© Beletsky A., Navrotskyi D. Synthesis of discrete Walsh-similarly sequention functions of eighth degree // Ukrainian Scientific Journal of Information Security, 2016, vol. 22, issue 2, p. 163-174.

СИНТЕЗ СИСТЕМ ДИСКРЕТНЫХ УОЛША-ПОДОБНЫХ СЕКВЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ ВОСЬМОГО ПОРЯДКА

Анатолий Белецкий, Денис Навроцкий

Национальный авиационный университет, Украина

БЕЛЕЦКИЙ Анатолий Яковлевич, д.т.н.

Год и место рождения: 1939 г., Новосибирская обл., РФ.
Образование: Киевский институт гражданского воздушного флота (с 2000 года – Национальный авиационный университет), 1962 год.
Должность: профессор кафедры электроники с 2008 года.
Научные интересы: криптография, помехоустойчивое кодирование, спектральный анализ.
Публикации: более 350 научных публикаций, в их числе монографии, учебные пособия, статьи, авторские свидетельства и патенты на изобретения.
E-mail: abelnau@ukr.net

НАВРОЦКИЙ Денис Александрович

Год и место рождения: 1982 г., Киев, Украина.
Образование: Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический иститут», 2007 год. Национальный авиационный университет, 2009 год.
Должность: асистент кафедры электроники с 2013 года.
Научные интересы: информационная безопасность, криптография, стеганография.
Публикации: более 40 научных публикаций, в их числе научные статьи, тезисы докладов, авторские свидетельства и патенты на изобретения.
E-mail: navrotskyi@nau.edu.ua

Аннотация. *В данной статье предложен алгоритм построения в пространстве изображений дискретных (0,1)-секвентных функций, составляющих полные симметричные системы ортогональных эквидистантных функций восьмого порядка. Дискретные секвентные функции образуются в результате замены их кусочно-постоянных значений +1 или -1 во временной области (из пространства оригиналов) соответственно числовыми значениями 0 и 1 в пространстве изображений. К Уолша-подобным относим такие (0,1)-секвентные функции, в которых число нулей и единиц в каждой половине интервала определения совсем не обязательно является одинаковым, как это имеет место в изображениях функций Уолша (за исключением функции, левая половина которой заполнена нулями, а правая – единицами). Методом направленного перебора каждая из 30 сформированных полных групп эквидистантных секвент разворачивается, как и группа классических функций Уолша восьмого порядка, в 28 симметричных систем секвентных функций.*

Ключевые слова: *секвентные функции и системы, полнота систем ортогональных функций, образующие элементы систем, метод направленного перебора секвентных функций.*

Введение

До недавнего времени теория и техника спектрального анализа сигналов была ориентирована в основном на сигналы синусоидальных волн. Наряду с ними широкое применение в системах передачи информации, в радиолокации и в других направлениях исследований и приложений находят волны (сигналы, функции) несинусоидальной формы. Типичным примером несинусоидальных функций являются функции Уолша [1], отличительная особенность которых состоит в том, что в пространстве оригиналов на интервале определения от 0 до $N = 2^n$, где n – натуральное число, разбитого на N эквидистантных отрезков, функции Уолша принимают на этих отрезках времени кусочно-постоянные значения, равные $+1$ или -1. На указанном интервале может быть построено N взаимно ортогональных функций k-го порядка, $k = \overline{0, N-1}$.

Спектральный анализ дискретных сигналов в большинстве случаев строится на основе базисов *дискретных экспоненциальных функций*, образуемых временной дискретизацией комплексно-значных гармонических сигналов, представляющих собой совокупность синусоидальных и косинусоидальных функций. Известно [2], что к базисам *дискретного преобразования Фурье* (ДПФ), как и к базисам *быстрого преобразования Фурье* (БПФ), предъявляются ряд требований, важнейшие из которых состоят в том, что, во-первых, форма базисных функций преобразования желательна быть максимально близкой к форме анализируемого сигнала. И, во-вторых, системы базисных функций должны поддерживать такое

быстродействие процессоров ДПФ, которое обеспечивает обработку сигналов в реальном времени.

Таким образом, выбор системы базисных функций определяется требованиями удобства вычислений и, в конечном счёте, трудоёмкостью алгоритмов реализации искомого преобразования. Исходя из этих соображений, применение вещественных базисов систем Уолша и их расширения – Уолша-подобных секвентных систем (определение таких систем приводится далее в тексте) представляется актуальным и перспективным для цифровой обработки широкополосных сигналов к числу которых относятся, например, видеосигналы, передаваемые с борта беспилотного летательного аппарата (БПЛА). Ссылка на БПЛА сделана здесь только лишь потому, что как раз для бортового оборудования таких аппаратов предназначены алгоритмы и средства спектральной обработки видеосигналов с целью их криптографической зашиты от несанкционированного доступа в предположении, что в качестве базисов БПФ сигналов будут использованы системы Уолша-подобных секвентных функций.

Сведенные вместе и пронумерованные ортогональные функции Уолша различных порядков образуют систему. Под *порядком* k *функций Уолша*, введем для них обозначение $\boldsymbol{W}(k,t)$, где t – непрерывное или дискретное нормированное время $t=\overline{0,\ N-1}$ (аргумент функции), обычно понимают место (номер строки, начиная с верхней нулевой, в матричном представлении), которое занимает функция в системе. В свою очередь, *порядок* N *системы Уолша* $\boldsymbol{W}$ есть число функций Уолша, включаемых в систему. Пример системы функций Уолша $\boldsymbol{H}$ восьмого порядка непрерывного аргумента t, упорядоченной по Адамару (исторически первой системы Уолша) и обозначаемых как $\boldsymbol{h}(k,t)$, показан на рис. 1.

