

где y_{it} , $i = \overline{1, m}$ – значения эндогенных переменных к моменту t ; x_s , $s = \overline{1, k}$ – значения экзогенных переменных к моменту t .

Решение системы, полученное одним из ранее указанных методов, будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{y}_{1,t} &= a_1 + b_{11}x_{1,t} + \dots + b_{1k}x_{k,t} + g_{12}\hat{y}_{2,t} + \dots + \\ &+ g_{1m}\hat{y}_{m,t} \\ \hat{y}_{2,t} &= a_2 + b_{21}x_{1,t} + \dots + b_{2k}x_{k,t} + g_{21}\hat{y}_{1,t} + \dots + \\ &+ g_{2m}\hat{y}_{m,t}; \\ &\dots \\ \hat{y}_{m,t} &= a_m + b_{m1}x_{1,t} + \dots + b_{m,k}x_{k,t} + g_{m1}\hat{y}_{1,t} + \dots + \\ &+ g_{m,m-1}\hat{y}_{m-1,t}, \end{aligned} \right.$$

где a_i, b_{ii}, g_{ii} , $i = \overline{1, m}$ – оценки коэффициентов модели;
 $\hat{y}_{i,t}$ – оценки значений эндогенных переменных к моменту t ;

$\hat{x}_{s,t}$ – оценки значений экзогенных переменных к моменту t .

Таким образом, каждое поведенческое уравнение представляет собой детерминированную составляющую модели временного ряда. Данное положение позволяет в дальнейшем использовать технологию теории временных рядов для построения их моделей. Известно [2], что модель временного ряда содержит детерминированную и случайную составляющие. Для построения модели случайной составляющей будем использовать методологию ARIMA. С целью ее использования удалим из ряда детерминированную составляющую, детрендируем каждое уравнение системы. Получим модель остатков для каждого уравнения: $e_{i,t} = y_{i,t} - \hat{y}_{i,t}$. После исследования полученных рядов возможны две ситуации: ряд остатков является стационарным рядом, представляющим собой гауссовский «белый шум»; ряд остатков может быть представлен моделью ARIMA (p, d, q), где p – порядок авторегрессии; d – порядок разности (порядок интегрирования); q – порядок скользящего среднего. В общем случае модель случайной составляющей будет иметь вид $\varepsilon_{i,t} = \varphi_i(v_t)$, где v – значение порождающего «белого шума».

Для решения задачи прогнозирования значений эндогенных переменных следует решить задачи прогнозирования для каждой экзогенной переменной. В силу независимости экзогенных переменных от случайной составляющей с этой целью следует использовать классический метод наименьших квадратов или метод последовательных разностей.

Пусть в результате решения k задач построения моделей экзогенных переменных получены зависимости $x_{s,t} = f_s(t)$. В этом случае модели прогнозирования уровней экзогенных переменных на h шагов будут иметь вид: $x_{s,t+h} = f_s(t+h)$.

Следовательно, модель прогнозирования значений эндогенных переменных на h шагов может быть представлена системой:

$$\left\{ \begin{aligned} y_{1,t+h} &= a_1 + b_{11}f_1(t+h) + \dots + b_{1k}f_k(t+h) + \\ &+ g_{12}\hat{y}_{2,t} + \dots + g_{1m}\hat{y}_{m,t} + \varepsilon_{1,t+h} \\ y_{2,t+h} &= a_2 + b_{21}f_1(t+h) + \dots + b_{2k}f_k(t+h) + \\ &+ g_{21}\hat{y}_{1,t} + \dots + g_{2m}\hat{y}_{m,t} + \varepsilon_{2,t+h}; \\ &\dots \\ y_{m,t+h} &= a_m + b_{m1}f_1(t+h) + \dots + b_{mk}f_k(t+h) + \\ &+ g_{m1}\hat{y}_{1,t} + \dots + g_{m,m-1}\hat{y}_{m-1,t} + \varepsilon_{m,t+h}. \end{aligned} \right.$$

Так как согласно общим результатам теории прогнозирования наилучшим с точки зрения значения средней квадратической ошибки линейным прогнозом является условное математическое ожидание случайной величины y_{t+h} при условии, что все значения временного ряда y_t до момента времени t включительно известны, то при прогнозировании будем учитывать следующие соотношения [3]:

$$M(y_{t-i} | y_1, y_2, \dots, y_t) = y_{t-i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, t-1;$$

$$M(y_{t+h} | y_1, y_2, \dots, y_t) = \hat{y}_{t+h}, \quad h = 1, 2, \dots;$$

$$M(\varepsilon_{t-i} | y_1, y_2, \dots, y_t) = y_{t-i} - \hat{y}_{t-i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, t-1;$$

$$M(\varepsilon_{t+h} | y_1, y_2, \dots, y_t) = 0, \quad h = 1, 2, \dots$$

Таким образом, решение задачи прогнозирования эндогенных переменных представляет собой последовательность следующих шагов:

Шаг 1. Исследование проблемы идентифицируемости всех параметров модели и всех поведенческих уравнений системы. Выбор метода решения уравнений или корректура модели.

