

УДК 616-073.756.8

## УСТОЙЧИВОСТЬ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ПОЛУЧАЕМЫХ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ МЕТОДОМ ОБРАТНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

**Л.А. Булавин, Ю.Ф. Забашта, А.В. Мотолыга, С.П. Сенчуров**

*Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, просп. Глушкова 2 А, Киев, Украина*  
[oleksandr.motolyha@gmail.com](mailto:oleksandr.motolyha@gmail.com)

Поступила в редакцию 27 апреля 2017 г.

Принята 5 сентября 2017 г.

**Актуальность.** Метод обратного проецирования в современной компьютерной томографии достаточно распространён, и в научной литературе практически отсутствуют принципиальные критические замечания в его адрес. А причины для таких замечаний существуют. Главная из них, по нашему мнению, состоит в том, что в указанном методе никак не используется теория некорректных задач, несмотря на то, что сама задача реконструкции является некорректной.

**Цель работы.** Целью является разработка способа реконструкции томограмм, который представляет собой модификацию метода обратного проецирования с учетом теории некорректных задач.

**Материалы и методы.** В методе обратного проецирования значение параметра фильтрации выбирается практически произвольно. В предлагаемом в статье способе такой выбор получает обоснование: параметр фильтрации отождествляется с параметром регуляризации, что позволяет для его определения использовать теорию некорректных задач и тем самым обеспечить устойчивость реконструированного изображения.

**Результаты.** Была получена зависимость качества реконструкции от выбранной ширины фильтра, найдено значение фильтра, что при данном уровне погрешности исходных данных и данной геометрии соответствовало минимальной погрешности реконструированного изображения. Значение ширины фильтра зависит от параметров сканирования и уровня шума на проекциях, поэтому результатом является не конкретное значение фильтра, а способ выбора оптимального значения.

**Выводы.** В статье показано, что имеется возможность, не отказываясь полностью от метода обратного проецирования со всеми его положительными сторонами, модифицировать этот метод, дополнив его подходами, используемыми в теории некорректных задач. Такой подход должен обеспечить устойчивость реконструируемого изображения. Это может быть, например, отождествление параметра фильтрации с параметром регуляризации, что легло в основу предлагаемого в данной статье способа реконструкции изображений. Возможно существование и других путей использования теории некорректных задач в методе обратного проецирования.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** рентгеновская компьютерная томография; метод обратного проецирования; теория некорректных задач.

## СТІЙКІСТЬ ЗОБРАЖЕНЬ, ОТРИМАНИХ В КОМП'ЮТЕРНІЙ ТОМОГРАФІЇ МЕТОДОМ ОБЕРНЕНОГО ПРОЕЦІВАННЯ

**Л.А. Булавін, Ю.Ф. Забашта, О.В. Мотоліга, С.П. Сенчуров**

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, просп. Глушкова 2 А, м. Київ, Україна*

**Актуальність.** Метод оберненого проєціювання в сучасній комп'ютерній томографії досить поширений, і в науковій літературі практично відсутні принципові критичні зауваження на його адресу. А причини для таких зауважень існують. Головна з них, на нашу думку, полягає в тому, що в зазначеному методі ніяк не використовується теорія некоректних задач, незважаючи на те, що сама задача реконструкції є некоректною.

**Мета роботи.** Метою є розробка способу реконструкції томограм, який є модифікацією методу оберненого проєціювання з врахуванням теорії некоректних задач.

**Матеріали та методи.** У методі оберненого проєціювання значення параметра фільтрації обирається практично довільно. У запропонованому в статті способі такий вибір отримує обґрунтування: параметр фільтрації ототожнюється з параметром регуляризації, що дозволяє для його визначення використовувати теорію некоректних задач і тим самим забезпечити стійкість реконструйованого зображення.