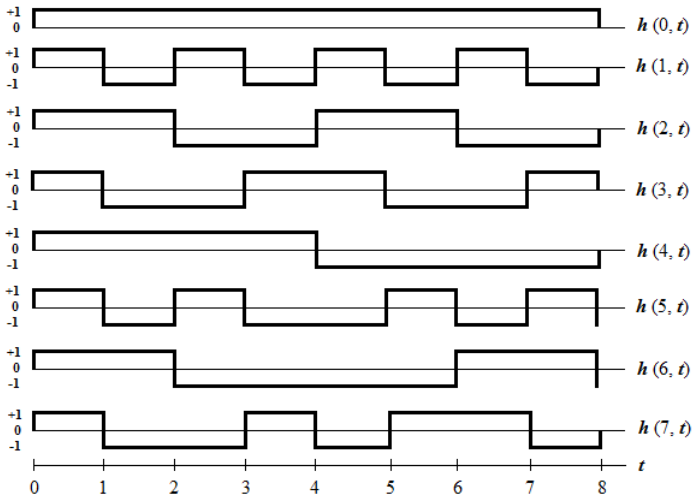

Рис. 1. Системы функций Уолша-Адамара

Заменяя кусочно-постоянные функции $\boldsymbol{W}(k,t)$ непрерывного аргумента t их дискретными значениями $+1$ и -1, приходим к матричным формам систем Уолша. Ниже приведена последовательность матриц $\boldsymbol{P}_N$ первого (вырожденного), второго и четвертого порядков систем Уолша, упорядоченных по Пели:

$$\boldsymbol{P}_1=\left[+1\right];\quad \boldsymbol{P}_2=\left\{p(k,t)\right\}=\begin{array}{c}\\0\\1\\k\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}0 & 1\end{array}\ t\\\begin{bmatrix}+1 & +1\\ +1 & -1\end{bmatrix}\end{array};\quad \boldsymbol{P}_4=\left\{p(k,t)\right\}=\begin{array}{c}\\0\\1\\2\\3\\k\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}0 & 1 & 2 & 3\end{array}\ t\\\begin{bmatrix}+1 & +1 & +1 & +1\\ +1 & +1 & -1 & -1\\ +1 & -1 & +1 & -1\\ +1 & -1 & -1 & +1\end{bmatrix}\end{array}. \qquad (1)$$

Системы функций Уолша-Адамара непрерывного аргумента t, например, такие, как на рис. 1, а также дискретные формы систем, примером которых являются матрицы систем Уолша-Пэли (1), принадлежат *пространству оригиналов* (временному пространству). Более удобным способом представления этих систем является изображение их в виде квадратных матриц, в которых каждая строка – это функция Уолша, причем для простоты вместо значений элементов $+1$ и -1 записывают только их знаки $+$ и $-$. Для примера, система функций Уолша-Пэли восьмого порядка, играющая важнейшую роль в задачах синтеза базисов Уолша, имеет вид:

$$\boldsymbol{P}_8 = \{p(k,t)\} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \end{array} \\ \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{bmatrix} \end{array}. \quad (2)$$

Матрицы Пэли $\boldsymbol{P}_N$ (1) или (2) при произвольном, но двоично-степенном порядке $N = 2^n$, $n = 1, 2, \ldots,$ можно построить непосредственно с помощью простого мнемонического правила [3], суть которого сводится к следующим этапам преобразований. На начальном этапе формирования $\boldsymbol{P}_N$ каждая строка предыдущей матрицы Пэли $\boldsymbol{P}_{N/2}$ записывается дважды, а затем к первой из них (строке) справа приписываются те же самые элементы, т.е. элементы правой половины строки *повторяют* элементы левой половины строки, а ко второй – противоположные (*комплементарные*) элементы. Достаточно просто приведенный способ формирования систем Уолша-Пэли реализуется в *пространстве изображений* посредством кодового дерева, представленного на рис. 2.

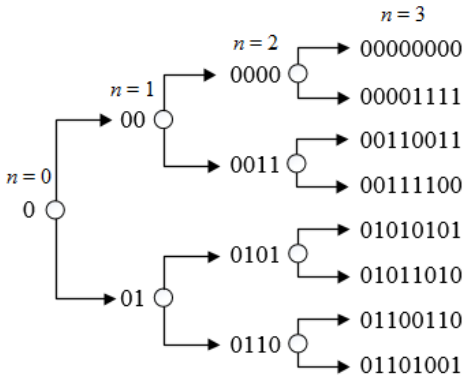

Рис. 2. Повторно-комплементарный алгоритм синтеза системы функций Уолша-Пэли

К пространству изображений приходим заменой дискретных значений функций Уолша $+1$ и -1 в матрицах типа (1), или знаков $+$ и $-$ в матрицах типа (2) из пространства оригиналов числами 0 и 1 для пространства изображений. Матрица системы Уолша-Пэли восьмого порядка в пространстве изображений представлена ниже следующим соотношением:

$$\boldsymbol{P}_8 = \{p(k,t)\} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}. \quad (3)$$

Перевод матриц Уолша из пространства оригиналов, например, матрицы (2), в пространство изображений, – матрица (3), сопровождается изменением операции поэлементного умножения $\otimes$ двух дискретных функций Уолша $\boldsymbol{u} = \{u_i\}$ и $\boldsymbol{v} = \{v_j\}$, $i, j = \overline{0, N-1}$, на операцию их поэлементного сложения $\oplus$ по модулю 2. Такие операции выполняются, в частности, при вычислении скалярного произведения $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ этих функций с целью подтверждения их ортогональности, которое задается условием $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$.

Обзор источников и цель исследования

Секвентный анализ, представляющий собой обобщение и одновременно альтернативу спектрального гармонического анализа, сформировался в самостоятельную дисциплину на рубеже 70-80-х годов XX столетия в первую очередь благодаря оригинальным результатам, полученными в работах проф. Х. Хармута [4, 5]. Успехи секвентного анализа базируются на том, что вместо синусоидальных сигналов и волн стали использовать функции Уолша и другие несинусоидальные сигналы. К настоящему времени появилось достаточно большое число публикаций, посвященных теории и применению секвентного анализа в различных направлениях науки и техники, в числе которых выделим учебное пособие [6], диссертации [7, 8], журнальные статьи [9, 10] и др.

Цель данной статьи состоит в разработке алгоритмов синтеза Уолша-подобных дискретных $(0,1)-$ секвентных функций, образующих полные

симметричные системы ортогональных эквидистантных функций $\boldsymbol{s}(k,t)$, $k,t=\overline{0,N-1}$, на примере систем восьмого порядка, т. е. для $N=2^3$.

Полноту системы дискретных секвентных функций следует понимать в том плане, что её (систему) нельзя дополнить на интервале определения $\overline{0,N-1}$ ни одной новой функцией $\tilde{\boldsymbol{s}}(k,t)$, которая была бы ортогональна одновременно ко всем другим функциям $\boldsymbol{s}_i(k,t)$, $i=\overline{0,N-1}$, входящими в систему. *Эквидистантность* $N-$*битных секвентных функций* означает, что любая пара функций системы, например, функции $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$, находятся, как и функции Уолша, на расстоянии Хэмминга d, равном $N/2$, т. е. $d(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2)=N/2$.

Общие соотношения

Дискретные Уолша-подобные секвентные функции образуются, как уже было отмечено ранее, заменой кусочно-постоянных значений функций $+1$ или -1 во временной области (в пространстве оригиналов) соответственно числовыми значениями 0 и 1 в пространстве изображений. К *Уолша-подобным* будем относить такие $(0,1)$ – секвентные функции, в которых число нулей и единиц в каждой половине интервала определения совсем не обязательно является одинаковым, как это имеет место в изображениях функций Уолша (за исключением функции, левая половина которой заполнена нулями, а правая – единицами).