Шаг 2. Оценка параметров поведенческих уравнений системы.

Шаг 3. Исключение детерминированной составляющей из каждого поведенческого уравнения системы (построение временных рядов остатков).

Шаг 4. Построение моделей случайных составляющих на основе временных рядов остатков.

Шаг 5. Построение моделей временных рядов для каждой экзогенной переменной системы.

Шаг 6. Задание шага прогнозирования. Вычисление значений экзогенных переменных по моделям их временных рядов и вычисление моделей случайной составляющей по моделям случайных составляющих.

Шаг 7. Вычисление прогнозных значений эндогенных переменных.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЗНАЧЕНИЙ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РОССИИ

Рассмотрим задачу прогнозирования на примере анализа макроэкономических показателей России. Исходные данные для решения задачи взяты из базы показателей социально-экономического развития России, публикуемых Институтом комплексных стратегических исследований¹. Данная база содержит сведения последних лет, начиная с 1998 по 2012 гг. В табл. 1 приведены значения показателей, которые будут использованы в системе одновременных макроэкономических показателей.

¹ Институт комплексных стратегических исследований // <http://www.icss.ac.ru/macro>

Динамика макроэкономических показателей России

Год	ВВП, млрд руб., x_1	Цена нефти, \$/барр., x_2	Общий внешний долг, \$ млрд, x_3	Экспорт, \$ млрд, y_1	Экспорт, \$ млрд, y_2
1998	2630	11,9	188,4	74,4	58,0
1999	4823	17,1	178,2	75,6	39,5
2000	7306	26,7	160,0	105,0	44,9
2001	8944	23,0	146,3	101,9	53,8
2002	10819	23,9	152,3	107,3	61,0
2003	13208	27,3	186,0	135,9	76,1
2004	17027	34,2	213,5	183,2	97,4
2005	21610	50,0	257,2	243,8	125,4
2006	26917	61,1	313,2	303,6	164,3
2007	33248	68,9	463,9	354,4	223,5
2008	41277	94,8	480,5	471,6	291,9
2009	38807	60,4	467,2	303,4	191,8
2010	46322	77,9	488,9	400,6	248,6
2011	55799	109,0	540,6	522,0	323,8
2012	62357	110,4	624,0	530,8	335,4

С учетом приведенной таблицы система одновременных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = \alpha_1 + \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 + \gamma_{12}y_2 + \varepsilon_1 \\ y_2 = \alpha_2 + \beta_{21}x_1 + \beta_{23}x_3 + \gamma_{21}y_1 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – случайные составляющие.

Для оценки неизвестных коэффициентов необходимо проанализировать их идентифицируемость, а также идентифицируемость каждого из уравнений системы. В соответствии с необходимыми условиями идентифицируемости, а также в связи с тем, что в первом уравнении системы две эндогенные переменные y_1, y_2 и три экзогенные x_1, x_2, x_3 , а во втором – две эндогенные и две экзогенные, то первое уравнение является сверхидентифицируемым, а второе – идентифицируемым. Поэтому для нахождения оценок параметров модели будем использовать двухшаговый метод наименьших квадратов.

На первом шаге данного метода выполним оценки параметров первого уравнения системы – $y_1 = \gamma_{12} + \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 + \varepsilon_1$ с помощью классического метода наименьших квадратов. Полученное выборочное уравнение $\hat{y}_1 = -13,70 - 0,0005x_1 + 4,46x_2 + 0,16x_3$ позволяет рассчитать значения эндогенной переменной \hat{y}_1 и затем использовать найденные значения для решения на втором шаге метода второго уравнения регрессии вида $y_2 = \alpha_0 + \gamma_{11}\hat{y}_1 + \beta_{21}x_1 + \beta_{23}x_3 + \nu$. В результате решения данного уравнения получена система одновременных уравнений, имеющая вид:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = -13,70 - 0,0005x_1 + 4,46x_2 + 0,16x_3; \\ \hat{y}_2 = -26,68 - 0,0005x_1 + 0,19x_3 + 0,51\hat{y}_1. \end{cases}$$

Данная система показывает, что ВВП страны (экзогенная переменная x_1) практически незначимо влияет на объем экспорта и объем импорта. Проведенный

анализ значимости параметров модели позволяет упростить уравнения, исключив из обоих уравнений переменную x_1 – размер ВВП страны. Все остальные коэффициенты при переменных в обоих уравнениях значимо отличаются от нуля.