**Результати.** Було отримано залежність якості реконструкції від обраної ширини фільтра, знайдено значення фільтра, що при даному рівні похибки вихідних даних і даній геометрії сканування відповідає мінімальній похибці реконструйованого зображення. Значення ширини фільтра залежить від параметрів сканування і рівню шуму на проєкціях, тому результатом є не конкретне значення фільтра, а спосіб вибору оптимального значення.

**Висновки.** В статті показано, що є можливість не відмовлятися повністю від методу оберненого проєціювання з усіма його позитивними сторонами, а модифікувати цей метод, доповнивши його підходами, використовуваними в теорії некоректних задач. Такий підхід повинен забезпечити стійкість зображення, що реконструюється. Це може бути, наприклад, ототожнення параметра фільтрації з параметром регуляризації, що лягло в основу пропонованого в цій статті способу реконструкції зображень. Можливе існування і інших способів використання теорії некоректних задач в методі оберненого проєціювання.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** рентгеновська комп'ютерна томографія; метод оберненого проєціювання; теорія некоректних задач.

## THE STABILITY OF IMAGES TAKEN IN COMPUTED TOMOGRAPHY BY BACK-PROJECTION METHOD

L.A. Bulavin, Y.F. Zabashta, O.V. Motolyha, S.P. Senchurov

*Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2 A Glushkova Ave., Kyiv, Ukraine*

**Background:** The back-projection method is quite widespread in the modern computed tomography and there are not principled critical comments addressed to it in the scientific literature. But there are reasons for such comments. The main one of them, in our opinion, is that the method does not use the theory of ill-posed problems in any way, despite the fact that the problem of the reconstruction is ill-posed.

**Objectives:** The aim of the work is a development of a method of the reconstruction of tomograms, which is a modification of the back-projection method taking into account the theory of ill-posed problems.

**Materials and methods:** In the back-projection method, the value of the filter parameter is chosen practically arbitrarily. In the method proposed in the article, this choice receives a justification: the filter parameter is identified with the regularization parameter that allows us to use the theory of ill-posed problems for its determination, and thereby to ensure the stability of the reconstructed image.

**Results:** The dependence of the quality of the reconstruction on the selected filter width was obtained. The value of the filter at the given error level of the initial data and the given geometry corresponding to the minimum error of the reconstructed image was found. The value of the filter width depends on the scanning settings and the noise level on the projections, so the result is not the specific value of the filter but it's the way to select the optimal value.

**Conclusions:** In this paper we show that it is possible without completely abandon the back-projection method with all its positive sides to modify this method supplementing it with the approaches used in the theory of ill-posed problems. Such an approach must ensure the stability of the reconstructed image. This can be, for example, the identification of the filter parameter with the regularization parameter that formed the basis for the method of image reconstruction proposed in this article. It's possible there are other ways of using the theory of ill-posed problems in the of back-projection method.

**KEW WORDS:** X-ray computed tomography; back-projection method; ill-posed problems.

Данная статья посвящена применению в компьютерной томографии одного из разделов математической физики, который называется теория некорректных задач или теория регуляризации [1-3]. Эта статья является продолжением нашей работы [4]. В последней было показано, что изображение, полученное с помощью повсеместно распространенного метода обратного проецирования [5-6], является неустойчивым. Его неустойчивость проявляется в том, что при увеличении точности приборов реконструированное изображение остается сильно зашумленным. Для получения устойчивого изображения был использован метод регуляризации [1-3]. Однако показано, что применение метода регуляризации сопряжено со значительным увеличением алгоритмической сложности, что приводит к гораздо большим затратам машинного времени в сравнении с методом обратного проецирования.

В данной статье предлагается способ получения устойчивого изображения, в котором объединяются преимущества обоих вышеупомянутых методов. По своей сути,

этот способ представляет собой модифицированный метод обратного проецирования, в котором на определенном этапе расчета использована идея регуляризации.

Для описания предложенного способа логично, по нашему мнению, вначале кратко изложить основные положения как теории регуляризации, так и метода обратного проецирования.

### ОБРАТНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Как известно [5], изображения, получаемые в компьютерной томографии, фактически представляют собой распределение  $\mu$  – коэффициента линейного затухания рентгеновского излучения в срезе исследуемого объекта определенной плоскостью. В этой плоскости рассматривают две системы координат. Первая  $(x, y)$  – неподвижная (лабораторная), которая связана с исследуемым объектом. Именно в этой системе задают распределение  $\mu(x, y)$ . Вторая  $(x', y')$  – подвижная, связана с ориентацией рентгеновского пучка и детектора относительно объекта. Будем считать, что рентгеновское излучение направлено параллельно оси  $y'$ . Угол между осями  $x$  и  $x'$  будем обозначать  $\phi$ .

В принятых обозначениях для интенсивности  $I_\phi(x')$  рентгеновского излучения, что прошло сквозь объект под углом  $\phi$ , можно записать:

$$I_\phi(x') = I_\phi^0(x') \exp\left(-\int \mu(x, y) dy'\right), \quad (1)$$

где  $I_\phi^0(x')$  – интенсивность рентгеновского излучения, которое вышло из источника.

Проекцией объекта называют величину:

$$\lambda_\phi(x') = -\ln \left[ \frac{I_\phi(x')}{I_\phi^0(x')} \right]. \quad (2)$$

Учитывая, что положение по оси  $y'$  определяется выражением:

$$x' = x \cdot \cos(\phi) + y \cdot \sin(\phi), \quad (3)$$

и подставляя (1) в уравнение (2) переписываем его в виде

$$\lambda_\phi(x') = \int \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x, y) \delta(x \cos \phi + y \sin \phi - x') dx dy, \quad (4)$$

Это выражение называется преобразованием Радона [7]. Целью компьютерной томографии является решение интегрального уравнения (4) относительно неизвестной функции  $\mu(x, y)$  при наличии экспериментально измеренных значений функции  $\lambda_\phi(x')$ .

При использовании метода обратного проецирования исходным выражением является двумерное фурье-преобразование в полярных координатах:

$$\mu(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \mu(r, \phi) \exp[2\pi r(x \cos \phi + y \sin \phi)] |r| dr d\phi, \quad (5)$$

Запишем выражение (5) в виде

$$\mu(x, y) = \int_0^\pi \lambda_\phi^*(x') d\phi, \quad (6)$$

где  $x'$  определяется выражением (3). Соответственно, для функции  $\lambda_\phi^*(x')$  имеем соотношение:

$$\lambda_{\phi}^*(x') = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(r, \phi) \exp[2\pi x' r] |r| dr, \quad (7)$$

Отметим, что бесконечное интегрирование в этом выражении заменяют конечным:

$$\lambda_{\phi}^*(x') = \int_{-R}^R \mu(r, \phi) \exp[2\pi x' r] |r| dr, \quad (8)$$

Далее доказывают, что формулу (8) можно представить в виде выражения:

$$\lambda_{\phi}^*(x') = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{\phi}(x') p(x' - x) dx, \quad (9)$$

в котором функция  $p(x')$  определяется формулой

$$p(x') = R^2 [2\text{sinc}(2Rx') - \text{sinc}^2(Rx')]. \quad (10)$$

Функция  $\lambda_{\phi}^*(x')$  называется фильтрованной проекцией, при этом величину  $R$  можно назвать параметром фильтрации.

Формулы (6) и (9) являются решением уравнения (4). Как видно из приведенной схемы расчета ключевым пунктом в методе обратного проецирования является замена бесконечного интегрирования конечным. Вместе с тем выбор параметра фильтрации  $R$  остаётся фактически не обоснованным.

### РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Перепишем выражение (4) в виде уравнения:

$$A\mu = \lambda. \quad (11)$$

Обозначим через  $M$  и  $\Lambda$  множества, элементами которых являются функции  $\mu$  и  $\lambda$ , при этом

$$\mu \in M, \lambda \in \Lambda. \quad (12)$$

Определим расстояние на этих множествах  $\rho_M(\mu_1, \mu_2)$  и  $\rho_{\Lambda}(\lambda_1, \lambda_2)$ .