Термин *системы Уолша-подобные секвентные функции* вынесен в заголовок статьи, подчеркивая, тем самым, что существуют и другие несинусоидальные формы секвентных функций. Поскольку в работе рассматриваются исключительно *только* Уолша-подобные секвентные функции из пространства изображений, в дальнейшем для краткости будем называть их также *секвентными функциями*, или еще проще – *секвентами*. Таким образом, кроме нулевого байта, единственным типом двоичных (бинарных) кодовых комбинаций (кодов), рассматриваемых в рамках данной статьи, являются равномерные (коды одинаковой длины) восьмибитные секвентные функции (секвенты) с весом (числом единиц в коде), равным четырем.

Сформируем полное множество секвентных функций восьмого порядка, включая в состав множества лишь те функции, которые начинаются с нуля; т. е. в старшем (левом) разряде каждой секвенты располагается цифра 0, а в оставшихся младших семи разрядах размещаются три нуля и четыре единицы. Следовательно, полный набор таких ненулевых секвентных функций L_8 содержит 35 секвент восьмого порядка, количество которых определяется числом сочетаний из семи по три, т. е.:

$$L_8=\binom{7}{3}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}=35\,.$$

Все эти секвентные функции сведены (вместе с нулевой секвентой) в табл. 1.

Множество секвентных функций восьмого порядка Таблица 1

№	Номер разряда								№	Номер разряда							
	0	1	2	3	4	5	6	7		0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	19	0	0	1	1	1	0	0	1
2	0	1	1	1	0	1	0	0	20	0	1	1	0	0	1	0	1
3	0	1	1	0	1	1	0	0	21	0	1	0	1	0	1	0	1
4	0	1	0	1	1	1	0	0	22	0	0	1	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	1	1	0	0	23	0	1	0	0	1	1	0	1
6	0	1	1	1	0	0	1	0	24	0	0	1	0	1	1	0	1
7	0	1	1	0	1	0	1	0	25	0	0	0	1	1	1	0	1
8	0	1	0	1	1	0	1	0	26	0	1	1	0	0	0	1	1
9	0	0	1	1	1	0	1	0	27	0	1	0	1	0	0	1	1
10	0	1	1	0	0	1	1	0	28	0	0	1	1	0	0	1	1
11	0	1	0	1	0	1	1	0	29	0	1	0	0	1	0	1	1
12	0	0	1	1	0	1	1	0	30	0	0	1	0	1	0	1	1
13	0	1	0	0	1	1	1	0	31	0	0	0	1	1	0	1	1
14	0	0	1	0	1	1	1	0	32	0	1	0	0	0	1	1	1
15	0	0	0	1	1	1	1	0	33	0	0	1	0	0	1	1	1
16	0	1	1	1	0	0	0	1	34	0	0	0	1	0	1	1	1
17	0	1	1	0	1	0	0	1	35	0	0	0	0	1	1	1	1

Сопоставим каждой ненулевой секвентной функции из табл. 1 набор секвент, отстоящих от первичных, или *образующих секвент*, расположенных в диагональных элементах рис. 3, на расстоянии Хэмминга d, равном $N/2$, т.е. $d=4$. В левом столбце таблицы указаны номера образующих секвент, а в верхней строке – номера секвент, отстоящих от образующих на расстоянии Хэмминга, равном четырем.

Условимся придерживаться в дальнейшем таких обозначений: строчной буквой $\boldsymbol{s}_j$ будем обозначать конкретную $j-$ю секвенту, $j=\overline{0,L_N}$, представляющую собой $N-$битный вектор (в данной статье это байт), начинающийся с цифры 0, а прописной буквой $\boldsymbol{S}_i-$ совокупность всех секвент, расположенных в затененных элементах $i-$й строки таблицы на рис. 3, $i=\overline{1,35}$, включая не показанную

на рис. 3 нулевую секвенту $\boldsymbol{s}_0$. Пусть, кроме того, $\hat{\boldsymbol{s}}_i$ – секвента, образующая j – ю полную группу функций, для которой (группы) введем символ $\boldsymbol{SF}_{i,j}$ (***S**equence **F**ull*).