На объем экспорта наибольшее влияние оказывает цена нефти, фактор x_2 (следует отметить, что экзогенные переменные не стандартизованы и для сравнения степени влияния отдельных переменных необходимо выполнить данную процедуру). С ростом экспорта увеличивается рост импорта. При этом ошибка оценки коэффициента при данной переменной равна 0,1, что в целом указывает на сравнительно высокую точность его оценки. Так как данный коэффициент меньше единицы, то рост объема экспорта при прочих равных условиях опережает рост объема импорта.

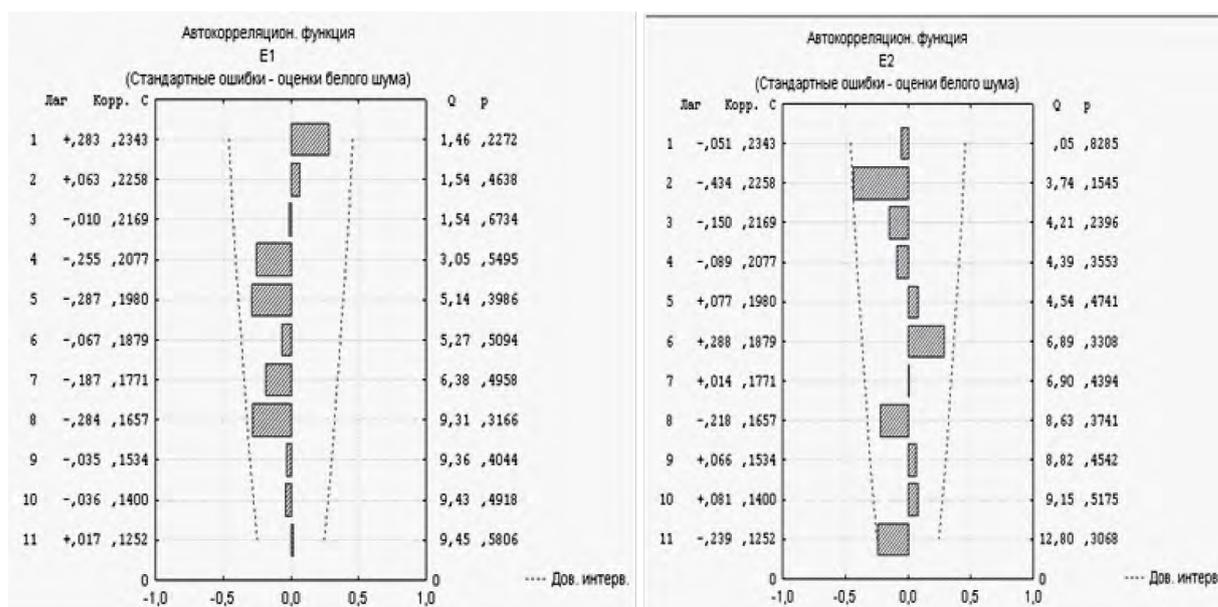
Полученные выборочные уравнения регрессии позволяют выявить модель случайной составляющей. С этой целью необходимо построить ряды остатков, значения которых приведены в последних столбцах *табл. 2*.

Коррелограммы автокорреляционных функций для временных рядов остатков представлены на *рис. 1*.

Судя по приведенным коррелограммам, первый ряд не имеет значимых отклонений автокорреляционной функции от нуля. Поэтому данный ряд может быть аппроксимирован гауссовским «белым шумом» с интенсивностью 11,3. Второй ряд имеет значимые на уровне значимости $\alpha = 0,05$ значения автокорреляционной функции. Следовательно, в отличие от первого ряда, он не является гауссовским. Необходимо построить его модель. Для построения данной модели использован статистический пакет STATISTICA. Графическое окно с результатами построения модели случайной составляющей для второго временного ряда приведено на *рис. 2*.

