечности и электрическая цепь не содержит элементов с конечной величиной сопротивлений, для расчета ее токов и напряжений неприменимы традиционные методы теории электрических цепей. Предлагается использовать метод установления, который заключается в анализе токов и напряжений во время протекания переходного процесса до статического состояния [5]. Так как исходная электрическая цепь не содержит накопителей энергии и в ней в принципе невозможен переходный процесс, предлагается преобразовать исходную электрическую цепь в динамическую добавлением вышеупомянутых накопителей путем присоединения к каждому узлу схемы по емкости, другой конец которой соединить с базисным узлом, не принадлежащим данной схеме и общим для всех емкостей. В результате становится возможным протекание переходного процесса, по окончании которого токи емкостей станут равными нулю и не будут оказывать влияния на распределение токов и напряжений в схеме.

Следует отметить, что анализируемая схема является заведомо устойчивой, характер изменения напряжений во времени строго линейный, поэтому достижение установившегося режима можно гарантировать за конечный промежуток времени. Для схемы с добавочными емкостями математическая модель схемы будет представлять собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, нелинейность которых обусловлена односторонним протеканием тока в идеальном диоде.

При использовании метода установления математическая модель схемы должна учитывать появление дополнительных емкостных токов и в результате будет иметь вид:

$$A I(\varphi) - J + C \frac{d}{dt} \varphi = 0, \quad (5)$$

где  $C$  – квадратная диагональная матрица добавленных емкостей.



При решении системы уравнений (5) следует воспользоваться формулами численного интегрирования дифференциальных уравнений. Так как характер изменения во времени искомого узловых потенциалов линейный, что объясняется зарядом или перезарядом идеальных емкостей от идеального источника тока, то достаточно воспользоваться простейшей формулой численного интегрирования Эйлера для емкости:

$$\varphi_{r,k+1} = \varphi_{r,k} + \frac{h}{C_r} \Delta I_{r,k}, \quad (6)$$

где  $\varphi_r$  – потенциал узла  $r$  или напряжение емкости  $C_r$ ;

$k$  – номер дискретного момента времени;

$h$  – шаг численного интегрирования;

$\Delta I_r$  – невязка тока в узле  $r$ , вызванная несоблюдением закона Кирхгофа в процессе расчета вследствие дискретизации переходного процесса и инструментальных ошибок вычислений.

#### Динамический выбор шага численного интегрирования

Согласно (4) каждая ветвь, кроме содержащей источник тока, может быть в двух состояниях – открыта или закрыта. При протекании переходного процесса на любом шаге можно предсказать, будет ли рассматриваемая ветвь открываться или закрываться. Учитывая правило изменения потенциалов (6) и условие (4) можно получить значение шага интегрирования для каждой ветви

$$h = \begin{cases} \frac{\varphi_{r,kK} - \varphi_{r,kN}}{\frac{1}{C_r} \Delta I_{r,kN} - \frac{1}{C_r} \Delta I_{r,kK}}, & \text{если } \varphi_{r,kN} - \varphi_{r,kK} > U_{r,b}, \Delta I_{r,kN} - \Delta I_{r,kK} < 0 \\ U_{r,b} + \Delta U - (\varphi_{r,kK} - \varphi_{r,kN}), & \text{если } \varphi_{r,kN} - \varphi_{r,kK} < U_{r,b}, \Delta I_{r,kK} - \Delta I_{r,kN} > 0 \\ \frac{1}{C_r} \Delta I_{r,kK} - \frac{1}{C_r} \Delta I_{r,kN}, & \end{cases} \quad (7)$$

где  $\Delta U$  – минимальное ненулевое положительное значение напряжения.

Из полученных решений необходимо выбрать минимальное значение  $h$ . Таким образом, получена максимальная величина текущего шага интегрирования.

Если нет корректных решений для всех ветвей, пути не существует или процесс поиска завершен.

Представим алгоритмическое описание поиска кратчайшего пути.

1. Составить список узлов и инициализировать поля его элементов. Для простоты в поле узла, предназначенное для хранения значений узлового потенциала, устанавливается нулевое начальное значение.
2. Составить список ветвей и заполнить поля его элементов.
3. Если меняется структура графа, внести необходимые изменения и дополнения в списки узлов и ветвей.
4. Рассчитываются напряжения ветвей по формуле:  $U_i = \varphi_K - \varphi_N$ ,

где  $N$  и  $K$  – номера начала и конца ветви.

Определяются токи всех ветвей системы, за исключением ветви источника, по формуле (4).

Определяется для каждой ветви, коэффициент  $h$  согласно (7) и выбирается минимальный  $h$ .

Можно принять  $C_r = 1$ ,  $\Delta U = 1$ .

Если нет корректных решений для всех решаемых уравнений, пути не существует, или путь найден и вычисление прерывается.