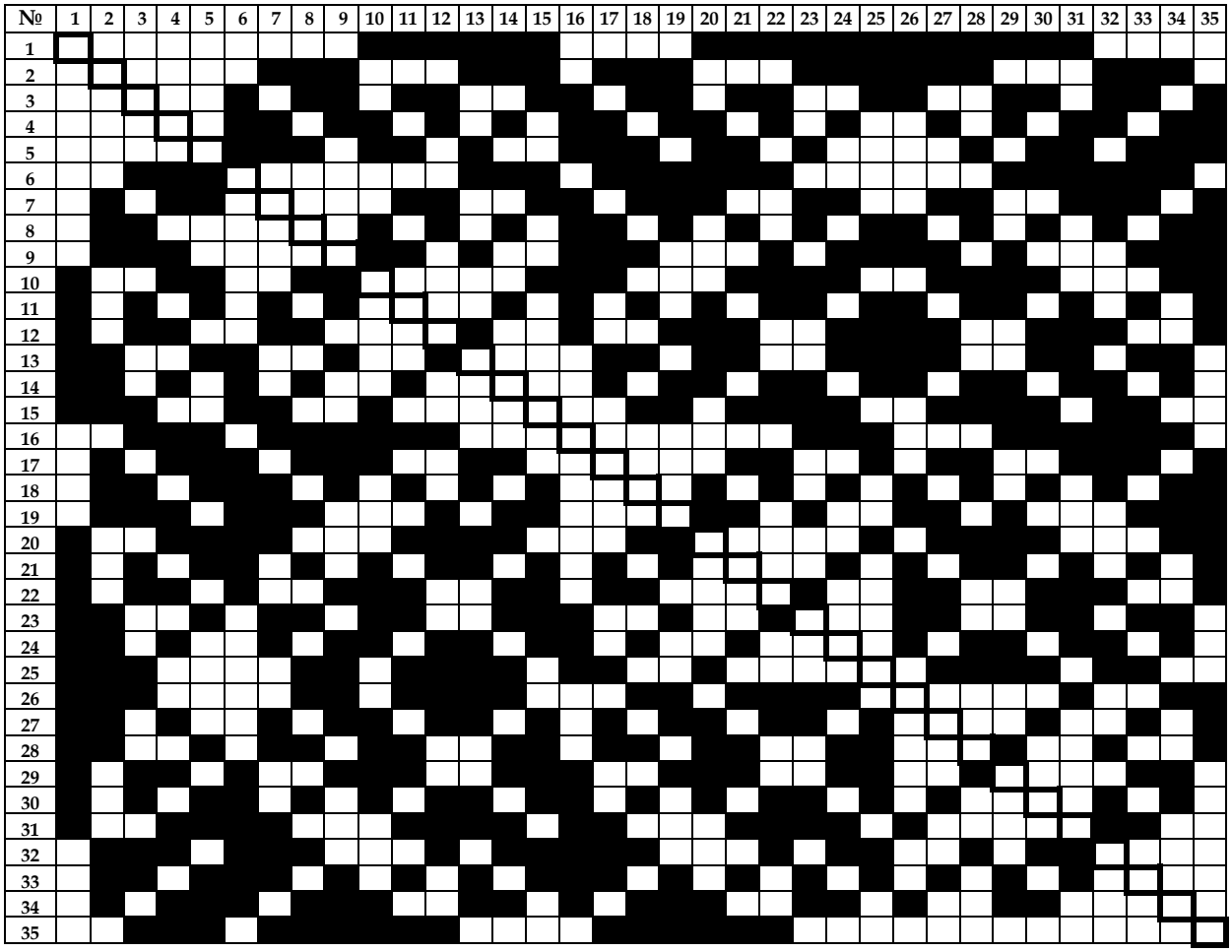

Рис. 3. Множества секвентных функций, удаленных от образующих секвент на расстоянии Хэмминга $d = 4$

Обратим внимание на такие особенности таблицы на рис. 3. Во-первых, таблица является симметричной относительно главной диагонали. Во-вторых, каждая строка таблицы кроме *образующей секвенты* $\hat{\boldsymbol{s}}_k$ (светлого диагонального элемента таблицы, выделенного жирной рамкой) включает 18 секвент $\boldsymbol{s}_j$, отстоящих от образующего элемента $\hat{\boldsymbol{s}}_k$ на расстоянии Хэмминга $d(\hat{\boldsymbol{s}}_k, \boldsymbol{s}_j) = 4$. И, наконец, в-третьих, все множество $\boldsymbol{\Omega}$ строк $\boldsymbol{S}_i$ таблицы может быть разбито на 10 непересекающихся подмножеств $\boldsymbol{\Omega}_l$, $l = \overline{1,10}$, причем l – е подмножество включает подряд стоящие строки $\boldsymbol{S}_i$, содержащие одинаковое число n_l секвент, расположенных слева об образующих секвент $\hat{\boldsymbol{s}}_k$. Например, подмножество $\boldsymbol{\Omega}_1$ порождается секвентами $\hat{\boldsymbol{s}}_j$, $j = \overline{1,5}$, при этом $n_1 = 0$; второе подмножество $\boldsymbol{\Omega}_2$ формируют секвенты $\hat{\boldsymbol{s}}_j$, $j = \overline{6,9}$, для которых $n_2 = 4$ и т. д. Сведения о числовых характеристиках подмножеств $\boldsymbol{\Omega}_l$ содержатся в табл. 2.

Как показали результаты элементарных расчетов, образующие секвенты $\hat{\boldsymbol{s}}_k$ вместе с нулевой секвентной функцией $\boldsymbol{s}_0$ и 18 секвентами, находящимися в строках таблицы на рис. 3, формируют по шесть полных групп (для краткости будем далее называть их также просто *группами*) эквидистантных кодовых комбинаций. Это означает, что каждой строке табл. 1 соответствует шесть групп, в состав которых входят по восемь эквидистантных секвент.

Группы секвентных эквидистантных функций $\boldsymbol{SF}_{i,j}$, формируемые образующими секвентами $\hat{\boldsymbol{s}}_i$ подмножества $\boldsymbol{\Omega}_1$, приведены в табл. 3. Секвенты $\boldsymbol{s}_j$, входящие в группы $\boldsymbol{SF}_{i,j}$, отмечены серыми клетками в строках табл. 3, а соответствующие им номера секвентных функций находятся в черных строках таблицы, расположенными сверху непосредственно над секвентами, при этом элемент строки, содержащий номер i образующей секвенты $\hat{\boldsymbol{s}}_i$, осветлен. В левом столбце табл. 3 как раз и указаны номера $j = \overline{1,6}$ групп $\boldsymbol{SF}_{i,j}$, формируемых секвентами $\hat{\boldsymbol{s}}_i$, $i = \overline{1,5}$, составляющими подмножество $\boldsymbol{\Omega}_1$.

Состав подмножеств $\mathbf{\Omega}_l$ секвентных функций Таблица 2

	Номер подмножества секвент (l)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ секвент $\hat{\boldsymbol{s}}_k$	1-5	6-9	10-12	13-15	16-19	20-22	23-25	26-28	29-31	31-35
n_l	0	3	5	6	9	11	12	15	16	18

Состав групп, формируемых образующими секвентами подмножества $\mathbf{\Omega}_1$ Таблица 3

Группы	Секвенты групп																			
$\boldsymbol{SF}_{1,j}$	0	1	10	11	12	13	14	15	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
$\boldsymbol{SF}_{2,j}$	0	2	7	8	9	13	14	15	17	18	19	23	24	25	26	27	28	32	33	34
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
$\boldsymbol{SF}_{3,j}$	0	3	6	8	9	11	12	15	16	18	19	21	22	25	26	29	30	32	33	35
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
$\boldsymbol{SF}_{4,j}$	0	4	6	7	9	10	12	14	16	17	19	20	22	24	27	29	31	32	34	35
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
$\boldsymbol{SF}_{5,j}$	0	5	6	7	8	10	11	13	16	17	18	20	21	23	28	30	31	33	34	35
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				

Табл. 3 содержит все группы $\boldsymbol{SF}$ эквидистантных функций, порождаемые образующими элементами $\hat{\boldsymbol{s}}_i$ первого подмножества секвент $\mathbf{\Omega}_1$, для которых характерна та особенность, что в строках таблицы на рис. 3 слева от секвент $\hat{\boldsymbol{s}}_1 - \hat{\boldsymbol{s}}_5$ нет ни одной другой секвенты $\boldsymbol{s}$. 30 групп, сведенных в табл. 3, и соответствующие подмножеству секвентных функций $\mathbf{\Omega}_1$, составляют *полный набор групп секвентных эквидистантных байт-функций*. Это означает, в частности, что группа функций, образуемая какой угодно секвентой $\hat{\boldsymbol{s}}_j$, $6 \le j \le 35$, поглощается одной из групп $\boldsymbol{SF}_{i,j}$ подмножества $\mathbf{\Omega}_1$.

