"Risk management – Risk assessment techniques". *International Standard. IEC/ISO 31010*, 2009.

Solntsev, S. O., and Ovchynnikova, A. V. "Upravlinnia marketynhovymy ryzykamy:teoretychnyi ta prykladnyi aspekt" [Risk Management marketing: theoretical and practical aspects]. *Visnyk Natsionalnoho universytetu «Lvivska politekhnika»*, no. 749 (2013): 85-90.

Starostina, A. O., and Kravchenko, V. A. *Ryzyk-menedzhment: teoriia ta praktyka* [Risk Management: Theory and Practice]. Kyiv: Politekhnika, 2004.

Sharp, U. F., Aleksander, G. Dzh., and Beyli, Dzh. *Investitsii* [Investment]. Moscow: INFRA-M, 1997.

Vitlinskyi, V. V., and Velykoivanenko, H. I. *Ryzykolohiia v ekonomitsi ta pidpryiemnytstvi* [Ryzykolohiya in economics and business]. Kyiv: KNEU, 2004.

Yastremska, O. M., Hikovata, N. K., and Hikovatyi, V. M. *Stvorennia novoi produktsii: orhanizatsiino-ekonomichnyi ta marketynhovyi aspekty* [Creating new products: organizational, economic and marketing aspects]. Kharkiv: KhNEU, 2007.

Zozulev, A. V. *Promyshlennyy marketing: rynochnaia strategiia* [Industrial Marketing: market strategy]. Kyiv: Tsentr uchebnoy literatury, 2010.

УДК 330.4:519.86

НЕПРЕРЫВНАЯ МОДЕЛЬ ФИНАНСОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ В ВЫПОЛНЕНИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА

КУЗНИЧЕНКО В. М.

УДК 330.4:519.86

Кузниченко В. М. Непрерывная модель финансового взаимодействия предприятий в выполнении инвестиционного проекта

Рассмотрен вероятностный подход к модели товарно-денежного распределения во времени бюджета инвестиционного проекта между предприятиями на базе цепей Маркова (дискретная модель) и на базе системы линейных дифференциальных уравнений (непрерывная модель). Для решения дискретной модели используется метод z-преобразований, для решения непрерывной модели – преобразование Лапласа. Стохастическая матрица цепей Маркова полностью определяет дискретную модель распределения бюджета инвестиционного проекта между предприятиями, а дифференциальная матрица – непрерывную модель этого распределения. Использование z-преобразования и преобразования Лапласа позволяет найти решения задач в аналитической форме. Полученные выражения упрощают анализ и расчет состояний системы по сравнению с другими методами. Устанавливается взаимосвязь между дискретной и непрерывной моделями, то есть решения этих задач при t = n совпадают.

Ключевые слова: *стохастическая матрица, цепи Маркова, z-преобразование, дифференциальная матрица, преобразование Лапласа, аналитическая форма.*

***Формул**: 20. **Библ.:** 10.*

***Кузниченко Владимир Михайлович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры экономико-математических методов и информационных технологий, Харьковский институт финансов Украинского государственного университета финансов и международной торговли (пер. Плетневский, 5, Харьков, 61003, Украина)*

***E-mail:** kyznichenko_v_m@bk.ru*

УДК 330.4:519.86

Кузніченко В. М. Безперервна модель фінансової взаємодії підприємств у виконанні інвестиційного проекту

Розглянуто імовірнісний підхід до моделі товарно-грошового розподілу в часі бюджету інвестиційного проекту між підприємствами на базі ланцюгів Маркова (дискретна модель) та на базі системи лінійних диференціальних рівнянь (безперервна модель). Для вирішення дискретної моделі використовується метод z-перетворень, для вирішення безперервної моделі – перетворення Лапласа. Стохастична матриця ланцюгів Маркова цілком визначає дискретну модель розподілу бюджету інвестиційного проекту між підприємствами, а диференціальна матриця – безперервну модель цього розподілу. Використання z-перетворення і перетворення Лапласа дозволяє знайти вирішення завдань в аналітичній формі. Отримані вираження спрощують аналіз і розрахунок станів системи порівняно з іншими методами. Встановлюється взаємозв'язок між дискретною і безперервною моделями, тобто вирішення цих завдань при t = n збігаються.

