УДК 336.71

МОДЕЛЬ ШЛЯХОЗАЛЕЖНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ДЛЯ ІНДЕКСУ ПФТС

БУРТНЯК І. В.
кандидат економічних наук
МАЛИЦЬКА Г. П.
кандидат фізико-математичних наук
Івано-Франківськ

У теорії ціноутворення опціонів Блека – Мертона – Шоулза базовий актив моделюється як геометричний броунівський рух, чия динаміка під нейтральною межею ризику задається як

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \qquad (1)$$

де r – локальна безризикова відсоткова ставка, а σ – волатильність. Якщо припустити, що обидва параметри є константами, то модель (1) дає формули для простих опціонів.

У даний час формула Блека – Шоулза широко використовується на практиці в тому випадку, якщо ціни на купівлю та продаж опціонів задані в термінах так званої умовної змінної. Проте ціни, за якими продаються деривативи, неузгоджені з припущенням про сталу волатильність, сильні емпіричні докази стохастичного характеру волатильності стимулювали розвиток більш реалістичних моделей. Основна мета моделей зі змінною волатильністю складається з двох аспектів: з одного боку, щоб отримати ціну звичайного опціону, яка узгоджена з розглянутими якостями змінної, а з іншого боку, щоб обрати правильний варіант стратегії для підвищення продуктивності хеджування. З теоретичної точки зору, це не важко досягти, оскільки будь-яка модель, яка залежить від великої кількості параметрів, може бути відкалібрована, щоб відповідати ринковим цінам. Слід підкреслити, що процедура калібрування залежить від кількості та якості наявних даних.

У моделі місцевої змінної змінна є детермінованою функцією часу та поточної ціни базового активу. Основні переваги в тому, що ринок є повним, і в принципі можливо точно визначити функцію змінної таким способом, щоб ціни опціонів узгоджувалися з ринковими цінами.

Перші результати в цьому напрямку були отримані Гобсоном і Роджерсом, які запропонували в 1998 році модель змінної визначити як різницю між поточною ціною і середнім зваженим показником минулих цін. Для броунівського руху W позначимо через S_t біржову ціну, а через M_t і D_t відповідно тенденції та відхилення процесів, визначених як

$$M_t = \lambda e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda s} Z_S ds, \quad \lambda > 0, \quad D_t = Z_t - M_t, \qquad (2)$$

де $Z_t = \log(e^{-rt} S_t)$ є логарифмом дисконтної ціни процесу. Функції $e^{\lambda s}$ в (2) є ваги, а параметр λ описує ставку, за якою знижуються ціни.

Гобсон і Роджерс припускають, що S_t є процесом Іто, розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dS_t = \mu(D_t) S_t dt + \sigma(D_t) S_t dW_t, \qquad (3)$$

де μ і $\sigma > 0$ є обмеженими функціями, які задовольняють сформульовані гіпотези, з тим щоб гарантувати, що система (2) – (3) має розв'язок. Ключовою особливістю моделі є те, що процес (S_t, D_t) марковський. Таким чином, ціна U опціону з терміном погашення T має вигляд

$$U(S_t, t) = e^{-r(T-t)} Ku(r(T-t) + \\ + \log(S_t / K), \ M_t - \log K, T - t),$$

де K – початкова ціна опціону, $u = u(x, y, t)$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\sigma^2(x-y)}{2}(\partial_{xx} u - \partial_x u) + \\ + (x-y)\lambda \partial_y u - \partial_t u, \text{ в } R^2 \times [0, T], \qquad (4)$$

$$u(x, y, 0) = (e^x - 1)^+ \text{ при } (x, y) \in R^2. \qquad (5)$$

Шляхозалежні моделі ґрунтуються на емпіричному доведенні про залежність змінності по відношенню до відхилення. На *рис. 1* наведено імпліковану змінність проти скоригованої логарифмічної грошової поверхні для опціонів значень індексу ПФТС протягом 2011 року. Зауважимо, що середня вага $\lambda e^{-\lambda t}$ в (2) не може бути достатньо гнучкою, щоб врахувати абсолютно всі особливості процесу, що можуть виникнути, наприклад через злиття акцій чи зміни капіталізації. *Рис. 2* репрезентує еволюцію значень імплікованої змінності для індексу ПФТС. Досліджувані змінні згруповані по областях значень D_t, видно, що їхнє значення зростає при зменшенні D_t. Це добре висвітлює співвідношення між змінною та ринковими цінами.