Подтвердим высказанное утверждение конкретными примерами. С этой целью выберем, например, образующие секвенты $\hat{\boldsymbol{s}}_{17}$ и $\hat{\boldsymbol{s}}_{33}$, а соответствующие им полные группы эквидистантных функций представлены в табл. 4. Из сопоставления данных легко убеждаемся в том, что любая группа из табл. 4 находится в одной из строк табл. 3.

Состав групп секвентных функций, формируемых элементами $\hat{\boldsymbol{s}}_{17}$ и $\hat{\boldsymbol{s}}_{33}$ Таблица 4

Группы	Секвенты групп																			
$\boldsymbol{SF}_{17,j}$	0	2	4	5	6	8	9	10	13	14	**17**	21	22	25	27	28	31	32	33	35
1	■	■				■				■	■			■		■		■		
2	■	■					■		■		■			■	■				■	
3	■		■		■					■	■		■				■	■		
4	■		■				■	■			■		■		■					■
5	■			■	■				■		■	■					■		■	
6	■			■		■		■			■	■				■				■
$\boldsymbol{SF}_{33,j}$	0	2	3	5	6	7	9	11	13	15	16	17	19	21	23	25	27	29	31	**33**
1	■	■				■				■			■		■		■			■
2	■	■					■		■			■				■	■			■
3	■		■		■					■			■	■				■		■
4	■		■				■	■			■					■		■		■
5	■			■	■				■			■		■					■	■
6	■			■		■		■			■				■				■	■

Соответствие между группами $\boldsymbol{SF}_{17,j}$, $\boldsymbol{SF}_{33,j}$, $j=\overline{1,6}$, и группами (i,j) подмножества $\boldsymbol{\Omega}_1$ показано в табл. 5.

Состав групп секвентных функций, формируемых элементом $\hat{\boldsymbol{s}}_{17}$ и $\hat{\boldsymbol{s}}_{33}$ Таблица 5

$\boldsymbol{SF}_{17,j}$	1	2	3	4	5	6
(i,j)	2,3	2,5	4,1	4,6	5,1	5,6
$\boldsymbol{SF}_{33,j}$	1	2	3	4	5	6
(i,j)	2,2	2,5	3,2	3,5	5,1	5,3

Аналогично устанавливается избыточность групп, порождаемых секвентами $\hat{\boldsymbol{s}}_k$ для всех $6 \le k \le 35$.

Обратим внимание на мозаику прямоугольных площадок размером 20х6 (табл. 3), в которых размещены группы эквидистантных секвент подмножества $\boldsymbol{\Omega}_1$. Раскрас всех площадок оказался одинаковым, что обеспечивает возможность существенно снизить трудоемкость вычисления состава групп $\boldsymbol{SF}_{i,j}$ подмножества $\boldsymbol{\Omega}_1$. В самом деле, предположим, что составлена мозаика площадки для групп $\boldsymbol{SF}_{1,j}$, для которых образующей является секвента $\hat{\boldsymbol{s}}_1$. Для того, чтобы вычислить секвенты каких-либо групп $\boldsymbol{SF}_{i,j}$, порождаемых образующей секвентой $\hat{\boldsymbol{s}}_i$, $i \ne 1$, достаточно заменить верхнюю строчку $\boldsymbol{S}_1$ в площадке групп $\boldsymbol{SF}_{1,j}$ строкой $\boldsymbol{S}_i$, которая составляется из секвент $i-$й строки таблицы на рис. 3, исключая все её (строки) пустые элементы.

Существуют определенные закономерности также и для площадок, отвечающих подмножествам $\boldsymbol{\Omega}_j$, $j \ne 1$, но они особого интереса не представляют, т. к. не образуют групп, отсутствующих в подмножестве $\boldsymbol{\Omega}_1$.

Синтез симметричных секвентных систем

В приложениях зачастую интересными могут оказаться не сами по себе полные системы эквидистантных секвентных функций, а их некоторые упорядочения, такие, например, как системы функций Уолша, образующие симметричные базисы, используемые для спектрального представления сигналов или решения других задач обработки дискретных сигналов. В данном разделе работы как раз и рассматривается задача построения (синтеза) симметричных секвентных базисов из полной совокупности эквидистантных секвентных групп $\boldsymbol{SF}_{i,j}$, исходная последовательность $(0,1)-$секвент которых совсем не обязательно представима в виде симметричной матрицы.

Возможны различные подходы к решению поставленной задачи. В основу синтеза *симметричных базисов секвентных функций* положим *метод направленного перебора базисных функций* [11], который в отличие от метода прямого перебора, в криптографии называемого *лобовой атакой*, позволяет заранее отбросить невыгодные варианты поиска решения. Суть алгоритма направленного перебора изложим на примере синтеза симметричных секвентных базисных систем (матриц) восьмого порядка, выбрав из табл. 3 в качестве исходного набора секвент полную группу:

$$\boldsymbol{SF}_{1,1} = \left\{ \boldsymbol{s}_0, \hat{\boldsymbol{s}}_1, \boldsymbol{s}_{10}, \boldsymbol{s}_{15}, \boldsymbol{s}_{21}, \boldsymbol{s}_{24}, \boldsymbol{s}_{28}, \boldsymbol{s}_{29} \right\} .$$

Воспользовавшись данными табл. 1, составим матрицу из элементов группы $\boldsymbol{SF}_{1,1}$, обозначив её $\boldsymbol{S}(k,t)$, которая явно не является симметрической:

$$\boldsymbol{S}(k,t)=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}0&1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\ \ \to t\\ \begin{matrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\ \downarrow k\end{matrix} & \begin{matrix}0\\1\\10\\15\\21\\24\\28\\29\\ \downarrow n\end{matrix}\ \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&1&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&1&0&1\\0&0&1&1&0&0&1&1\\0&1&0&0&1&0&1&1\end{bmatrix}\end{array}. \quad (4)$$

В матрице (4) параметр k – это порядок базисной функции, совпадающий с порядковым номером функции в системе; t – аргумент функции (дискретное нормированное время), а n – номер секвенты в табл. 1.

В любой симметричной базисной секвентной системе в пространстве изображений, обозначим ее $\boldsymbol{S}_i(k,t)$, $i=1,2,\ldots,$ верхняя (нулевая) строчка матрицы преобразования (базисная функция нулевого порядка) состоит из одних нулей и не может быть переставлена ни на какую другую строчку, так как это приводит к потере симметричности матриц $\boldsymbol{S}_i(k,t)$. В самом деле, поскольку все секвенты начинаются с нуля, то левый столбец матрицы по определению является нулевым, т. е. состоит из одних нулей. По этой причине нулевая строка матрицы «обречена» занимать её верхнюю строчку, т. к. в противном случае нарушается условие симметрии, согласно которому: в любой симметричной матрице каждый её столбец должен совпадать с соответствующей (по номеру) строкой матрицы.