Ключові слова: *стохастична матриця, ланцюги Маркова, z-перетворення, диференціальна матриця, перетворення Лапласа, аналітична форма.*

***Формул:** 20. **Бібл.:** 10.*

***Кузніченко Володимир Михайлович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри економіко-математичних методів та інформаційних технологій, Харківський інститут фінансів Українського державного університету фінансів і міжнародної торгівлі (пер. Плетньовський, 5, Харків, 61003, Україна)*

***E-mail:** kyznichenko_v_m@bk.ru*

UDC 330.4:519.86

Kuznichenko V. M. Continuous Model of Financial Interaction of Enterprises when Carrying Out an Investment Project

The article considers a probabilistic approach to the model of the commodity-money time distribution of the budget of an investment project between enterprises on the basis of Markov chains (discrete model) and on the basis of the system of linear differential equations (continuous model). In order to solve the discrete model, the z-transform method is used, and for solution of the continuous model – the Laplace transform is used. The stochastic matrix of Markov chains completely identifies the discrete model of distribution of the budget of an investment project between enterprises, and the differential matrix – the continuous model of this distribution. The use of z-transform and Laplace transform allows finding a solution of tasks in the analytical form. The obtained expressions simplify analysis and calculation of states of the system compared to other methods. The article establishes interconnection between the discrete and continuous models, in other words, solutions of these tasks are similar if t = n.

Key words: *stochastic matrix, Markov chains, z-transform, differential matrix, Laplace transform, analytical form.*

***Formulae:** 20. **Bibl.:** 10.*

***Kuznichenko Volodymyr M.**– Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor, Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technology, Kharkiv Institute of Finance of the Ukrainian State University of Finance and International Trade (per. Pletnovskyy, 5, Kharkiv, 61003, Ukraine)*

***E-mail:** kyznichenko_v_m@bk.ru*

Современное состояние развития экономики Украины характеризуется высоким динамизмом изменений во внешней и внутренней экономической среде, что обусловливает повышенные риски для хозяйственной деятельности предприятий. Факторы внешней и внутренней среды могут быть как стимуляторами, так и дестимуляторами смены уровня конкурентных позиций предприятий на рынке. В этих условиях реализация инвестиционных проектов в региональных программах всеми исполнителями требует усиленного мониторинга со стороны местных органов и является актуальной темой для разработки моделей управления товарно-денежными потоками между предприятиями.

Существенный вклад в исследования финансового обеспечения развития украинской промышленности сделали такие отечественные и зарубежные ученые, как А. Акимов, Н. Герасимчук, Н. Чумаченко, Р. Коттер, С. Майер и другие.

Исследования проблем формирования и использования финансовых ресурсов проводили отечественные специалисты – С. Буковский, У. Огонь, Н. Старостенко, В. Швець, Р. Шинкаренко, С. Юрий и другие.

Стратегическое управление денежными потоками, которые являются важной составляющей общей стратегии развития предприятия, изучалось в работе [1]. В ней разработана концептуальная модель стратегического управления денежными потоками предприятия, в которой к методам управления относят прогнозирование, моделирование и метод анализа.

В статье [2] предложена концепция управления деятельности интегрированных корпоративных структур, в которой подчеркивается необходимость согласования управления финансовыми ресурсами предприятий корпоративной структуры.

Авторы работы [3] предложили исследовать денежные потоки предприятий на основе метода регрессионной – корреляционной модели. Они рассмотрели структуру денежного потока как математическую функцию и описали модель оценки разных методов прогнозирования объемов денежных потоков в будущих периодах, с целью повышения надежности прогнозирования.

Авторы работ [4–7] представили экономико-математическую модель товарно-денежного распределения общего бюджета проекта во времени на основе вероятностного подхода (теория цепей Маркова). Исследование вероятностной модели динамики товарно-денежных потоков между исполнителями проекта было проведено для дискретного времени.

Целью работы является построение непрерывной во времени модели товарно-денежного оборота общего бюджета проекта между его исполнителями. При этом устанавливается взаимосвязь дискретной и непрерывной моделей, то есть аналитические решения этих задач при $t = n$ совпадают.

Рассмотрим региональную систему, которая состоит из n предприятий (участников регионального проекта). Тогда дискретный процесс товарно-денежного обмена между исполнителями проекта может быть представлен следующим модельным реккурентным соотношением с квадратной матрицей L переходных вероятностей размера n для эргодической цепи Маркова:

$$\overline{p}(k) = \overline{p}(0)L^k,\ k = 0,1,2,..., \qquad (1)$$

где $\overline{p}(k)$ – вектор распределения финансовых ресурсов между участниками проекта после k-го шага.