Пусть значение функции  $\lambda$  известно с некоторой погрешностью  $\delta_{\lambda}$ , что записывается в виде

$$\rho_{\Lambda}(\lambda_{\delta}, \lambda_e) \leq \delta_{\Lambda}, \quad (13)$$

где  $\lambda_{\delta}$  – приближенное, а  $\lambda_e$  – точное значение функции  $\lambda$ . Введем обозначение

$$\rho_M(\mu_{\delta}, \mu_e) \leq \delta_M, \quad (14)$$

где  $\mu_{\delta}$  – приближенное, а  $\mu_e$  – точное решение уравнения, то есть  $\mu_e$  удовлетворяет уравнению:

$$A\mu_e = \lambda_e. \quad (15)$$

Как известно [1-3], регуляризацией называют способ построения устойчивого (регуляризованного) приближенного решения уравнения (11). Указанное решение должно удовлетворять принципу регуляризации

$$\lim_{\delta_{\lambda} \rightarrow 0} \delta_M = 0. \quad (16)$$

При построении регуляризованного решения в рассмотрение вводится величина  $\alpha$ , именуемая параметром регуляризации. Смысл введения параметра регуляризации состоит в том, чтобы с его помощью исказить оператор  $A$  в уравнении (11) и для этого искаженного уравнения получить приближенные решения  $\mu_{\delta}$ , зависящее от  $\alpha$  и удовлетворяющее условие

$$\rho_{\Lambda}(A\mu_{\delta}, \lambda_{\delta}) = \delta_{\Lambda} \quad (17)$$

Левая часть выражения (17) носит название невязки. Её будем обозначать  $N$ . Как это следует из условия (17), уравнение (11) необходимо исказить настолько, чтобы возникшая при этом погрешность стала равной погрешности  $\delta_\Lambda$ . Доказано [4], что это обеспечивает выполнение принципа регуляризации.

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИДЕИ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В МЕТОДЕ ОБРАТНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Как видно из вышесказанного, в обоих рассмотренных методах наблюдается общая черта. Действительно, когда мы, используя метод обратного проецирования, в (7-8) заменяем бесконечные пределы интегрирования на конечные, то тем самым исключаем из рассмотрения гармоники, для которых выполняется условие

$$r > R, \quad (18)$$

в результате чего функция  $\lambda_\phi^*(x')$  оказывается сглаженной. Нечто подобное мы наблюдаем при использовании метода регуляризации. Именно искажая уравнения (11) введением параметра регуляризации получим приближенное решение  $\mu_\delta$ , сглаженное по отношению к точному решению  $\mu_e$ . Заметим, что процедура сглаживания объединяет оба упомянутых метода.

Это обстоятельство позволяет рассматривать параметр фильтрации  $R$  как параметр регуляризации, что в свою очередь даёт возможность использовать равенство (17) для определения  $R$ . Выбор параметра  $R$  получает своё обоснование. Соответственно, при таком выборе  $R$  изображение  $\mu(x, y)$  оказывается устойчивым (регуляризованным).

### ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Программа численного эксперимента состоит из следующих этапов:

1) выбор математического фантома с известным распределением  $\mu(x, y)$ . Обозначим эту функции через  $\mu_e$ , поскольку она будет играть роль точного решения уравнения (4);

2) подставим эту функцию в выражение (4), далее находим функцию  $\lambda_\phi(x')$ , соответствующую функции  $\mu_e$ . По логике предыдущих рассуждений в данном случае это есть точное значение функции в правой части уравнения (11), поэтому обозначим его через  $\lambda_{e\phi}(x')$ ;