Аппроксимация значений эндогенных переменных и значения остатков

Год	$\hat{y}_{1,t}$	$\hat{y}_{2,t}$	$e_{1,t}$	$e_{2,t}$
1998	67,41	42,06	7,03	15,95
1999	88,03	49,63	-12,48	-10,09
2000	126,81	64,74	-21,78	-19,88
2001	107,34	51,58	-5,46	2,18
2002	111,38	53,96	-4,08	7,00
2003	130,44	68,98	5,49	7,09
2004	163,80	89,45	19,40	7,93
2005	238,88	133,78	4,92	-8,34
2006	294,42	170,23	9,13	-5,95
2007	349,84	224,18	4,56	-0,69
2008	463,78	281,56	7,82	10,30
2009	309,33	201,92	-5,94	-10,12
2010	387,14	242,20	13,49	6,43
2011	529,35	319,91	-7,34	3,92
2012	545,56	341,14	-14,76	-5,74



а)

б)

Рис. 1. Коррелограммы: а) ряда остатков $e_{1,t}$; б) ряда остатков $e_{2,t}$

Исход.: E2 (Таблица остатков)						
Преобразования: D(1)						
Модель(0,1,1) MS Остаток= 167,60						
Параметр	Парам.	Асимпт. Ст.ошиб.	Асимпт. t(13)	p	Нижняя 95% дов.	Верхняя 95% дов.
q(1)	0,656036	0,271176	2,419222	0,030950	0,070195	1,241876

Рисунок 2. Графическое окно, содержащее параметры модели временного ряда остатков

Модель случайной составляющей имеет вид $ARIMA(0, 1, 1)$. В аналитической форме она может быть записана в виде $\Delta e_{2,t} = v_t - 0,66v_{t-1}$, где v_t – порождающий белый шум с интенсивностью 12,4. Переходя к исходному ряду остатков, получим $e_{2,t} = e_{2,t-1} + v_t - 0,66 v_{t-1}$. На рис. 3 приведены графики прогнозных значений случайных составляющих для обоих рядов остатков. Данные графики показывают, что математическое ожидание случайной составляющей равно нулю. Таким образом, оценки не смещены.

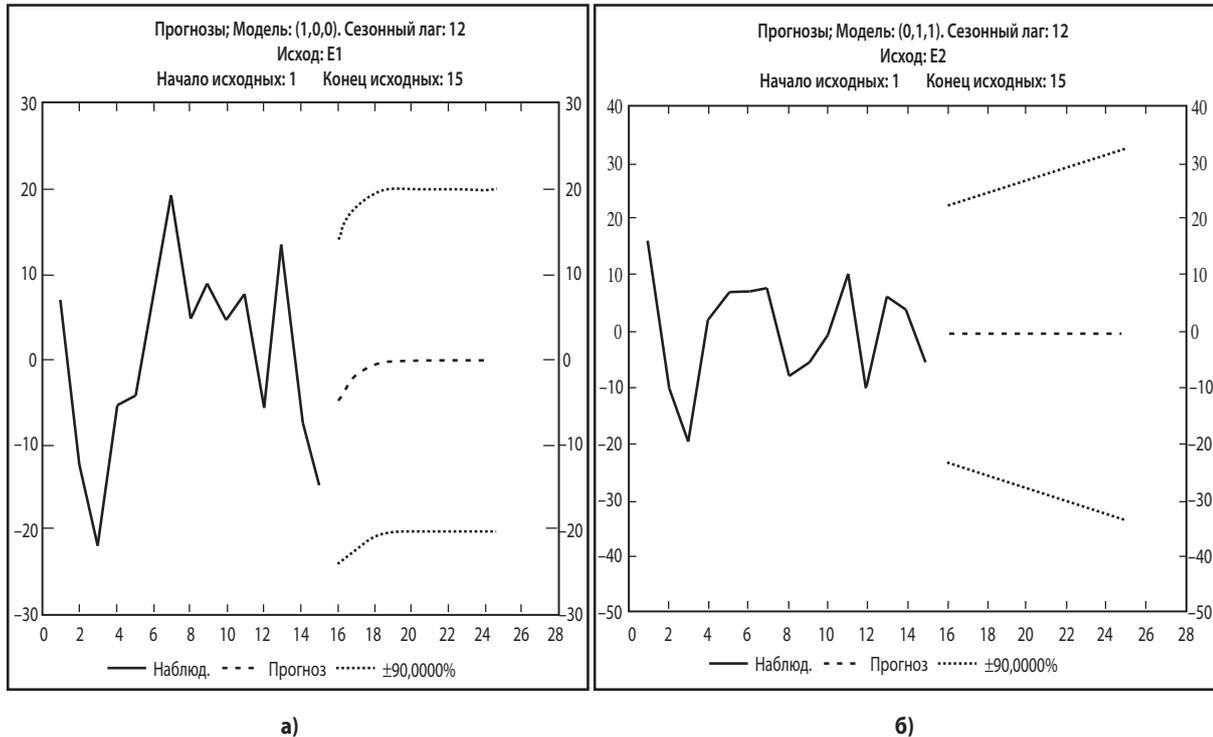


Рис. 3. Прогнозные значения рядов остатков: а) для первого ряда остатков; б) для второго ряда остатков