Построим марковский процесс с непрерывным временем, у которого будут те же самые вероятности состояний в конце каждого шага для произвольного начального состояния системы, что и для дискретного процесса.

Если предположить, что время между переходами из состояния в состояние совершается через случайные промежутки времени, то случайный процесс будет описываться марковским процессом с непрерывным временем. В этом случае параметрами процесса будут интенсивности, а не вероятности переходов, при этом процесс обмена будет задаваться системой линейных дифференциальных уравнений [8]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\overline{p}(t) = \overline{p}(t)A \\ \overline{p}(t)\big|_{t=0} = \overline{p}(0) \end{cases}, \qquad (2)$$

где $\overline{p}(t)$ – вектор вероятностей состояний системы в момент времени t; A – матрица интенсивностей переходов системы из состояния в состояние (A = LnL), а диагональные элементы этой матрицы определены соотношением:

$$a_{jj} = -\sum_{i \neq j} a_{ij}. \qquad (3)$$

Элементы матрицы интенсивностей A определяют интенсивности переходов из состояния в состояние, а диагональные элементы задаются равенством (3). Поэтому сумма элементов вдоль каждой строки матрицы A равна нулю. Такие матрицы называют дифференциальными.

Применим к системе уравнений (2) преобразование Лапласа ($\overline{p}(t) \Leftrightarrow P(s)$):

$$sP(s) - \overline{p}(0) = P(s)A$$

или

$$P(s)(sI - A) = \overline{p}(0), \qquad (4)$$

где $P(s) = \int_0^\infty \overline{p}(t)e^{-st}dt$, I – единичная матрица. Из (4) находим :

$$P(s) = \overline{p}(0)(sI - A)^{-1}. \qquad (5)$$

Матрица $(sI - A)^{-1}$ полностью описывает поведение марковских процессов с непрерывным временем.

Известно, что решение системы (2) с начальными условиями $\overline{p}(0)$ есть:

$$\overline{p}(t) = \overline{p}(0)e^{At}, \qquad (6)$$

где под матричной функцией e^{At} нужно понимать экспоненциальный степенной ряд

$$I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + ...,$$

который сходится к e^{At}.

Напомним, что дискретные процессы описываются уравнением (1). Сравнивая (1) и (6) при $t = n$, приходим к равенствам:

$$e^A = L,\ A = \operatorname{Ln} L. \qquad (7)$$

Нахождение функций от матриц через многочлены осуществляется на основании теоремы Гамильтона – Кэли и ее следствий и подробно описаны в литературе [9, 10].

Рассмотрим пример, в котором дискретная модель товарно-денежных потоков между исполнителями проекта имеет стохастическую эргодическую матрицу вероятностей переходов следующего вида:

$$L=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Используя методику, представленную в работе [4], определим с этой матрицей аналитическое выражение для вектора состояний изучаемой системы:

$$(I-zL)=\begin{pmatrix}1-\frac{z}{2} & -\frac{z}{4} & -\frac{z}{4}\\ -\frac{3z}{8} & 1-\frac{3z}{8} & -\frac{z}{4}\\ -\frac{z}{4} & -\frac{z}{4} & 1-\frac{z}{2}\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Определитель этой матрицы (9) равен:

$$\Delta=(1-z)\left(1-\frac{z}{4}\right)\left(1-\frac{z}{8}\right). \tag{10}$$

Обратная матрица к матрице (9) имеет вид:

$$(I-zL)^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1-\frac{3z}{8} & -\frac{z}{4}\\ -\frac{z}{4} & 1-\frac{z}{2}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-\frac{3z}{8} & -\frac{z}{4}\\ -\frac{z}{4} & 1-\frac{z}{2}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-\frac{3z}{8} & 1-\frac{3z}{8}\\ -\frac{z}{4} & -\frac{z}{4}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-\frac{z}{4} & -\frac{z}{4}\\ -\frac{z}{4} & 1-\frac{z}{2}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1-\frac{z}{2} & -\frac{z}{4}\\ -\frac{z}{4} & 1-\frac{z}{2}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1-\frac{z}{2} & -\frac{z}{4}\\ -\frac{z}{4} & -\frac{z}{4}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-\frac{z}{4} & -\frac{z}{4}\\ 1-\frac{3z}{8} & -\frac{z}{4}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1-\frac{z}{2} & -\frac{z}{4}\\ -\frac{3z}{8} & -\frac{z}{4}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1-\frac{z}{2} & -\frac{z}{4}\\ -\frac{3z}{8} & 1-\frac{3z}{8}\end{vmatrix}\end{pmatrix}^{T}=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}1-\frac{7z}{8}+\frac{z^2}{8}; & \frac{z}{4}(1-\frac{z}{4}); & \frac{z}{4}(1-\frac{z}{8})\\ \frac{3z}{8}-\frac{z^2}{8}; & 1-z+\frac{3z^2}{16}; & \frac{z}{4}(1-\frac{z}{8})\\ \frac{z}{4}; & \frac{z}{4}(1-\frac{z}{4}); & 1-\frac{7z}{8}+\frac{3z^2}{32}\end{pmatrix}= \tag{11}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{8/21}{1-z}+\frac{1/3}{1-\frac{z}{4}}+\frac{2/7}{1-\frac{z}{8}}; & \frac{2/7}{1-z}-\frac{2/7}{1-\frac{z}{8}}; & \frac{1/3}{1-z}-\frac{1/3}{1-\frac{z}{4}}\\ \frac{8/21}{1-z}+\frac{1/3}{1-\frac{z}{4}}-\frac{5/7}{1-\frac{z}{8}}; & \frac{2/7}{1-z}+\frac{5/7}{1-\frac{z}{8}}; & \frac{1/3}{1-z}-\frac{1/3}{1-\frac{z}{4}}\\ \frac{8/21}{1-z}-\frac{2/3}{1-\frac{z}{4}}+\frac{2/7}{1-\frac{z}{8}}; & \frac{2/7}{1-z}-\frac{2/7}{1-\frac{z}{8}}; & \frac{1/3}{1-z}+\frac{2/3}{1-\frac{z}{4}}\end{pmatrix}.$$

Применяя z-преобразование к уравнению (1), находим аналитический вид решения дискретной задачи:

$$\overline{p}(n)=\overline{p}(0)\left[\begin{pmatrix}\frac{8}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3}\\ \frac{8}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3}\\ \frac{8}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}+\right. \tag{12}$$

$$\left.+\left(\frac{1}{8}\right)^{n}\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0\\ -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & 0\\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0\end{pmatrix}\right].$$

Построим непрерывную модель этой задачи. Для этого найдем матрицу A. Ищем характеристический полином матрицы L:

$$\Delta_L(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{3}{8} & \lambda-\frac{3}{8} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \lambda-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)\left(\lambda-\frac{1}{8}\right). \tag{13}$$

Все корни характеристического полинома простые, поэтому характеристический полином совпадает с минимальным аннулирующим полиномом $\psi(\lambda)=\Delta_L(\lambda)$. Спектр матрицы L обозначим через Λ_L, который равен:

$$\Lambda_L=\left\{\frac{1}{8};\ \frac{1}{4};\ 1\right\}.$$

Функция $f(\lambda)=\ln(\lambda)$ определена на спектре матрицы L.

Если функция $f(\lambda)$ определена на спектре матрицы L и $g(\lambda)$ – любой многочлен, совпадающий с $f(\lambda)$ на спектре матрицы L (т. е. $f(\Lambda_L)=g(\Lambda_L)$), то, по определению:

$$f(L)=g(L). \tag{14}$$

Такой многочлен можно получить различными методами. В нашем случае многочлен $g(\lambda)$ наименьшей степени однозначно определенный на спектре матрицы L будет иметь вид: $g(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c$.