Слабкою стороною моделі Гобсона – Роджерса є те, що багато проблем математичного і економічного характеру виникають з визначення відхилення процесу D_t, бо він включає в себе шлях базового активу за все минуле, тобто на проміжку $(-\infty, T]$. Вимога безмежного періоду часу в минулому очевидно ставить практичні проблеми, оскільки тільки скінчені проміжки часу є наявними, тож відсутність даних в моделі неминуча. Щоб подолати цю проблему, запропоновано узагальнення моделі Гобсона – Роджерса, тобто введено до розгляду нову модель для цін активів зі змінною, залежною від минулого. Розглянемо середню вагу φ, яка є невід'ємною, кусково-неперервною і інтегровною функцією на $(-\infty, T]$ і строго додатною на $[0, T]$, отримаємо

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(s) ds. \qquad (6)$$

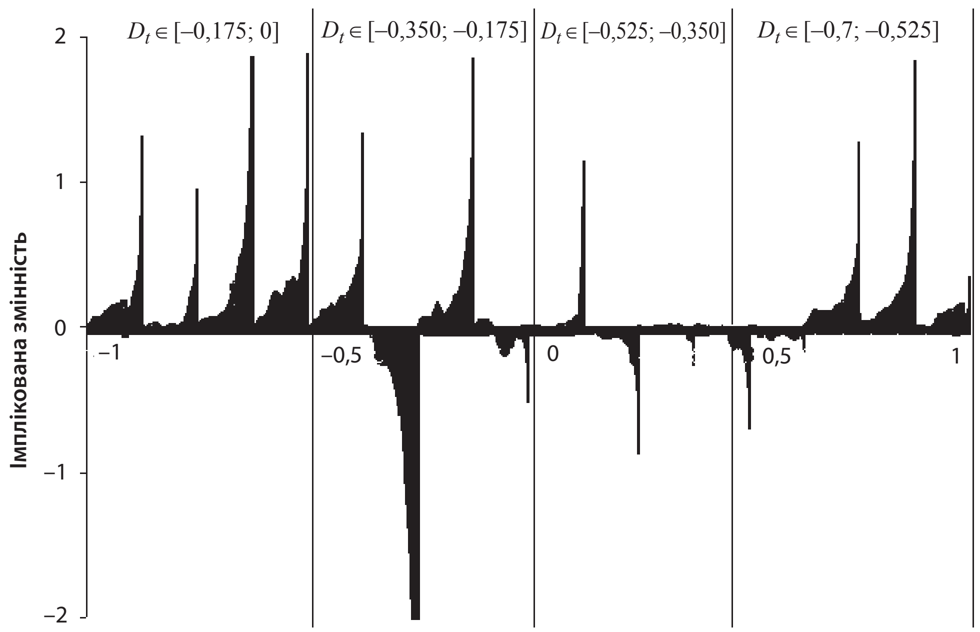

Рис. 1. Еволюція значень імплікованої змінності, побудованої за значеннями логарифмічної грошової поверхні $\dfrac{\ln(e^{r(T-t)}S_t / K)}{\sqrt{T-t}}$ **за згрупованими значеннями тренду відхилень D_t для індексу ПФТС у 2011 році**