В следующей (первой) строке матрицы $\boldsymbol{S}_i(k,t)$ может находиться любая из оставшихся строк (базисных функций) матрицы (4). Пусть в качестве таковой выбрана базисная функция первого порядка, т. е. секвента $\boldsymbol{s}_1$, в результате чего получим первые две строчки и два столбца формируемой матрицы $\boldsymbol{S}_1(k,t)$, а именно:

$$\boldsymbol{S}_1(k,t)=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}0&1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\ \ \to t\\ \begin{matrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\ \downarrow k\end{matrix} & \begin{matrix}0\\1\\\mathbf{10},21,29\\\\\\\\\\ \downarrow n\end{matrix}\ \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&1&0&0&0\\(0&1)&&&&&&\\0&1&&&&&&\\0&1&&&&&&\\0&0&&&&&&\\0&0&&&&&&\\0&0&&&&&&\end{bmatrix}\end{array}. \quad (5)$$

Возможности выбора очередной (второй) строки ограничены условием сохранения симметричности матрицы. Для того, чтобы это условие соблюсти, из оставшихся строк матрицы (4) нужно выбрать только такие, начальные элементы которых совпадают с начальными элементами второй строки матрицы (5), заключенными в круглые скобки. Выделенным скобками элементам, а это пара цифр 0 и 1, отвечают секвенты $\boldsymbol{s}_{10}$, $\boldsymbol{s}_{21}$ и $\boldsymbol{s}_{29}$ матрицы (4), номера которых (10, 21, и 29) выписаны в (5) слева от круглых скобок. Разместив во второй строке матрицы $\boldsymbol{S}_1(k,t)$ базисную функцию (секвенту) $\boldsymbol{s}_{10}$ (номер этой секвенты отмечен в матрице $\boldsymbol{S}_1(k,t)$ жирным шрифтом) и, продолжая аналогичным способом процедуру синтеза, приходим к симметричному базису:

$$\boldsymbol{S}_1(k,t)=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}0&1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\ \ \to t\\ \begin{matrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\ \downarrow k\end{matrix} & \begin{matrix}0\\1\\\mathbf{10},21,29\\\mathbf{21},29\\29\\28\\24\\15\\ \downarrow n\end{matrix}\ \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&0&1&1\\0&0&1&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1&1&1&0\end{bmatrix}\end{array}. \quad (6)$$

Обратимся к матрице (6). В этой матрице на месте третьей строки можно использовать не только секвенту $\boldsymbol{s}_{21}$, но и секвенту $\boldsymbol{s}_{29}$ и, как результат дальнейших подстановок, получим:

$$\boldsymbol{S}_2(k,t)=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}0&1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\ \to t\\ \begin{matrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\ \downarrow k\end{matrix} & \begin{matrix}0\\1\\\mathbf{10},21,29\\29\\21\\24\\28\\15\\ \downarrow n\end{matrix}\end{array}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1&0&1&1\\0&1&0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&1&0&1\\0&0&1&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&1&1&0\end{bmatrix}. \quad (7)$$

На примере матриц (6) и (7), убеждаемся в том, что в двоичном пространстве изображений множество секвентных функций базиса замкнуто относительно операции поразрядного сложения по модулю 2, тогда как в пространстве оригиналов секвентные функции базисных матриц замкнуты относительно операции поэлементного умножения функций.

В том случае, когда на каком-либо этапе синтеза возникает *тупиковая ситуация*, а это имеет место, если выделенной круглыми скобками последовательности двоичных знаков не отвечает ни одна из секвент $\boldsymbol{s}_i$ выбранной группы $\boldsymbol{SF}_{1,1}$ (пример подобной ситуации показан на рис. 4), поступают следующим образом. В строке синтезируемой матрицы, содержащей не менее двух альтернативных номеров секвент $\boldsymbol{s}_i$ и, кроме того, являющейся ближайшей к «тупиковой» строке, левую секвенту заменяют соседней с ней справа, что может (или не может) разрешить складывающуюся тупиковую ситуацию. Если предлагаемой заменой проблема «тупика» все ещё сохраняется, то или подбирают другие возможные замены секвент, или переходят к очередной секвентной функции первого порядка:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}0&1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\ \to t\\ \begin{matrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\ \downarrow k\end{matrix} & \begin{matrix}0\\10\\\mathbf{21},29\\28\\(0\\\\\\\\ \downarrow n\end{matrix}\end{array}\begin{matrix}0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\0&0&1&1&0&0&1&1\\0&0&1&0)\\1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix}.$$

Рис. 4. Иллюстрация «тупиковой ситуации»

В рассматриваемой примере тупиковая ситуация успешно разрешается, что приводит к симметричному базису. На основании рассмотренного алгоритма направленного перебора базисных функций приходим к полному набору, состоящему из 28 перестановок секвент $\boldsymbol{s}_i$ группы $\boldsymbol{SF}_{1,1}$ (табл. 6), каждая из которых порождает симметричную систему секвентных функций (ортогональный базис, обладающий свойством полноты):

$$\boldsymbol{S}_8(k,t)=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}0&1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\ \to t\\ \begin{matrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\ \downarrow k\end{matrix} & \begin{matrix}0\\10\\29\\15\\28\\21\\1\\24\\ \downarrow n\end{matrix}\end{array}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&1&1&1&0\\0&0&1&1&0&0&1&1\\0&1&0&1&0&1&0&1\\0&1&1&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&1&1&0&1\end{bmatrix}.$$

Классические функций Уолша занимают в табл. 3 её последнюю строчку, образуя 30-ю группу секвентных функций $\boldsymbol{SF}_{5,6}$. Группе $\boldsymbol{SF}_{5,6}$, как и всем остальным группам, принадлежащим подмножеству $\boldsymbol{\Omega}_1$, соответствуют свои 28 симметричных базисов. Следовательно, всего существует $28\cdot 30=840$ базисов Уолша-подобных секвентных байт-функций.