3) искажаем функцию  $\lambda_{e\phi}$ , вводя в рассмотрение приближительную функцию  $\lambda_{\delta\phi}(x')$ , имеющую погрешность  $\delta_\Lambda$ , которую рассчитываем по формуле

$$\rho_\Lambda(\lambda_{\delta\phi}(x'), \lambda_{e\phi}(x')) = \delta_\Lambda \quad (18)$$

4) для произвольно выбранного значения  $R$  с помощью формул (6, 9, 10) находим соответствующую функцию  $\mu(x, y)$  и обозначая её через  $\mu_{\delta R}(x, y)$ ;

5) изменяя величину  $R$ , находим оптимальные значения  $R_m$  и соответствующую функцию  $\mu_{\delta R}(x, y)$ , удовлетворяющую условию (17). В соответствии с теорией регуляризации эта функция есть приближенным решением уравнения (11), которое соответствует погрешности  $\delta_\Lambda$ ; его обозначаем через  $\mu_\delta$ ;

6) пользуясь формулой (14), рассчитываем погрешность  $\delta_M$ .

Нами был выбран фантом Шепа-Логана, который традиционно используется в компьютерной томографии для проверки эффективности методов реконструкции [8] и приблизительно моделирует срез человеческого мозга (Рис. 1).



Рис. 1. Фантом Шепа-Логана.

При расчете расстояния в множествах  $M$  и  $\Lambda$  считалось, что они являются элементами гильбертового метрического пространства. Далее исследовался интервал погрешности  $\Delta \in [0; 0.1]$ .

Процедура нахождения оптимального значения  $R_m$  параметра обрезки проиллюстрирована на Рис. 2, где представлена зависимость  $N(r)$ . Согласно этому графику для данной погрешности  $R_m = 0,26$ .

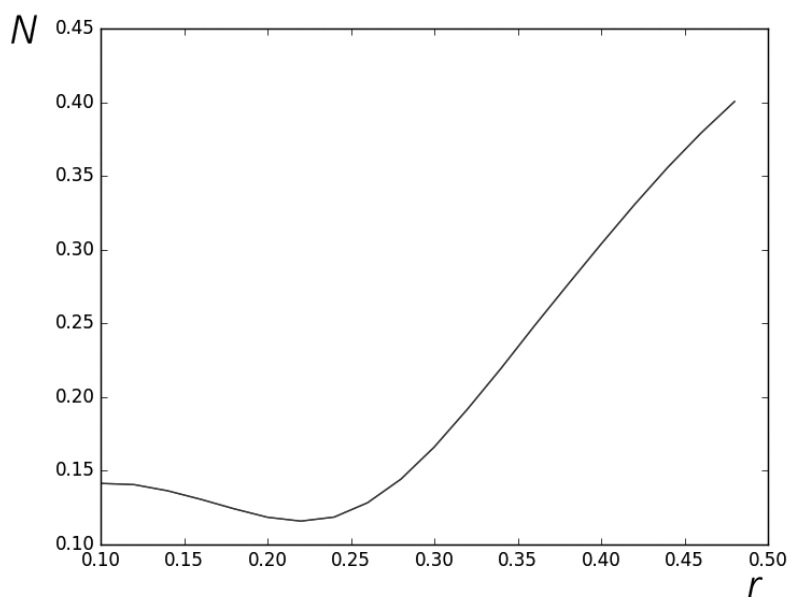


Рис. 2. Зависимость невязки  $N$  от радиуса фильтрации  $r$ .

Изображения фантома, полученные с помощью предлагаемого способа для различных значений погрешности  $\delta_\Lambda$ , приведены на Рис. 3.

На Рис. 4 приведены зависимости погрешности изображения  $\delta_M$  от погрешности эксперимента  $\delta_\Lambda$ . Как видно погрешность  $\delta_M$  уменьшается с уменьшением  $\delta_\Lambda$ , что позволяет сделать вывод о том, что принцип регуляризации в данном случае выполняется. Другими словами изображения, полученные предлагаемым способом, устойчивы.