Згруповані значення D_t, взяті за трендом

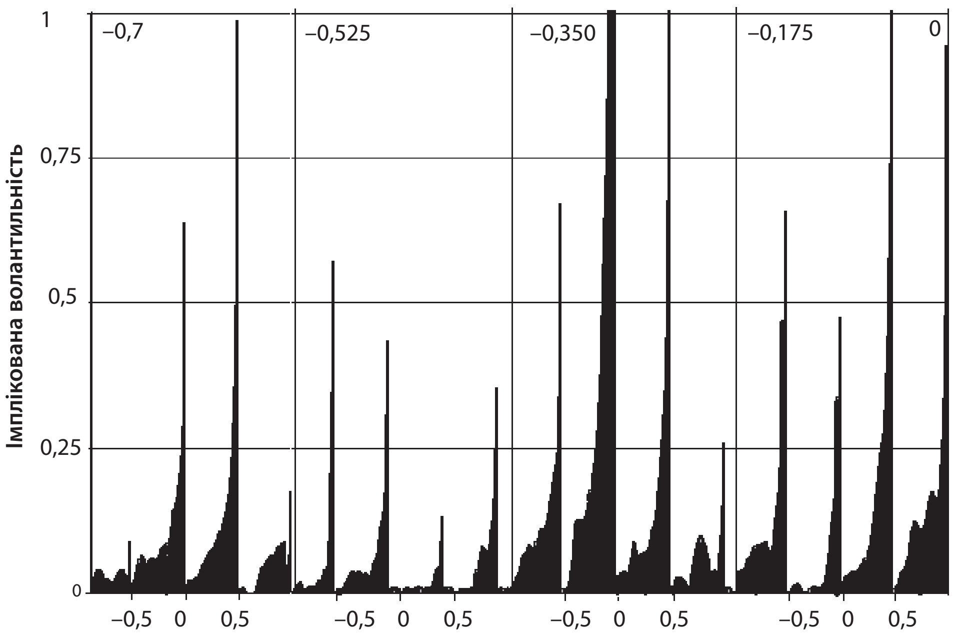

Рис. 2. Еволюція значень імплікованої волатильності, побудована за значеннями логарифмічної грошової поверхні $\dfrac{\ln(e^{r(T-t)}S_t / K)}{\sqrt{T-t}}$ **за згрупованими значеннями тренду відхилень D_t для індексу ПФТС у 2011 році**

Відзначимо, що якщо φ має компактний носій, то в цьому випадку область інтегрування в (6) обмежена. Позначимо через r безризикову ставку і $B_t = e^{rt}$. Визначимо процес

$$M_t = \frac{1}{\Phi(t)} \int_{-\infty}^{t} \varphi(s) Z_s ds, \text{ або еквівалентно ,}$$

$$dM_t = \frac{\varphi(t)}{\Phi(t)}(Z_t - M_t)dt, \qquad (7)$$

де Z_t є розв'язком диференціального рівняння

$$dZ_t = \mu(Z_t - M_t)dt + \sigma(Z_t - M_t)dW_t, \qquad (8)$$

а μ і σ обмежені неперервні за Гельдером функції та σ є строго додатною функцією. Основна ідея полягає в розгляді більш гнучкого відхилення процесу визначеного в термінах загальної середньої ваги, що можливо співвідноситься з скінченим періодом часу. При цих припущеннях відомо, що диференціальне рівняння (8), з урахуванням (7), має єдиний слабкий розв'язок і при цьому

(Z, M), (Z, D) є процесами Маркова. Типові характеристики середньої ваги даються на таких прикладах:

1) $\varphi(t) = e^{P(t)} \max\{Q(t), 0\}$, де $P(t)$, $Q(t)$ є поліноміальними функціями, зокрема $P(t) = \lambda t$ і $Q(t) = 1$;

2) $\varphi(t) = 1$ для $t \in [0, T]$ і $\varphi(t) = 0$ для $t \notin [0, T]$, це відповідає середньому геометричному азійського опціону;

3) $\varphi(t)$ – кусково-лінійна функція – найбільш загальний випадок.

На *рис. 3* наведено величину імплікованої волатильності для індексу ПФТС. Досліджувані змінні згруповані по областях значень відхилення D_t. Проаналізувавши рис. 3, можемо зробити висновок, що значення імплікованої волатильності зростає при зменшенні D_t. Це означає, що існує тісний взаємозв'язок між змінною та ринковими цінами.

Використовуючи модель шляхозалежної волатильності, побудовано тренд D_t і за його значеннями, використовуючи метод найменших квадратів (МНК), знайдено волатильність індексу ПФТС, результати розрахунку наведено на *рис. 4*. Найкраще репрезентує даний процес квадратична модель $\sigma = a + bD_t + cD_t^2$, де $\lambda = 10$, $\tau = 0,5$, $N = 2000$, оцінки одержані з точністю до 0,95.

Зауважимо також, що шляхозалежність волатильності включає інформацію про минуле, і потім, коли все налаштоване на ринку, модель якимось чином «знає» поведінку інвесторів у різних ринкових умовах, а також може відображати позитивні або негативні тенденції активу. Наприклад, на відміну від стандартних локальних або стохастичних моделей волатильності, у випадку раптового падіння ринку шляхозалежна модель волатильності призначена для автоматичного підвищення рівня волатильності з метою дослідження динаміки ринку в більш природний спосіб. Тобто, у цій моделі волатильності не потрібно постійно калібрувати змінність (що є відомим недоліком локальних моделей волатильності). Завдяки цьому модель користується великою популярністю серед учених і практиків. ■