Перестановки эквидистантных секвент группы $\boldsymbol{SF}_{1,1}$, порождающие симметричные базисы

Таблица 6

Номер базиса	Номер секвенты								Номер базиса	Номер секвенты							
1	0	1	10	21	29	28	24	15	15	0	21	24	29	28	10	15	1
2	0	1	10	29	21	24	28	15	16	0	21	28	1	15	29	24	10
3	0	1	21	10	29	28	15	24	17	0	24	1	28	10	29	15	21
4	0	1	29	21	10	15	24	28	18	0	24	10	15	21	1	28	29
5	0	10	1	24	28	21	29	15	19	0	24	21	28	29	10	15	1
6	0	10	1	28	24	29	21	15	20	0	24	29	15	1	21	28	10
7	0	10	21	24	15	1	29	28	21	0	28	1	10	24	15	21	29
8	0	10	29	15	28	21	1	24	22	0	28	10	29	15	24	1	21
9	0	15	24	21	10	1	29	28	23	0	28	21	1	15	24	29	10
10	0	15	24	29	1	10	21	28	24	0	28	29	21	24	15	10	1
11	0	15	28	1	21	29	10	24	25	0	29	15	24	1	28	10	21
12	0	15	28	10	29	21	1	24	26	0	29	15	28	10	24	1	21
13	0	21	15	1	28	10	24	29	27	0	29	24	15	1	28	21	10
14	0	21	15	10	24	1	28	29	28	0	29	28	24	21	15	10	1

Обсуждение результатов, направления дальнейших исследований и выводы

Классические функции (коды) Уолша это такие бинарные коды, которые, во-первых, обладают двоично-степенным порядком и, во-вторых, правая половина кодов, как показано на рис. 2, или повторяет левую половину, или комплементарна к ней. Основным итогом, который достигнут данной статьей, следует считать расширение более чем на порядок (точнее, в 30 раз) множества Уолша-подобных систем восьмого порядка, скомпонованных в группы (по шесть групп для каждой образующей секвенты $\hat{\boldsymbol{s}}$). Секвентами в работе являются байт-коды, которые начинаются с нуля и содержат одинаковое число (по четыре) нулей и единиц, как правило неравномерно распределенных в их правой и левой половинах. Не менее важными следует считать также такие результаты.

Во-первых, все многообразие полных байт-секвентных групп $\boldsymbol{SF}_{i,j}$, $j=\overline{1,6}$, формируются лишь теми образующими секвентами $\hat{\boldsymbol{s}}_i \in \boldsymbol{\Omega}_1$, слева от которых нет ни одной другой секвенты $\boldsymbol{s}$. Нет каких-либо объективных причин, которые могли бы нарушить отмеченную особенность формирования множества секвентных групп для любых других, но двоично-степенных размеров N секвентных функций. Другими словами, множество групп $\boldsymbol{SF}_{i,j}$ произвольного двоично-степенного порядка N пополняется лишь теми образующими секвентами $\hat{\boldsymbol{s}}_i$, слева от которой нет ни одной другой секвенты $\boldsymbol{s}$ и это правило не зависит от N.

Во-вторых, для подмножества секвент $\boldsymbol{\Omega}_1$ младшая байт-секвента $\hat{\boldsymbol{s}}_1$ отстоит от ближайшей справа от неё секвенты $\boldsymbol{s}$ на восемь клеток; следующую секвенту $\hat{\boldsymbol{s}}_2$ разделяет ближайшая справа секвента $\boldsymbol{s}$ уже четыре клетки и т. д. Обозначим через $R(\hat{\boldsymbol{s}}_i, \boldsymbol{s})$ расстояние, на которое разнесены секвенты $\hat{\boldsymbol{s}}_i$ и $\boldsymbol{s}$. Легко просматриваемая по рис. 3 закономерность приводит к таким оценкам R. Возможно, что для произвольного двоично-степенного порядка секвент N соблюдаются соотношения $R(\hat{\boldsymbol{s}}_1, \boldsymbol{s}) = N$, $R(\hat{\boldsymbol{s}}_2, \boldsymbol{s}) = N/2$, ... , $R(\hat{\boldsymbol{s}}_m, \boldsymbol{s}) = 0$, где $m-$ число образующих секвент $\hat{\boldsymbol{s}}$, принадлежащих подмножеству $\boldsymbol{\Omega}_1$. Следует оговориться, что приведенные в данном абзаце соображения являются всего лишь неподтвержденной (по крайней мере компьютерным моделированием) гипотезой. Не исключено, что для значений $N \geq 16$ зависимость $R(N)$ окажется более сложной, чем та, которая предложена выше.

В-третьих, подмечена следующая особенность симметричных систем Уолша-подобных секвентных функций (базисов секвентных функций). Как оказалось, каждой из 29 эквидистантных секвентных групп, без учета 30-й группы, которая объединяет классические функции Уолша, отвечают 28 симметричных систем, т. е. ровно столько же, сколько образует множество классических функций Уолша длины $N=8$. Известно [11], что системы Уолша порядка $N=2^n$, где $n-$натуральное число, однозначно определяются так называемыми *индикаторными матрицами* (ИМ) $n-$го порядка, представляющими собой невырожденные в кольце вычетов по модулю 2 *правосторонне симметрические* (т. е. симметричные относительно вспомогательной диагонали) бинарные матрицы. При этом множества ИМ всех 29 групп секвентных систем восьмого порядка совпадают с множеством ИМ систем Уолша. Но если для классических систем Уолша (произвольного порядка) между ИМ и соответствующими им системами существуют взаимно однозначные отображения, устанавливаемые так называемыми *прямой и обратной задачами Уолша* [12], то подобное соответствие для секвентных систем надлежит еще уточнить.

И, наконец, в-четвертых, как подтверждено рассмотренными в данной работе многочисленными примерами каждой образующей секвенте $\hat{\boldsymbol{s}}_i$ восьмого порядка отвечают ***шесть***! полных групп $\boldsymbol{SF}_{i,j}$, $j=\overline{1,6}$, эквидистантных секвентных кодов, в которые (группы) входят также секвенты $\boldsymbol{s}_0$ и $\hat{\boldsymbol{s}}_i$. Число 6

может быть получено как минимум двумя способами, которые обозначим как варианты $B1$ и $B2$. Пусть для варианта $B1$ $6=3\cdot 2$, а для $B2$ $6=3!$ Число 3 это порядок ИМ секвентных систем восьмого порядка. Далее, каждая строка таблицы на рис. 3 кроме образующей секвенты $\hat{\boldsymbol{s}}_i$ содержит еще 18 других секвент, отстоящих от $\hat{\boldsymbol{s}}_i$ на расстоянии Хэмминга, равном четырем. Число 18 составляет ровно половину от числа секвент восьмого порядка, включая нулевую секвенту. В свою очередь, $18=6\cdot 3$, т.е. равно произведению числа групп $\boldsymbol{SF}_{i,j}$, отвечающих образующим элементам $\hat{\boldsymbol{s}}_i$ (это число равно 6), на порядок ИМ секвентных систем (порядок ИМ равен 3).