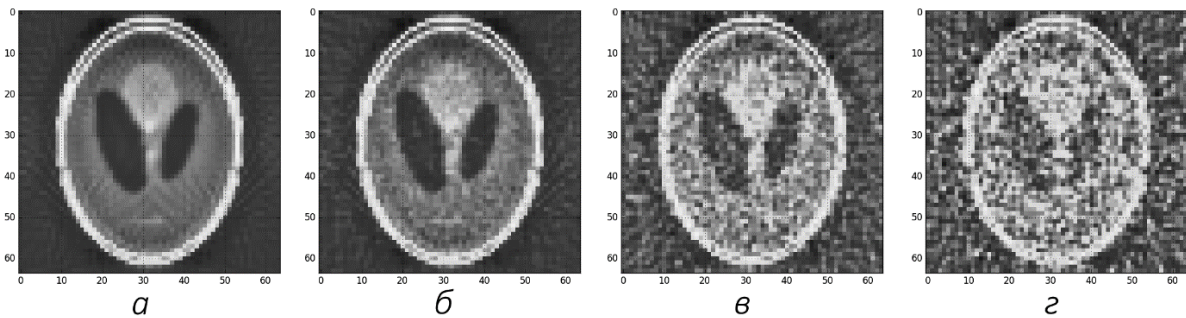


Рис. 3. Результаты реконструкции при значениях погрешности  $\delta_\lambda = 0$  (а),  $\delta_\lambda = 0.01$  (б),  $\delta_\lambda = 0.03$  (в),  $\delta_\lambda = 0.05$  (г)

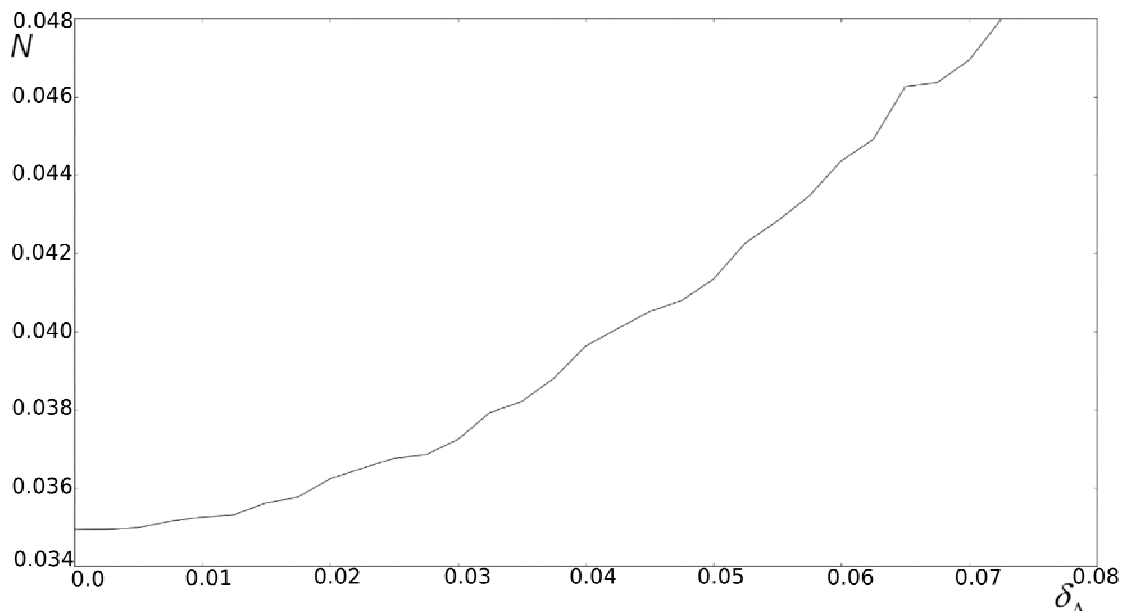


Рис. 4. Зависимость невязки  $N$  от погрешности эксперимента  $\delta_\lambda$ .