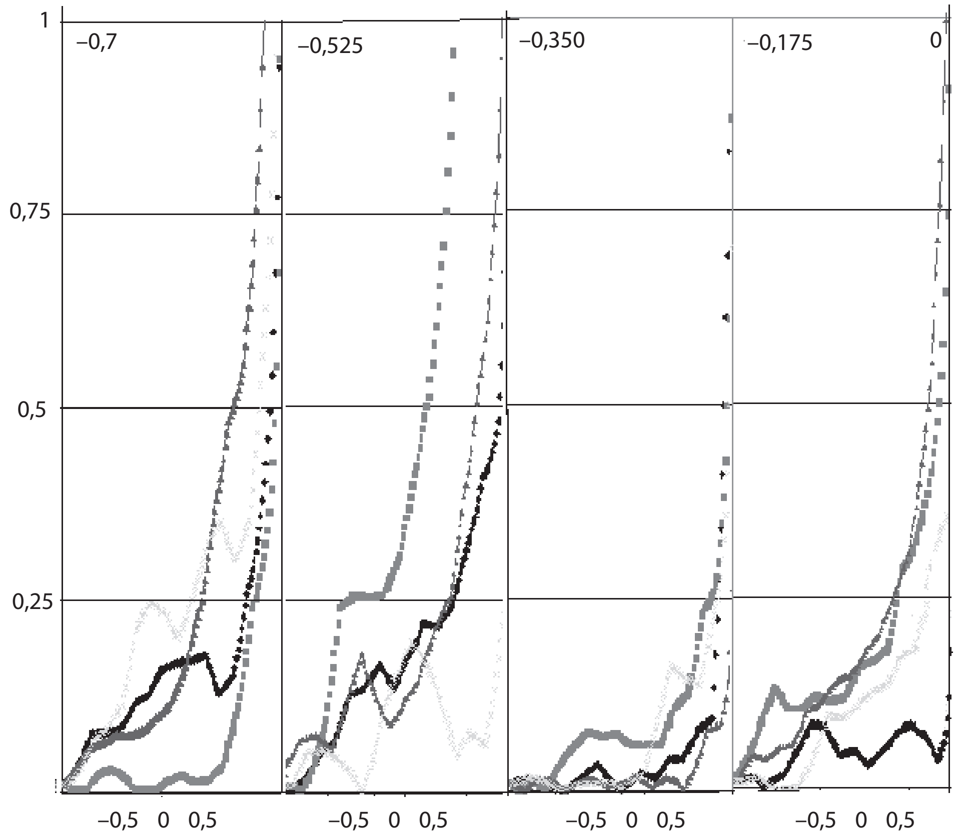

Рис. 3. Імплікована волатильність за згрупованими значеннями тренду відхилення D_t для індексу ПФТС у 2011 році

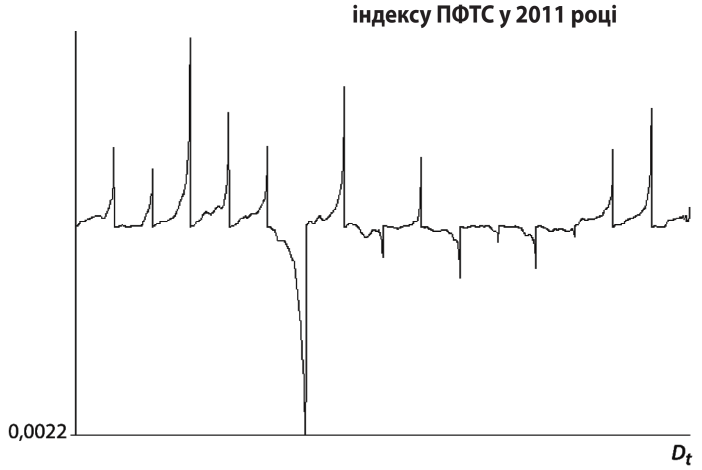

Рис. 4. Тренд волатильності індексу ПФТС, знайдений за МНК

ЛІТЕРАТУРА

1. **Буртняк І. В., Малицька Г. П.** Дослідження волатильності за допомогою модифікації моделі Блека–Шоулза // Бизнес Информ.– 2011.– № (5)1.– С. 72 – 75.

2. **Буртняк І. В., Малицька Г. П.** Застосування моделі Гобсона – Роджерса для дослідження індексу ПФТС // Зб. наук. праць «,Моделювання регіональної економіки».– Івано-Франківськ : 2011.– № 2(18).– С. 13 – 19.