Составим и решим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l|l} g(1)=f(1)=0=a+b+c & a=\frac{128}{21}\ln\left(\frac{1}{2}\right)\\ g\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\ln\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}a+\frac{1}{4}b+c & b=-\frac{72}{7}\ln\left(\frac{1}{2}\right)\\ g\left(\frac{1}{8}\right)=f\left(\frac{1}{8}\right)=\ln\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{64}a+\frac{1}{8}b+c & c=\frac{88}{21}\ln\left(\frac{1}{2}\right)\end{array}\right..$$

Тогда

$$A=\ln(L)=\left(\frac{128}{21}L^2-\frac{72}{7}L+\frac{88}{21}I\right)\ln\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\ln(2)\begin{pmatrix}-\frac{32}{21} & \frac{6}{7} & \frac{2}{3}\\ \frac{31}{21} & -\frac{15}{7} & \frac{2}{3}\\ \frac{10}{21} & \frac{6}{7} & -\frac{4}{3}\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Для нахождения решения системы линейных дифференциальных уравнений (2) применим преобразование Лапласа и найдем матрицы $(sI-A)$ и ей обратную матрицу $(sI-A)^{-1}$:

$$sI-A=\begin{pmatrix} s+\frac{32}{21}\ln 2 & -\frac{6}{7}\ln 2 & -\frac{2}{3}\ln 2 \\ -\frac{31}{21}\ln 2 & s+\frac{15}{7}\ln 2 & -\frac{2}{3}\ln 2 \\ -\frac{10}{21}\ln 2 & -\frac{6}{7}\ln 2 & s+\frac{4}{3}\ln 2 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(16)}$$

Обратная ей матрица равна:

$$(sI-A)^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{s^2+\frac{73}{21}s\ln 2+\frac{16}{7}(\ln 2)^2}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)} & \dfrac{\frac{6}{7}\ln 2}{s(s+3\ln 2)} & \dfrac{\frac{2}{3}\ln 2}{s(s+2\ln 2)} \\ \dfrac{\frac{31}{21}s\ln 2+\frac{16}{7}(\ln 2)^2}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)} & \dfrac{s^2+\frac{20}{7}s\ln 2+\frac{12}{7}(\ln 2)^2}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)} & \dfrac{\frac{2}{3}\ln 2}{s(s+3\ln 2)} \\ \dfrac{\frac{10}{21}s\ln 2+\frac{16}{7}(\ln 2)^2}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)} & \dfrac{\frac{6}{7}\ln 2}{s(s+3\ln 2)} & \dfrac{s^2+\frac{11}{3}s\ln 2+2(\ln 2)^2}{s(s+2\ln 2)(s+3\ln 2)} \end{pmatrix} \quad \textbf{(17)}$$

Разлагая на простые дроби слагаемые в (17), получаем:

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s}\begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{2}{7} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{2}{7} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}+\frac{1}{(s+2\ln 2)}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}+$$
$$+\frac{1}{(s+3\ln 2)}\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(18)}$$

Пусть матрица $H(t)$ будет обратным преобразованием матрицы $(sI - A)^{-1}$. Тогда обратное преобразование переводит уравнение (5) в уравнение:

$$\bar{p}(t)=\bar{p}(0)H(t). \quad \textbf{(19)}$$

Воспользовавшись преобразованием Лапласа, получим:

$$\bar{p}(t)=\bar{p}(0)\left[\begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}+e^{-2t\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}+\right.$$
$$\left.+e^{-3t\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}\right]. \quad \textbf{(20)}$$

Сравнивая (12) с (20), мы видим, что $H(t)$ является выражением для матрицы e^{At}:

$$H(t)=\begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}+e^{-2t\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}+e^{-3t\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}.$$

При $t = n$ имеем:

$$H(n)=\begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}+e^{-2n\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}+$$
$$+e^{-3n\ln 2}\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{8}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{8}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}+$$
$$+\left(\frac{1}{4}\right)^n\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}+\left(\frac{1}{8}\right)^n\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}.$$

А следовательно, (12) совпадает с (20) при $t = n$, то есть аналитическое решение реккурентных соотношений (1), которое находится при помощи z-преобразования, и решение линейных дифференциальных уравнений (2) при помощи преобразования Лапласа при $t = n$ совпадают.

ВЫВОДЫ

Таким образом, разработана непрерывная аналитическая модель взаимодействия предприятий для исследования поэтапного оборота товарно-денежных потоков между исполнителями инвестиционных и бюджетных региональных проектов, которая даёт возможность не только непрерывно контролировать процесс их выполнения, а и при необходимости корректировать их взаимодействие. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Шпирко О. М. Методичний підхід до вибору стратегії управління грошовими потоками підприємств водного транспорту / О. М. Шпирко, С. М. Семенова // Проблеми економіки. – 2013. – № 2. – С. 181 – 189.