### ВЫВОДЫ

Метод обратного проецирования в современной компьютерной томографии достаточно распространён, и в научной литературе практически отсутствуют принципиальные критические замечания в его адрес. А причины для таких замечаний существуют. Главная из них, по нашему мнению, состоит в том, что в указанном методе никак не используется теория некорректных задач, несмотря на то, что сама задача реконструкции является некорректной. Поэтому изображения, получаемые с помощью указанного метода, является неустойчивым. То обстоятельство, что до настоящего времени эта неустойчивость не проявила себя в виде сильной «зашумленности» изображений, можно объяснить лишь тем, что погрешность математической реконструкции сопоставима с погрешностью современных приборов для рентгеновских исследований. Повышение точности упомянутых приборов при сохранении существующего математического аппарата реконструкции с неизбежностью повлечет за собой значительные ухудшения качества реконструированных изображений.

Как показано в данной статье, имеется возможность не отказываться полностью от метода обратного проецирования со всеми его положительными сторонами, а модифицировать этот метод, дополнив его подходами, используемыми в теории некорректных задач. Такой подход должен обеспечить устойчивость реконструируемого изображения. Это может быть, например, отождествление параметра фильтрации с параметром регуляризации, что легло в основу предлагаемого в данной статье способа реконструкции изображений. Возможно существование и других путей использования теории некорректных задач в методе обратного проецирования.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tikhonov A. N., Arsenin V. *Solution of Ill-posed Problems*. Washington, D.C. : V.H. Winston ; New York [etc.] : Wiley, 1977. 272 p.
2. Лаврентьев М., Романов В., Шишатский С. *Некорректные задачи математической физики и анализа*. Москва: Наука, 1980. 288 с.
3. Гласко В. *Обратные задачи математической физики*. Москва: МГУ, 1984. 127 с.
4. Булавін Л.А., Забашта Ю.Ф., Мотолига О.В., Сенчуров С.П. Аналіз стійкості методів томографічної реконструкції рентгенівських медичних зображень // *Біофізичний вісник*. 2017. Т. 37, № 1. С. 9-15.
5. Buzug T. M. *Computed tomography: from photon statistics to modern cone-beam CT*. Berlin : Springer, 2008. 522 p.
6. Herman G. T. *Fundamentals of computerized tomography: image reconstruction from projection*. 2nd edition. London: Springer, 2009. 300 p.
7. Stanley D. *The Radon Transform and Some of Its Applications*. New York: Wiley, 1983. 304 p.
8. Shepp L., Logan B. The Fourier Reconstruction of a Head Section // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 1974. 21 (3). P. 21-43.

#### REFERENCES

1. Tichonov, A. N., Arsenin, V. J. (1977). *Solutions of ill-posed problems*. Washington, D.C. : V.H. Winston ; New York [etc.] : Wiley.
2. Lavrentyev, M., Romanov, V., Shishatsky, S. (1980). *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis*. Moscow: Nauka. (in Russian)
3. Glasko, V. (1984). *Inverse problems of mathematical physics*. Moscow: Moscow State University. (in Russian)
4. Bulavin, L.A., Zabashta, Y.F., Motolyha, O.V., Senchurov, S.P. (2017). Analysis of stability of tomographic reconstruction of X-ray medical images. *Biophysical Bulletin*. 37(1), 9-15. (in Ukrainian)
5. Buzug, T. M. (2010). *Computed tomography: from photon statistics to modern cone-beam CT*. Berlin ; Heidelberg: Springer.
6. Herman, G. T. (2009). *Fundamentals of computerized tomography: image reconstruction from projection* (2nd ed.). London: Springer.
7. Deans, S. R. (1983). *The Radon Transform and Some of Its Applications*. New York: Wiley.
8. Shepp, L., Logan, B. (1974). The Fourier Reconstruction of a Head Section. *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 21(3). doi:10.1109/tns.2010.2085391