5. Вычисляются токи невязки каждого узла путем алгебраического суммирования токов ветвей, связанных с рассматриваемым узлом. Если узел является началом ветви, то ток записывается со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус. Для ветви источника тока, если узел является началом ветви, то ток записывается со знаком минус, в противном случае – со знаком плюс.
6. Прежние значения узловых потенциалов замещаются вычисленными по формуле (6).
7. Если ток невязки каждого узла равен нулю, то кратчайший путь определен, в противном случае перейти к п. 3.
8. Окончание расчета. Кратчайший путь определяется по набору ветвей, в которых ток не равен нулю.

На Рис. 2 изображена модель сети, на примере которой будет показан процесс моделирования.

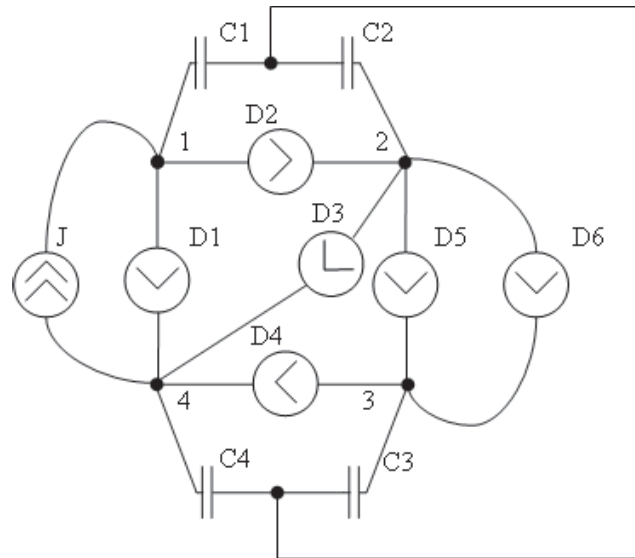


Рис. 2 - Электрическая схема сети

Промежуточные результаты реализации рассмотренного алгоритма на заданной схеме сети представлены в Таблице1, где значения запирающего напряжения в вольтах для D1 90, D2 40, D3 60, D4 85, D5 70, D6 45,  $J=1A$ .  $\varphi$  и  $\Delta I$  – значения потенциалов и разностей токов узлов в вольтах и амперах.

Таблица1.- Результаты реализации алгоритма

i	h	$\varphi_4$	$\Delta I_4$	$\varphi_1$	$\Delta I_1$	$\varphi_2$	$\Delta I_2$	$\varphi_3$	$\Delta I_3$
0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0
1	41	-41	-1	41	0	0	1	0	0
2	1	-42	-1	41	1	-1	0	0	0
3	4	-46	0	45	-1	1	1	0	0
4	1	-46	-1	44	0	2	1	0	0
5	2	-48	0	44	0	4	0	0	0

### Выводы

В работе предложена простая и компактная электрическая модель взвешенного ориентированного графа для поиска в нем кратчайшего пути и приведена иллюстрация ее эффективности. Модель универсальна и может применяться для различных целей, в частности – в компонентах автономного управления движением роботов.

Изменения структуры графа в процессе вычисления не приводят к существенной потере быстродействия.

### Литература

- [1] Хмельник С.И. Электрические цепи постоянного тока для моделирования и управления. Алгоритмы и аппаратура. Израиль; Россия, 2006. 177 с.
- [2] Деннис Дж. Б. Математическое программирование и электрические цепи. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 214 с.
- [3] Шутеев Э. И. Моделирование нелинейных электрических цепей постоянного тока для решения задачи поиска кратчайшего пути / Э.И. Шутеев, Д.О. Белокопытов, Д.Ф. Димитров Тр. Одес. политехн. ун-та. 2009. Вып 2(32). С. 88-91 .
- [4] Атабеков Г.И. Основы теории цепей. СПб.: Издательство «Лань», 2009. 432 с.
- [5] Шеин А.Б., Лазарева Н.М. Методы проектирования электронных устройств. М.: Инфра-Инженерия, 2011. 456 с.

### References

- [1] Hmelnik S.I. Elektricheskie tsepi postoyannogo toka dlya modelirovaniya i upravleniya. Algoritmy i apparatura. Izrail; Rossiya, 2006. 177 p.
- [2] Dennis Dj. B. Matematicheskoe programmirovaniye i elektricheskie tsepi. M.: Izd-vo inostr. lit., 1961. 214 p.
- [3] SHuteev E. I. Modelirovaniye nelineynykh elektricheskikh tsepey postoyannogo toka dlya resheniya zadachi poiska kratchayshego puti / E.I. SHuteev, D.O. Belokopyitov, D.F. Dimitrov Tr. Odes. politehn. un-ta. 2009. Vyip 2(32). pp. 88-91 .
- [4] Atabekov G.I. Osnovyi teorii tsepey. SPb.: Izdatelstvo «Lan», 2009. 432 p.
- [5] SHEin A.B., Lazareva N.M. Metodyi proektirovaniya elektronnykh ustroystv. M.: Infra-Injeneriya, 2011. 456 p.