После построения моделей экзогенных переменных получим

$$\begin{aligned} x_{1,t} &= -3,422 + 4213,65t; \\ x_{2,t} &= 3,87 + 7,03t; \\ x_{3,t} &= 72,22 + 34,97t. \end{aligned}$$

Спрогнозируем значения эндогенных переменных на 2013 год. Полученные прогнозные значения (доверительные интервалы прогноза) приведены на рис. 4.

С учетом значений экзогенных переменных, а также значений случайных составляющих оценим значения эндогенных переменных.

Прогнозные значения эндогенных переменных (условные математические значения) равны соответственно: $y_{1,2013} = 598,5$ млрд \$, $y_{2,2013} = 274,1$ млрд \$. Разность между экспортом и импортом составит более 300 млрд \$. Данная разность продолжит увеличиваться, подтверждая имеющую негативную тенденцию. С учетом левой и правой границ доверительных интервалов минимальные и максимальные значения эндогенных переменных сведены в табл. 3.

Переменная	Предск. значения для перемен.: ВВП			Переменная	Предск. значения для перемен.: Цена нефти			Переменная	Предск. значения для перемен.: Долг		
	В-Веса	Значение	В-Веса * знач.		В-Веса	Значение	В-Веса * знач.		В-Веса	Значение	В-Веса * знач.
t	4213,646	15,00000	63204,70	t	7,033214	15,00000	105,4982	t	34,97071	15,00000	524,5607
Св. член			-3422,59	Св. член			3,8742	Св. член			79,2183
Предсказ.			59782,10	Предсказ.			109,3724	Предсказ.			603,7790
-95,0%ДП			54833,60	-95,0%ДП			95,7142	-95,0%ДП			531,2100
+95,0%ДП			64730,61	+95,0%ДП			123,0306	+95,0%ДП			676,3481

Рис. 4. Прогнозные значения экзогенных переменных на 2013 год

Прогнозируемые значения эндогенных переменных на 2013 г.

Названия показателей	Прогнозируемые значения экспорта, млрд \$	Прогнозируемые значения импорта, млрд \$
Предсказанное	598,54	274,05
-95% для всех факторов (минимальная оценка)	470,74	236,84
+95% для всех факторов (максимальная оценка)	610,72	311,22

По известным значениям ошибок оценок, а также по оцененным значениям дисперсии случайных составляющих можно определить интервальную оценку эндогенных переменных.

ВЫВОДЫ

Предложенный подход к решению задач прогнозирования эндогенных переменных позволяет объединить известную технологию построения моделей временных рядов с технологией построения моделей систем одно-временных уравнений. Приведенный пример прогноза макроэкономических показателей показывает его работоспособность. В силу трудоемкости данного подхода целесообразно решать данную задачу с использованием эконометрических пакетов. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Дугерти К. Введение в эконометрику : учебник для вузов / Кристофер Дугерти; пер. с англ. [О. О. Замко-

ва, Е. Н. Лукаша, О. Ю. Шибалкина]. – Изд. 3-е. – М: ИНФРА-М, 2009. – 478 с.

2. Клебанова Т. С. Методы и модели прогнозирования социально-экономических процессов / Т. С. Клебанова, В. А. Курзев, В. Н. Наумов, Л. С. Гурьянова. – СПб. : СЗИУ РАНХиГС, 2012. – 566 с.

3. Арженовский С. В. Методы социально-экономического прогнозирования : учебное пособие / С. В. Арженовский. – М. : Дашков и К: Ростов н/Д: Наука-Спектр, 2009. – 236 с.

REFERENCES

Arzhenovskiy, S. V. *Metody sotsialno-ekonomicheskogo prognozirovaniia* [Methods of social and economic forecasting]. M.; Rostov n/D: Dashkov i K; Nauka-Spektr, 2009.

Dougerti, K. *Vvedenie v ekonometriku* [Introduction to Econometrics]. M: INFRA-M, 2009.

Klebanova, T. S., Kurznev, V. A., and Naumov, V. N. *Metody i modeli prognozirovaniia sotsialno-ekonomicheskikh protsessov* [Methods and models predict socio-economic processes]. St. Petersburg: SZIU RANKhiGS, 2012.