Приведенные в предыдущем абзаце рассуждения высказаны исходя из тех предположений, что они могут оказаться полезными для решения задачи синтеза секвентных систем более высоких порядков. Обратимся, например, к секвентным функциям длины $N=16$. Порядок ИМ систем таких функций равен четырем. Общее число L_{16} секвент 16 порядка определяется соотношением

$$L_{16}=\binom{15}{7}+1=6436.$$

Поскольку L_{16} является достаточно большим числом, то с большой долей вероятности обсуждавшиеся выше варианты $B1$ и $B2$ оценок мощности групп $\boldsymbol{SF}_{i,j}$ для $N\geq 16$ и другие высказанные здесь соображения скорее всего могут оказаться несостоятельными. А это означает, что проблемы синтеза и анализа Уолша-подобных систем секвентных функций ещё далека от завершения и работы в этом направлении должны быть продолжены.

Кратко сформулированные выше основные итоги работы предопределяют, по крайней мере, такие направления дальнейших исследований:

1. Обобщить полученные результаты для секвентных систем произвольного двоично-степенного порядка, превышающего восемь;

2. Подтвердить (или опровергнуть) гипотезу о существовании взаимосвязи между индикаторными матрицами секвентных систем (возможно совместно с выбранными группами секвентных кодов) и соответствующими им полными симметричными Уолша-подобными системами секвентных функций;

3. Оценить целесообразность применения одномерного, так же, как и двумерного БПФ в базисах секвентных функций для криптографических приложений, в частности, для защиты видеоинформации, передаваемой с борта беспилотного летательного аппарата на наземный пункт управления полетами и т. д.

На основании вышеизложенного можно сформулировать такой вывод. Простота технологии синтеза Уолша-подобных симметричных систем секвентных функций, высокие скорости спектральной обработки дискретных сигналов, обеспечиваемые предлагаемыми базисами, открывают таким системам (базисам) широкую перспективу применения в различных направлениях науки и техники и, прежде всего, для целей криптографической защиты информации.

Литература

[1] Трахтман А. М. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. / А. М. Трахтман, В. А. Трахтман. – М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.

[2] Трахтман А. М. Введение в обобщенную теорию спектрального анализа. / А. М. Трахтман – М.: Сов. радио, 1972. – 352 с.

[3] Качмаж С. Теория ортогональных рядов. / С. Качмаж, Г. Штейнгауз. – Пер. с англ. Под ред. Н. Я. Виленкина. – М.: Физматгиз, 1958. – 542 с.

[4] Хармут Х. Ф. Передача информации ортогональными функциями. – Пер. с англ. Н. Г. Дядюнова и А. И. Сенина / Х. Ф. Хармут – М.: Связь, 1975. – 272 с.

[5] Хармут Х. Ф. Теория секвентного анализа: основы и применения. – Пер. с англ. Л. М. Сороко. / Х. Ф. Хармут – М.: Мир, 1980. – 574 с.

[6] Габдуллин Р. Р. Секвентная стратиграфия: Уч. пособие. / Р. Р. Габдуллин, Л. Ф. Копаевич, А. В. Иванов. – М.: МАКС Пресс, 2008. – 114 с.

[7] Костров Б. В. Теория и методология применения секвентного анализа для обработки аэрокосмических изображений: Дисс. на соискание уч. степени докт. техн. наук. – Рязань, Гос. радиотехн. ун-т. 2012. – 312 с.

[8] Саблина В. А. Разработка и исследование алгоритмов восстановления изображений методами секвентного анализа: Дисс. на соиск. уч. степени канд. техн. наук. – Рязань, Гос. радиотехн. ун-т. 2009. – 152 с.

[9] Костров Б.В. Место и роль секвентного анализа в обработке аэрокосмических изображений. / Б. В. Костров, В. К. Злобин, В. А. Саблина // Радиотехника, №3. – 2012. – С.64-75.

[10] Злобин В. К. Алгоритм секвентной фильтрации групповых помех на изображении. / В. К. Злобин, Б. В. Костров, В. А. Саблина // Вестник Ряз. гос. радиотехн. ун-та, № 4 (Вып. 30). – 2009. – С. 3-7.

[11] Білецький А. Я. Синтез симетричних матриць Уолша по методу спрямованої перестановки базисних функцій. / А. Я. Білецький, О. А. Білецький, О. Г. Кучер. // Вісник НАУ, 2001, №3. – С. 141-146.

[12] Белецкий А.Я. Дискретные ортогональные базисы Виленкина-Крестенсона функций. Монография / А. Я. Белецкий. – Palmarium Academic Publishing, Germany, 2015. – 232 с.

УДК 621.395.4 (045)

Білецький А.Я., Навроцький Д.О. Синтез систем дискретних Уолша-подібних секвентних функцій восьмого порядку

Анотація. *В даній статті запропоновано алгоритм побудови в просторі зображень дискретних (0,1)-секвентних функцій, що складають повні симетричні системи ортогональних еквідистантних функцій восьмого порядку. Дискретні секвентні функції утворюються в результаті заміни їх кусково-сталих значень +1 або -1 в часовій області (з простору оригіналів) відповідно числовими значеннями 0 і 1 в просторі зображень. До Уолша-подібних відносимо такі (0,1)-секвентні функції, в яких число нулів і одиниць в кожній половині інтервалу визначення зовсім не обов'язково є однаковим, як це має місце в зображеннях функцій Уолша (за винятком функції, ліва половина якої заповнена нулями, а права - одиницями). Методом спрямованого перебору кожна з 30 сформованих повних груп еквідистантних секвент розгортаються, як і група класичних функцій Уолша восьмого порядку, в 28 симетричних систем секвентних функцій.*

Ключові слова: *секвентні функції і системи, повнота систем ортогональних функцій, утворюючі елементи систем, метод спрямованого перебору секвентних функцій.*

Beletsky A., Navrotskyi D. Systems synthesis of discrete Walsh-similarly sequention functions of eighth degree

Abstract. *This paper proposes an algorithm for constructing in the space of discrete images (0.1) - Sequention functions that make up the complete system of orthogonal equidistant symmetrical features of the eighth order. Discrete sequention functions are formed by the replacement of a piecewise constant values of +1 or -1 in the time domain (of the original space), respectively, numerical values 0 and 1 in the image space. For Walsh-like attribute such (0,1)-sequention function in which the number of ones and zeros in each half of the interval determination is not necessarily the same, as is the case in the images of the Walsh functions (except for the function, the left half which is filled with zeros, and the right-units). The method of directed enumeration each of the 30 groups form a complete equidistant sequent unfold as a group of the classical Walsh functions of order eight, 28 symmetric systems sequention functions.*

Key words: *sequention functions and systems, the completeness of systems of orthogonal functions forming the system elements, the method of directed enumeration sequention functions.*

Отримано *14 квітня 2016 року*, затверджено редколегією *28 квітня 2016 року*