2. Тельнова Г. В. Особливості управління фінансами інтегрованих корпоративних структур / Г. В. Тельнова // Проблеми економіки. – 2013. – № 1. – С. 255 – 260.

3. Тян Р. Б. Структурний аналіз грошових потоків з метою підвищення надійності їх прогнозування / Р. Б. Тян, О. В. Лисенко // Фінанси України. – 2012. – № 5. – С. 110 – 120.

4. Кузніченко В. М. Метод Z-перетворень у моделі фінансової взаємодії співвиконавців інвестиційного проекту / В. М. Кузніченко, В. І. Лапшин, Т. В. Стеценко // Вісник економіки транспорту і промисловості. – 2012. – № 37. – С. 52 – 55.

5. Кузніченко В. М. Дефіцитна модель фінансової взаємодії підприємств у регіонах / В. М. Кузніченко, В. І. Лапшин, Т. В. Стеценко // Фінансово-кредитна діяльність: проблеми теорії та практики. – ЗНП. – 2013. – Випуск 1(14). – С. 145 – 150.

6. Кузніченко В. М. Модель фінансової взаємодії підприємств у регіонах / В. М. Кузніченко, В. І. Лапшин // Зовнішня торгівля: Економіка, фінанси, право. – 2013. – №2. – С. 87 – 93.

7. Лапшин В. І. Дефіцитна модель управління інвестиційними проектами в регіонах / В. І. Лапшин, В. М. Кузніченко // Бизнес Информ. – 2013. – № 6. – С. 57 – 62.

8. Ховард Р. А. Динамическое программирование и марковские процессы / Р. А. Ховард. – М. : «Советское радио», 1964. – 195 с.

9. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – 4-е изд. – М. : Наука, 1988. – 552 с.

10. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – Изд. третье, перераб. – М. : Наука, 1979. – 400 с.

REFERENCES

Gantmakher, F. R. *Teoriia matrits* [Theory of Matrices]. Moscow: Nauka, 1988.

Kuznichenko, V. M., Lapshyn, V. I., and Stetsenko, T. V. "Metod Z-peretvoren u modeli finansovoi vzaiemodii spivvykonavtsiv investytsiinoho proektu" [Z-transformation method in a model of financial interaction co-investment project]. *Visnyk ekonomiky transportu i promyslovosti*, no. 37 (2012): 52-55.

Kuznichenko, V. M., Lapshyn, V. I., and Stetsenko, T. V. "Defitsytna model finansovoi vzaiemodii pidpryiemstv u rehionakh" [Scarce financial model of interaction in the region]. *Finansovo-kredytna dialnist: problemy teorii ta praktyky*, no. 1(14) (2013): 145-150.

Kuznichenko, V. M., and Lapshyn, V. I. "Model finansovoi vzaiemodii pidpryiemstv u rehionakh" [Financial model of interaction in the region]. *Zovnishnia torhivlia: Ekonomika, finansy, pravo*, no. 2 (2013): 87-93.

Khovard, R. A. *Dinamicheskoe programmirovanie i markovskie protsessy* [Dynamic Programming and Markov Processes]. Moscow: Sovetskoe radio, 1964.

Lapshyn, V. I., and Kuznichenko, V. M. "Defitsytna model upravlinnia investytsiinymy proektamy v rehionakh" [Deficient model of management of investment projects in the region]. *Biznes Inform*, no. 6 (2013): 57-62.

Maltsev, A. I. *Osnovy lineynoy algebry* [Fundamentals of linear algebra]. Moscow: Nauka, 1979.

Shpyrko, O. M., and Semenova, S. M. "Metodychnyi pidkhid do vyboru stratehii upravlinnia hroshovymy potokamy pidpryiemstv vodnoho transportu" [Methodological approach to choosing a strategy of cash flow management of water transport]. *Problemy ekonomiky*, no. 2 (2013): 181-189.

Tian, R. B., and Lysenko, O. V. "Strukturnyi analiz hroshovykh potokiv z metoiu pidvyshchennia nadiinosti ikh prohnozuvannia" [Structural analysis of cash flows in order to improve the reliability of prediction]. *Finansy Ukrainy*, no. 5 (2012): 110-120.

Telnova, H. V. "Osoblyvosti upravlinnia finansamy intehrovanykh korporatyvnykh struktur" [Features of financial management integrated corporate structures]. *Problemy ekonomiky*, no. 1 (2013): 255-260.